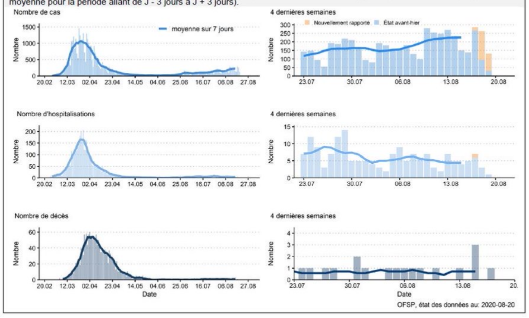
Analyse

Motivation[1]

Recherche des contacts*	Nombre de personnes en isolement	Nombre de leurs contacts en quarantaine	Nombre supplémentaire de personnes en quarantaine entrées de pays à risque
Total	**1877**	**6667**	**21 421**

* est mis à jour au moins le mercredi et le vendredi, les données sont disponibles pour 26 cantons et pour la Principauté de Liechtenstein

Figure. Évolution des cas de COVID-19 confirmés en laboratoire, hospitalisations et décès depuis l'introduction de l'obligation de déclarer, en Suisse et dans la Principauté de Liechtenstein. Ligne : moyenne mobile sur 7 jours (la valeur pour chaque jour J est la moyenne pour la période allant de J - 3 jours à J + 3 jours).



Sans être formulé en des termes d'images et d'antécédents, la détermination d'une quantité à partir d'une autre est un type de tâches omniprésent dans la lecture d'un tableau de nombres ou d'un graphique, qu'ils soient issus de la vie courante ou internes à une situation mathématique ; par contre, rares sont les déterminations ayant recours à l'algèbre dans la vie courante, hormis des calculs d'images tels **le calcul de l'impôt sur le revenu**, ou des calculs tel celui de **l'indice de masse corporelle.**

Il convient de distinguer les techniques finalement assez rudimentaires pour réaliser les types de tâches citées dans **la vie courante**, des techniques utiles lorsqu'on veut étudier un **phénomène fonctionnel dans le cadre des sciences expérimentales et des mathématiques** :

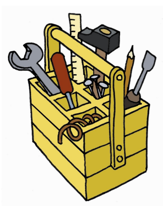
État : 20.08.2020 **Heure : 8 h 00**	Total			Les 7 derniers jours*	
	Nombre	Différence à la veille	Pour 100 000 habitants	Nombre	Pour 100 000 habitants
Cas confirmés en laboratoire					
Principauté de Liechtenstein	100	+2	260.6	8	20.8
Suisse	38 926	+264	455.6	1467	17.2
Total	**39 026**	**+266**	**454.7**	**1475**	**17.2**
Hospitalisations					
Total	**4468**	**+8**	**52.1**	**31**	**0.4**
Décès					
Principauté de Liechtenstein	1	+0	2.6	0	0
Suisse	1718	+0	20.1	5	<0.1
Total	**1719**	**+0**	**20.0**	**5**	**<0.1**
Tests PCR					
Total	**910 283**	**+9209**	**10 605.8**	**46 557**	**542.4**
Proportion de tests positifs**	5.1%			3.8%	

* sans aujourd'hui ** plusieurs tests positifs ou négatifs sont possibles chez la même personne

- Le **vocabulaire** (image, antécédent...), les **définitions** (fonction croissante, maximum d'une fonction, ...), la **théorie mathématique** (notation f(x), notion de fonction, ...) et les **techniques algébriques** des fonctions (monotonie, extrema) sont absents de nombreux domaines de la vie courante, voire des autres disciplines, car ils ne sont utiles que dans les situations où une théorie mathématique est sous-jacente.

- Dans la même veine, les valeurs d'une quantité qui rendent **optimales** une autre quantité ainsi que les valeurs recherchées d'images ou d'antécédents sont des **valeurs approchées**, même avec une formule, car rechercher des valeurs exactes est souvent dénué de sens hors des mathématiques.

