

Fonctions Polynômiales Série 2

Tous les exercices doivent être faits sur des feuilles à part et non sur l'énoncé

Exercice 1 : Effectuez les divisions polynômiales suivantes :

a) $(x^2 + 5x + 5) \div (x + 2) =$

d) $(x^3 - 1) \div (x - 1) =$

b) $(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x + 15) \div (x - 5) =$

e) $(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6) \div (2x - 1) =$

c) $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 1) =$

Exercice 2 : $P(x)$ est-il divisible par $D(x)$? Si oui, donnez la factorisation **complète** de $P(x)$.

a) $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$
 $D(x) = x + 1$

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$
 $D(x) = x + 4$

c) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$
 $D(x) = x + 2$

d) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$
 $D(x) = x + 5$

e) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90$
 $D(x) = x - 2$

Exercice 3 : Factoriser les polynômes ci-dessous, en observant les indications :

a) $P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 3$, $P_1(3) = 0$

b) $P_2(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$, $a = 4$ est racine de P_2

c) $P_3(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$, $\{-5\} \subset \text{Zéros}(P_3)$

d) $P_4(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, $P_4(x)$ est divisible par $D(x) = 2x - 1$

Exercice 4 : Trouver un polynôme $P(x)$ tel que :

Y a-t-il plusieurs solutions ?

a) $P_1(x)$ est de degré 4, et $\text{Zéros}(P_1) = \{-2; 1; 3; 5\}$

b) $P_2(x)$ est de degré 5, et $\text{Zéros}(P_2) = \{-2; 1; 5\}$

c) $P_3(x)$ est de degré 3, et $\text{Zéros}(P_3) = \{-2; 1; 3; 5; 8\}$

d) $P_4(x)$ est de degré 3, $a = 2$ est sa seule racine, et $P_4(0) = 32$

Exercice 5 : Vrai ou faux ? justifiez

- a) Deux polynômes qui ont les mêmes racines sont égaux
- b) Un polynôme qui admet exactement deux racines distinctes est de degré 2
- c) Certains polynômes de degré 7 possèdent 3 racines, d'autres en ont 21

Plus d'exercices ??? Voir <http://www.gomaths.ch/> ---> Algèbre ---> Calcul littéral ---> Factorisation

Exercice 6 : Effectuer la division euclidienne de P par T et écrire l'égalité fondamentale de la division correspondante :

- | | |
|---|-------------------------------------|
| a) $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5$ | $T(x) = x - 1$ |
| b) $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$ | $T(x) = x + 1$ |
| c) $P(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 2$ | $T(x) = x - 3$ |
| d) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 8x - 5$ | $T(x) = x + \frac{2}{3}$ |
| e) $P(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ | $T(x) = \frac{1}{2}x + 1$ |
| f) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7$ | $T(x) = x$ |
| g) $P(x) = ax^3 - 2a^2x^2 + 3a^3x - 4a^4$ | $T(x) = x + a \ (a \in \mathbb{R})$ |
| h) $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 3x + 4$ | $T(x) = 2x + 3$ |

Exercice 7 : Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que A soit divisible par B.

- | | |
|---|----------------|
| a) $A(x) = x^2 + ax + 12$ | $B(x) = x - 3$ |
| b) $A(x) = x^3 + ax^2 + 19x - 12$ | $B(x) = x - 1$ |
| c) $A(x) = 3x^4 - ax^3 + 8x^2 - 2ax - 20$ | $B(x) = x - 2$ |

Exercice 8 :

Effectuer la division euclidienne du polynôme D (Dividende) par le polynôme d (diviseur) afin d'obtenir le quotient Q et le reste R .

N° exercice	Dividende	diviseur
1	$D = 2x^2 - 5x + 7$	$d = x - 1$
2	$D = -3x^2 + 5x + 4$	$d = 2x - 3$
3	$D = x^3 + 5x^2 + 4$	$d = x + 2$
4	$D = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$	$d = x^2 - 4x - 3$
5	$D = x^3 - 3x - 2$	$d = x - 2$
6	$D = -2x^3 + 8x^2 - 5 - 12$	$d = x - 3$
7	$D = -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15$	$d = x - 3$
8	$D = 3x^3 - 5x^2 + x + 3$	$d = 0,5x + 1,5$
9	$D = x^3 - 3x^2 - 8x + 4$	$d = x + 2$
10	$D = 4x^3 - x^2 + x - 5$	$d = 2x - 3$
11	$D = -x^3 + 2x^2 + 3$	$d = x^2 + x - 1$
12	$D = -3x^2 + 7x - 5$	$d = x + 1$
13	$D = 5x^2 - 8x + 7$	$d = -2x + 5$
14	$D = x^3 + 7x^2 + 6$	$d = x + 4$
15	$D = -x^3 + 3x^2 + x - 4$	$d = x^2 + 2x - 5$
16	$D = -x^3 + x - 24$	$d = x + 3$
17	$D = -3x^3 - 5x^2 - 2x - 37$	$d = x + 3$
18	$D = -x^3 + 2x^2 + 8x + 5$	$d = x + 1$
19	$D = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 1$	$d = 0,5x + 2,5$
20	$D = -x^3 + 4x^2 + 3x - 6$	$d = x - 1$
21	$D = 3x^3 - 5x^2 + x - 3$	$d = 2x - 5$
22	$D = x^3 + 7x^2 - 21x + 6$	$d = x - 2$