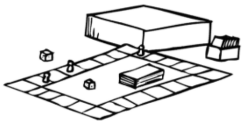
- Les interactions avec l'algèbre sont limitées à la recherche d'une quantité en fonction d'une autre.
  Bien souvent, dans une formule, apparaissent plusieurs lettres qui ont, selon les moments de l'étude ou les situations, statut d'inconnues, de variables ou bien de paramètres.
  Les **méthodes** pour élaborer **ces lois** et la recherche de la **validité du modèle** utilisent des **outils** qui dépassent parfois le cadre de la théorie des fonctions.



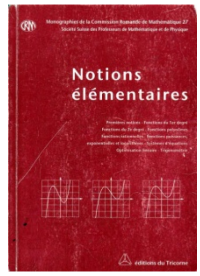
Les problèmes d'**optimisation** sont omniprésents dans notre société : ils consistent à la recherche d'un «meilleur compromis possible» selon des critères préalablement fixés **: estimation** de la température maximale pour la prévision du temps, **quantité minimale** d'objets à produire pour dégager un bénéfice, **temps minimal** pour atteindre un point donné du globe (routage maritime), fonctionnement **le plus adapté** d'une machine (couple maximal d'un moteur, etc.)

[1] http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/perfonctions-seconde.pdf

Matériel



- Ce polycopié,
- Les séries intitulées « Analyse Série …» (AS1, etc.),
- Livre de la CRM *Notions élémentaires (pour les cours)*,
- Formulaires et Table CRM *(cours & épreuves)*
- *Crayon, gomme, règle, feuilles*
- Une calculatrice personnelle non PRO



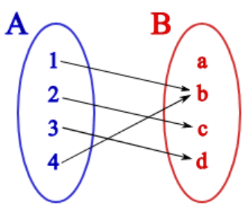
Pour comprendre comment jouer à un nouveau jeu, il faut commencer par lire les règles. En commençant à jouer, les règles deviennent plus claires ; on commence à chercher les limites et à faire des liens. Nous poserons donc des définitions comme on pose une règle de jeu et puis nous pourrons ainsi jouer pour aller plus loin ! Votre but sera donc de chercher les limites, les failles ; ce qui permet d'établir si la définition ou l'architecture est solide.

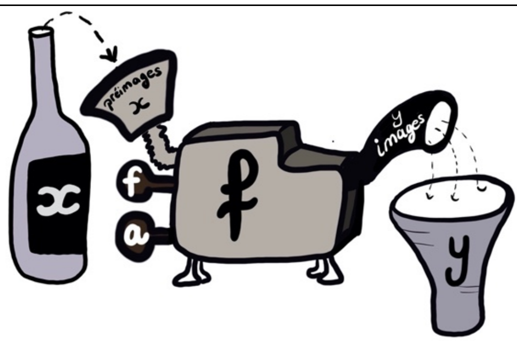
1. Fonctions

1.1 Rappels :

> *Définition :* Une **fonction** est définie par :
> 1) Un ensemble A appelé **ensemble de départ**, ou **source**.
> 2) Un ensemble B appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.
> 3) Une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ $x \in A$ fait correspondre zéro (aucun) ou un élément de l'ensemble d'arrivée $y \in B$.

Illustration :





Remarque : Si à chaque élément de l'ensemble de départ la règle de correspondance associe exactement un élément de l'ensemble d'arrivée, il s'agit d'une **application**.
Lorsque cela n'est pas précisé, nous prendrons comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble des nombres réels.