Corrigé Polynômes Série 2

Exercice 1 :

- a) $x^2 + 5x + 5 = (x + 2)(x + 3) - 1$
 b) $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x + 15 = (x - 5)(x^3 + 2x^2 - x + 3) + 30$
 c) $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3)$
 d) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
 e) $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (2x - 1)(x^2 + 5x + 6)$
-

Exercice 2 :

On pourrait faire les divisions polynomiales pour répondre aux questions, mais il est plus simple de tester si les deux polynômes ont les mêmes zéros.

- a) $D(-1) = 0$, donc il faut tester si -1 est un zéro du polynôme P .

$$P(-1) = -1 + 4 - 4 + 1 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de P par D , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) \text{ Après ce début de factorisation, on peut aller plus}$$

loin en factorisant : $x^2 + 3x + 1$ en utilisant Viète.

$$a = 1 ; b = 3 ; c = 1. \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 9 - 4 = 5.$$

$$x^2 + 3x + 1 = \left(x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right) = \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x + 1) \cdot \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

- b) $D(-4) = 0$, donc il faut tester si -4 est un zéro du polynôme P .

$$P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 3 = -91 \neq 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ n'est pas divisible par } D.$$

- c) $D(-2) = 0$, donc il faut tester si -2 est un zéro du polynôme P .

$$P(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) + 2 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de P par D , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 1) \text{ Après ce début de factorisation, on peut aller plus}$$

loin en factorisant : $x^2 + 3x + 1$. Ceci a déjà été fait dans la partie a).

$$\text{Donc : } P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x + 2) \cdot \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

- d) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$ $D(x) = x + 5$

$D(-5) = 0$, donc il faut tester si -5 est un zéro du polynôme P .

$$P(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - 9 \cdot (-5) - 45 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de P par D , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = (x + 5) \cdot (x^2 - 9) = (x + 5) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Cette fois-ci, la suite de la factorisation était simple.

Exercice 3 :

- a) $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 3)(x^3 + x^2 - 1)$
 b) $q(x) = x^2 + 2x + 1$
 c) $p(x) = (x + 5)(x^2 - 9) = (x + 5)(x + 3)(x - 3)$
 d) $p(x) = (x - 2)(x^3 + 5x^2 - 9x - 45) = (x - 2)(x + 5)(x + 3)(x - 3)$

Exercice 4 :

- a) $p_1(x) = c(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$, c est une constante
 b) $p_2(x) = x(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 5)$
 c) impossible
 d) $p_4(x) = -4(x - 2)^3$

Exercice 5 :

- a) faux
 b) faux
 c) faux

Exercice 6 :

- a) $P(x) = (x - 1)(4x^2 - 6x + 5)$ b) $P(x) = (x + 1)(x^4 - x^2)$
 c) $P(x) = (x - 3)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 9x + 19) + (55)$ d) $P(x) = (x + \frac{2}{3})(6x^2 - 11x + \frac{46}{3}) + (-\frac{137}{9})$
 e) $P(x) = (\frac{1}{2}x + 1)(2x^2 - x + 3) + (1)$ f) $P(x) = x(4x^2 - 5x + 3) + (-7)$
 g) $P(x) = (x + a)(ax^2 - 3a^2x + 6a^3) + (-10a^4)$ h) $P(x) = (2x + 3)(x^4 - 3x^2 + x) + 4$

Exercice 7:

- a) $a = -7$ b) $a = -8$ c) $a = 5$

Corrigé Série 2

Exercice 8:

$$1) \begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 7 \quad | \quad x-1 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 3 \\ -(-3x + 3) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) -3x^2 + 5x + 4 \quad | \quad 2x-3 \\ -(-3x^2 + 4.5x) \\ \hline 0.5x \\ -(0.5x - 0.75) \\ \hline 4.75 \end{array}$$