Vocabulaire et notation :

- On désigne souvent une fonction par les lettres $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{h}$
- Si x appartient à l'ensemble de départ A et y est un élément de l'ensemble d'arrivée B qui correspond à x, y est appelé **l'image de x** (x possède au plus une image)
- x est appelé une **préimage de y** (y peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)
- Si on désigne la fonction par f alors on note : $\boldsymbol{f(x)}$ l'image de x
- On note : $f: x \longmapsto f(x) = y$ de A vers B $\underset{équivalent}{\Longleftrightarrow}$ $f: \begin{cases} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) = y \end{cases}$

1.2 Exemples de fonctions

1) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $B = \mathbb{R}_+$ et $f = \{(-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 4); (3; 9); (4; 16)\}$

2) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto x^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto 4 \end{cases}$

1.3 Contre-exemples (ne sont pas des fonctions)

1) $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $B = \mathbb{R}_+$ et
$m = \{(-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 4); (-2; 4); (3; 9); (4; 16)\}$

2) $k: x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

3) $y = \frac{1}{x}$ $A = B = \mathbb{R}$

- *Comment transformer ces 3 contre-exemples en exemples ?*

Exercice :

$\boldsymbol{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$ $\boldsymbol{f}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une fonction réelle.

L'image de -4 est

L'ensemble des préimages de 2 est $f^{-1}(2) = \{ \qquad\qquad \}$, car

1.4 Définitions et rappels

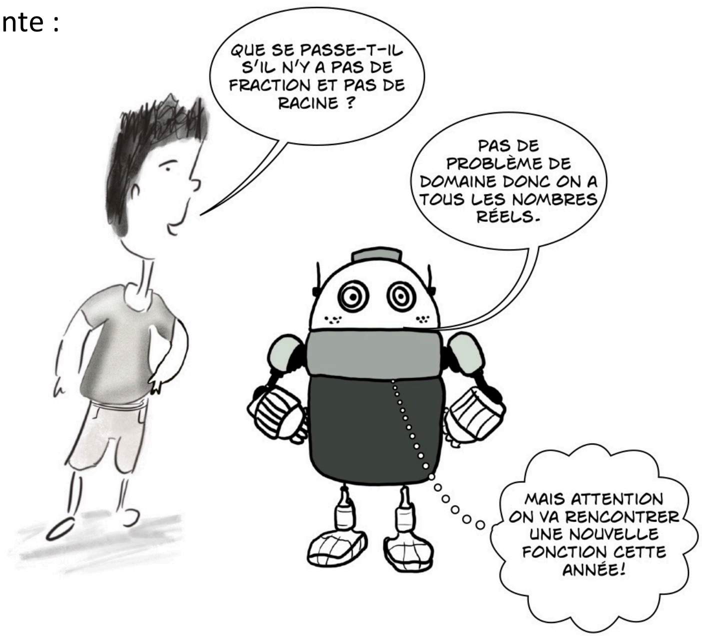
Définition : Le **domaine de définition** (ou ensemble de définition) d'une fonction f est l'ensemble des nombres appartenant à $\mathbb{R}$ qui ont une image par f. Cet ensemble est noté D_f Le graphique de f est la représentation géométrique des couples de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où $x \in D_f$.

Rappels concernant des domaines particuliers :

1) Le dénominateur d'une fraction	**Exemple :** $f(x) = \frac{x}{x-2}$ $D_f =$
2) Les racines paires	**Exemple :** $f(x) = \sqrt{x-3}$ (ou $g(x) = \sqrt[6]{x-3}$) $D_f =$

Exercice : Quel est le domaine de la fonction suivante :

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ $\qquad D_f =$



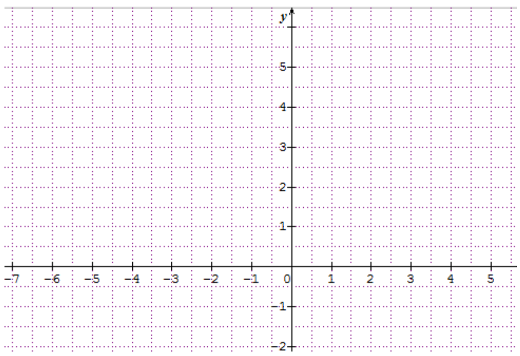
Exercice : $\quad f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$

Le domaine de définition de f est . . . .

Le graphique de f sur l'intervalle $[-7; 5]$ est :

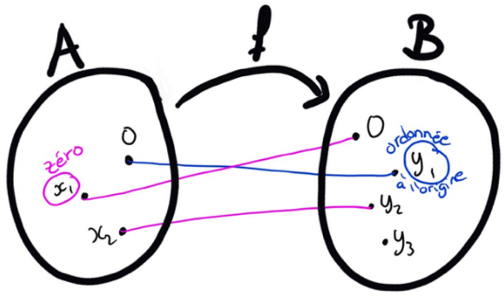
Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$							



Définitions :

- **L'ordonnée à l'origine** d'une fonction réelle f est l'image de 0. Elle se note $f(0)$
- Les **zéros** d'une fonction réelle f est l'ensemble des préimages de 0. Elle se note $f^{-1}(0)$
  Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres x ayant 0 $(= y)$ comme image.



Exemple : $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$

L'ordonnée à l'origine de f est . . . .

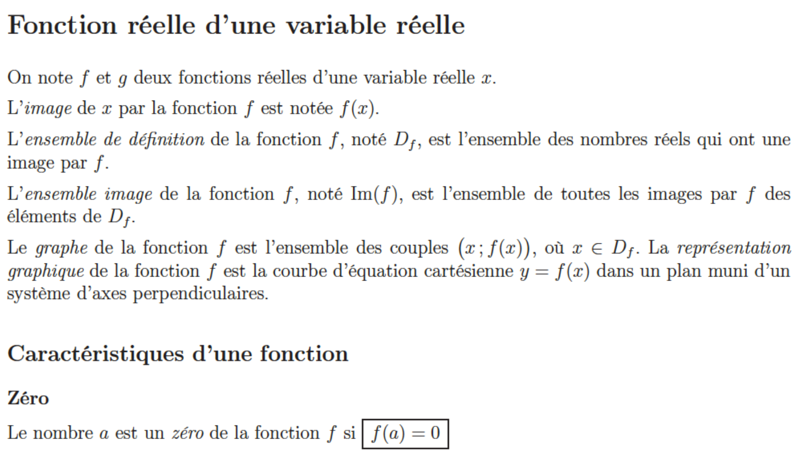
Les zéros de f est l'ensemble $Z_f =$ . . . .

Exemple : $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad D_f =$

L'ordonnée à l'origine de f est...

Les zéros de f est l'ensemble ....

Que peut-on trouver dans la table CRM ?



Fonction réelle d'une variable réelle

On note f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle x.

L'*image* de x par la fonction f est notée $f(x)$.

L'*ensemble de définition* de la fonction f, noté D_f, est l'ensemble des nombres réels qui ont une image par f.

L'*ensemble image* de la fonction f, noté $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des éléments de D_f.

Le *graphe* de la fonction f est l'ensemble des couples $(x\,;f(x))$, où $x \in D_f$. La *représentation graphique* de la fonction f est la courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$ dans un plan muni d'un système d'axes perpendiculaires.

Caractéristiques d'une fonction

Zéro

Le nombre a est un *zéro* de la fonction f si $\boxed{f(a) = 0}$

1.5 Égalités de deux fonctions

Définition : Deux fonctions f et g sont ***égales*** si

- Elles ont la même source A et le même but B
- Pour tout élément de la source A, $f(x) = g(x)$.

Exemple :

$A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $B = \mathbb{R}_+$ et $f = \{(-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 4); (3; 9); (4; 16)\}$

et $g: x \mapsto x^2$ de $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ vers $\mathbb{R}$.

f et g sont égales.