Q Q

$$12) \begin{array}{r} -3x^2 + 7x - 5 \quad | \quad x+1 \\ -(-3x^2 - 3x) \\ \hline 10x - 5 \\ -(10x + 10) \\ \hline -15 \end{array} \quad 13) \begin{array}{r} 5x^2 - 8x + 7 \quad | \quad -2x+5 \\ -(5x^2 - 12.5x) \\ \hline 4.5x + 7 \\ -(4.5x - 11.25) \\ \hline 18.25 \end{array}$$

Q Q

$$3) \begin{array}{r} x^3 + 5x^2 + 4 \quad | \quad x+2 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^2 + 4 \\ -(3x^2 + 6x) \\ \hline -6x + 4 \\ -(-6x - 12) \\ \hline 16 \end{array}$$

$\text{Q} = x^2 + 3x - 6$
 $\text{R} = 16$

$$14) \begin{array}{r} x^3 + 7x^2 + 6 \quad | \quad x+4 \\ -(x^3 + 4x^2) \\ \hline 3x^2 + 6 \\ -(3x^2 + 12x) \\ \hline -12x + 6 \\ -(-12x - 48) \\ \hline 54 \end{array}$$

$\text{Q} = x^2 + 3x - 12$
 $\text{R} = 54$

$$4) \begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - x + 1 \quad | \quad x^2 - 4x - 3 \\ -(2x^3 - 8x^2 - 6x) \\ \hline 13x^2 + 5x + 1 \\ -(13x^2 - 52x - 39) \\ \hline 57x + 40 \end{array}$$

$\text{Q} = 2x + 13$
 $\text{R} = 57x + 40$

$$15) \begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 + x - 4 \quad | \quad x^2 + 2x - 5 \\ -(-x^3 - 2x^2 + 5x) \\ \hline 5x^2 - 4x - 4 \\ -(5x^2 + 10x - 25) \\ \hline -14x + 21 \end{array}$$

$\text{Q} = -x + 5$
 $\text{R} = -14x + 21$

$$5) \begin{array}{r} x^3 - 3x - 2 \quad | \quad x-2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\text{Q} = x^2 + 2x + 1$
 $\text{R} = 0$

$$16) \begin{array}{r} -x^3 + x - 24 \quad | \quad x+3 \\ -(-x^3 - 3x^2) \\ \hline 3x^2 + x - 24 \\ -(3x^2 + 9x) \\ \hline -8x - 24 \\ -(-8x - 24) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\text{Q} = -x^2 + 3x - 8$
 $\text{R} = 0$

$$6) \begin{array}{r} -2x^3 + 8x^2 - 5x - 12 \quad | \quad x-3 \\ -(-2x^3 + 6x^2) \\ \hline 2x^2 - 5x - 12 \\ -(2x^2 - 6x) \\ \hline x - 12 \\ -(x - 3) \\ \hline -9 \end{array}$$

$\text{Q} = -2x^2 + 2x + 1$
 $\text{R} = -9$

$$17) \begin{array}{r} -3x^3 - 5x^2 - 2x - 37 \quad | \quad x+3 \\ -(-3x^3 - 9x^2) \\ \hline 4x^2 - 2x - 37 \\ -(4x^2 + 12x) \\ \hline -14x - 37 \\ -(-14x - 42) \\ \hline 5 \end{array}$$

$\text{Q} = -3x^2 + 4x - 14$
 $\text{R} = 5$

$$7) \begin{array}{r} -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15 \quad | \quad x-3 \\ -(-2x^3 + 6x^2) \\ \hline 7x^2 - 16x - 15 \\ -(7x^2 - 21x) \\ \hline 5x - 15 \\ -(5x - 15) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\text{Q} = -2x^2 + 7x + 5$
 $\text{R} = 0$

$$18) \begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + 8x + 5 \quad | \quad x+1 \\ -(-x^3 - x^2) \\ \hline 3x^2 + 8x + 5 \\ -(3x^2 + 3x) \\ \hline 5x + 5 \\ -(5x + 5) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\text{Q} = -x^2 + 3x + 5$
 $\text{R} = 0$

$$8) \text{Q} = 6x^2 - 28x + 86 \quad \text{R} = -126$$

$$19) \text{Q} = 4x^2 - 34x + 176 \quad \text{R} = -439$$

$$9) \text{Q} = x^2 - 5x + 2 \quad \text{R} = 0$$

$$20) \text{Q} = -x^2 + 3x + 6 \quad \text{R} = 0$$

$$10) \text{Q} = 2x^2 + 2.5x + 4.25 \quad \text{R} = 7.75$$

$$21) \text{Q} = 1.5x^2 + 1.25x + 3.625 \quad \text{R} = 15.125$$

$$11) \text{Q} = -x + 2 \quad \text{R} = -4x + 6$$

$$22) \text{Q} = x^2 + 9x - 2 \quad \text{R} = 0$$