Contre-exemple :

$A = \mathbb{R}$; $B = \mathbb{R}$ et $f(x) = x$

et $g: x \mapsto \sqrt{x^2}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

f et g ne sont pas égales

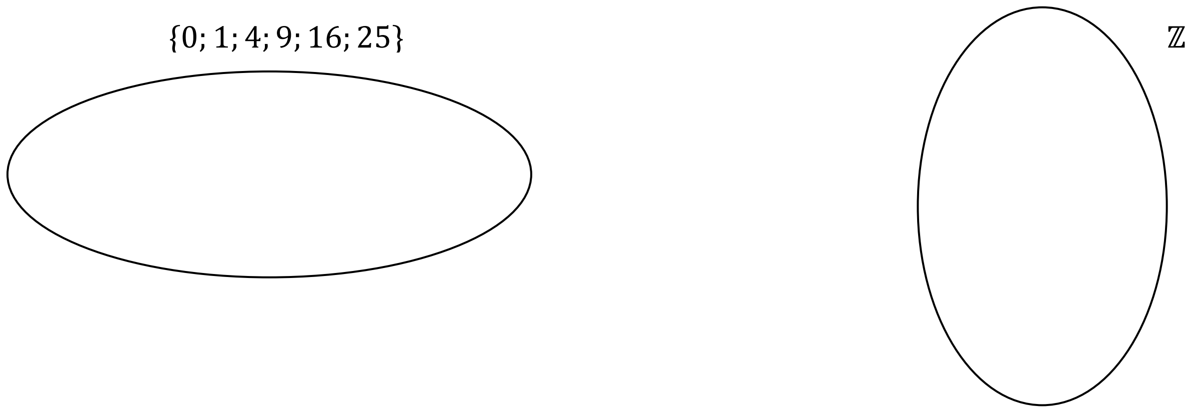
- Pourquoi ne sont-elles pas égales ?

- Comment les rendre égales ?

1.6 Représentations des fonctions

a) Diagramme de Venn

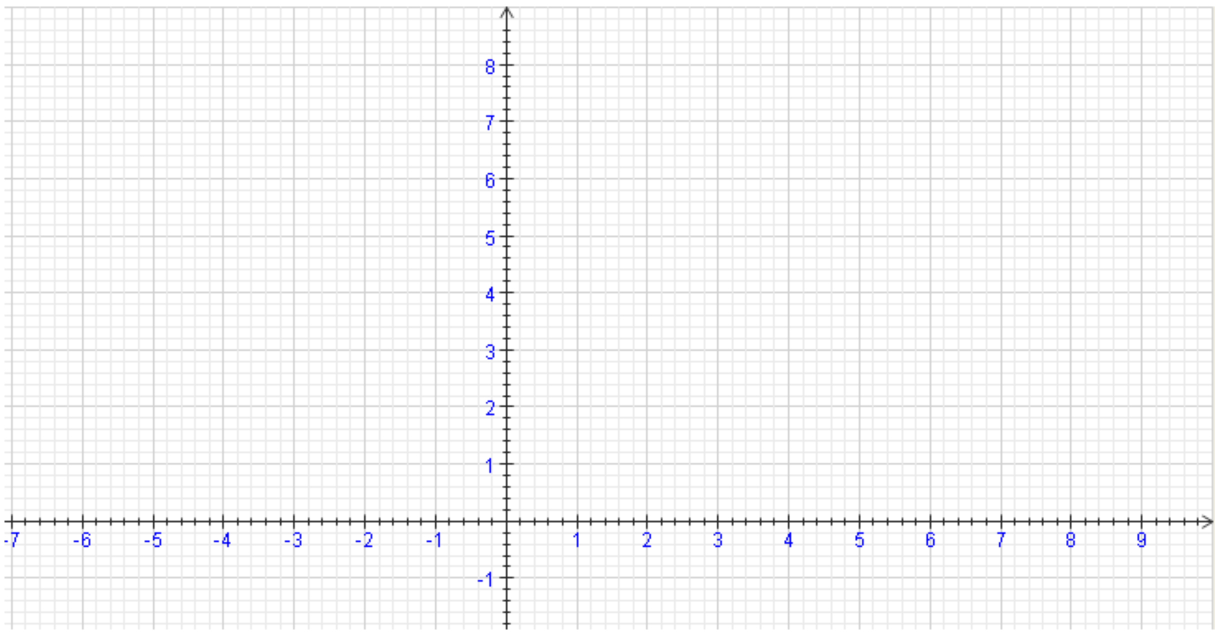
On considère la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x}$ de $\{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$ vers $\mathbb{Z}$.
Complétez :



b) Représentation dans un repère

On considère la fonction $f: x \mapsto x^2 - 1$ de $[-2; 3]$ vers $\mathbb{R}$.

A compléter :



➢ ***Analyse Série 1 exercices 1 à 4***

➢ ***Analyse Série 2 exercice 1 a)***

2. Opérations sur les fonctions

a) Multiplication d'une fonction par un nombre

Définition : On considère un nombre réel λ et une fonction f de A vers $\mathbb{R}$. On note λf la fonction définie par $\begin{cases} \lambda f : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cdot f(x) \end{cases}$ Notation : $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $\lambda = 5$

On a: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) =$

Remarque : $(-1)f$ est noté $-f$

b) Somme de deux fonctions

Définition : On considère deux fonctions f et g de même source A. On appelle **somme de f et g** la fonction définie par $\begin{cases} f + g : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$ Notation : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

Pour définir la **soustraction** de deux fonctions : $f - g = f + (-g)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a : $(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$

et $(f - g)(x) = f(x) - g(x) =$

c) Produit de deux fonctions

Définition : On considère deux fonctions f et g de même source A.
On appelle **produit de f et g** la fonction définie par $\begin{cases} f \cdot g : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$
Notation : $(f \cdot g)(x) = fg(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a : $(f \cdot g)(x) = fg(x) = f(x) \cdot g(x) =$

d) Quotient de deux fonctions

Définition :

On considère deux fonctions f et g de même source A. La fonction g n'admet pas de zéro dans A. On appelle **quotient** de f par g la fonction définie par $\begin{cases} \frac{f}{g}: A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$

Notation : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$

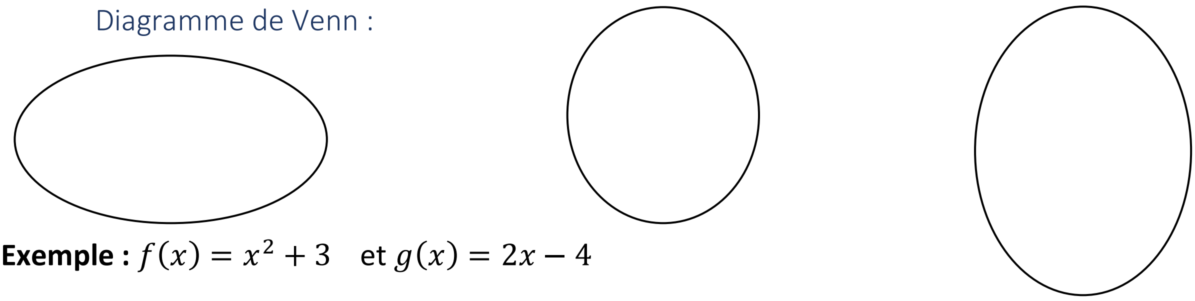
e) Composée de deux fonctions

Définition :

On considère une fonction f de A vers B et une fonction g de B vers C.
On appelle **composée de f et de g** notée $g \circ f$, lu « g rond f » définie par :
$\begin{cases} g \circ f: A \to C \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$

Notation : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Diagramme de Venn :



Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) =$

et $(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$

On remarque donc que :

Exemple : f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Soient les fonctions $f: x \mapsto x+1$ et $g: x \mapsto x^2$

Effectuons la composition : $x \xrightarrow{f} (x+1) = u \xrightarrow{g} u^2 = (x+1)^2$

Autre notation : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x+1) = (x+1)^2$;

Donc : $g \circ f: x \mapsto (x+1)^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Effectuons la composition dans l'autre sens : $f \circ g : x \xrightarrow{g} x^2 = u \xrightarrow{f} u + 1 = x^2 + 1$

On constate que : $\boxed{\boldsymbol{g \circ f \neq f \circ g}}$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a: $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) =$

et $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) =$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Opérations sur les fonctions

Addition	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Soustraction	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
Multiplication	$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
Multiplication par un réel λ	$\lambda \cdot f$	$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$
Division	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
Composition	$g \circ f$	$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

➢ ***Analyse Série 1 exercices 5 à 7***

3. Propriétés des opérations sur les fonctions

1. L'addition et la multiplication des fonctions sont **commutatives** :

$$f + g = g + f \text{ et } f \cdot g = g \cdot f$$

2. L'addition, la multiplication et la composition des fonctions sont **associatives** :

$$(f + g) + h = f + (g + h)$$
$$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$$
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

3. **Élément neutre** :

a) La fonction nulle : $k_0 : x \mapsto 0$ est l'élément neutre pour l'addition des foncions :
$k_0 + f = f + k_0 = f$

b) La fonction constante 1 : $k_1 : x \mapsto 1$ est l'élément neutre pour la multiplication des fonctions : $k_1 \cdot f = f \cdot k_1 = f$

c) La fonction identité : $Id : x \mapsto x$ est l'élément neutre pour la composition des fonctions :
$Id \circ f = f \circ Id = f$

Ces définitions vous sembleront bien naturelles mais en 4ème année, vous découvrirez des objets qui ne bénéficieront pas de toutes les propriétés citées ci-dessus.

4. Injections, surjections et bijections

$$f : \begin{cases} A & \rightarrow & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$

Pour définir une application de A dans B, nous avons uniquement considéré ce qu'il advenait des éléments de la source A :

"f est une fonction si chaque élément de A possèdent une et une seule image dans B."

On ne s'est en revanche pas préoccupé des éléments du but B. Nous allons maintenant affiner notre étude des applications en considérant certaines d'entre elles selon leur comportement au but.

1. Injections

Définition :

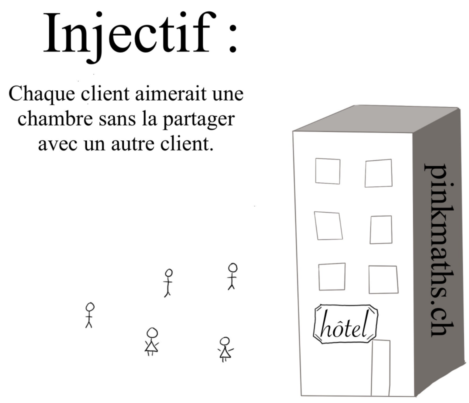
Une application f de A vers B est une **injection** si et seulement si tout élément y du but B possède **au maximum une** préimage x dans A.

Remarque :

Si f est une injection, tous les éléments du but possèdent 0 ou 1 préimage.

Pour vérifier qu'une application est <u>injective</u>, il faut donc montrer qu'aucun élément du but ne possède plus d'une préimage.

Mais pour vérifier qu'une application n'est <u>pas injective</u>, il suffit de trouver un élément du but qui possède plus de 1 préimage.



$f: A \to B$ est **injective** si
$\forall x_1,\ x_2\ \in A,\ \ x_1 \neq x_2\ \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemple d'une fonction **<u>Injective</u>** :

Pour vérifier si f est injective, il suffit de résoudre l'équation $f(a) = f(b)$ pour voir si l'on peut trouver des éléments a et b du but différents mais qui ont la même image.
Si oui, f n'est pas injective ; si non f est injective.

Exemple : Montrons que f : $x \mapsto -4x + 5$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien injective.

$$f(a) = f(b) \Leftrightarrow -4a + 5 = -4b + 5 \Leftrightarrow -4a = -4b \ \ \Leftrightarrow \ \ a = b$$

Exercice : Montrons que $f : x \mapsto 3x - 9$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien injective.

Contre-exemple : Montrons que $f : x \mapsto (x+1)^2$ n'est pas injective.

$(a+1)^2 = (b+1)^2 \Leftrightarrow a+1 = \pm(b+1)$

Comme on trouve : $a = b$ et $a = -b - 2$, la fonction n'est pas injective.

Un contre-exemple suffirait : $f(1) = f(-3) = 4$

Exercice : Montrer que $f(x) = x^2 - 1$ n'est pas injective

Méthode algébrique :

Pour vérifier si f est injective, on vérifie que chaque y de B possède 0 ou 1 préimage (mais pas plus !)

1) On prend un élément du but, on dit qu'il est l'image de a en le notant : $f(a)$

2) On dit que c'est aussi l'image de b : $f(b)$

3) On pose donc : $f(a) = f(b)$

4) En résolvant l'équation, on vérifie si cet élément de B possède une seule préimage (injectif) ou plus (pas injectif)

2 possibilités :

- On obtient que **a = b** , on n'a trouvé qu'une préimage possible -> **fonction injective**
- On obtient **a = b ou a ≠ b** , on a trouvé 2 préimages différentes -> **fonction non-injective**

Méthode numérique : (si on sait que la fonction ne sera pas injective) :

Calculer un contre-exemple où on a la même image pour deux préimages différentes

2. Surjections

Définition :

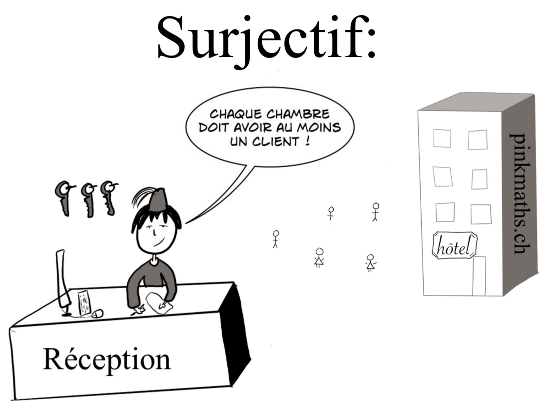
Une application f de A vers B est une **surjection** si et seulement si tout élément y du but B possède **au minimum une** préimage x dans A.

Remarque :

Si f est une surjection, chaque élément du but possède 1 préimage ou plus.

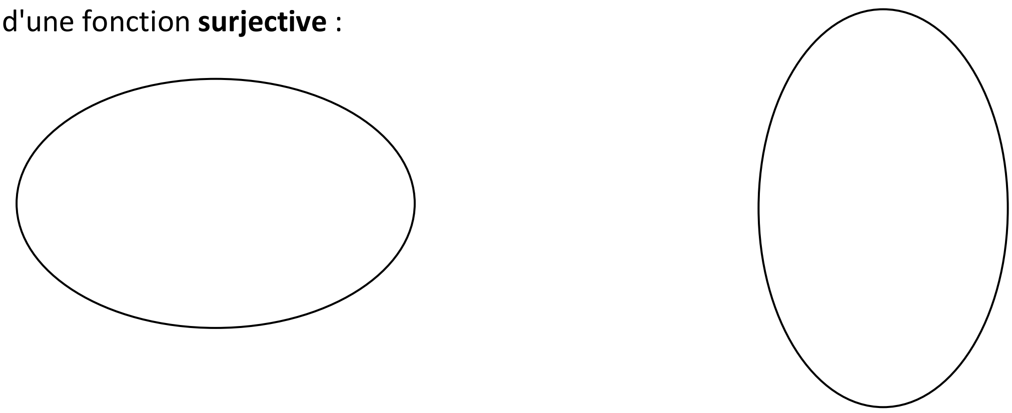
Pour vérifier qu'une application est <u>surjective</u>, il faut montrer qu'aucun élément du but ne possède pas de préimage par f.

Mais pour vérifier qu'une application n'est <u>pas surjective</u>, il suffit de trouver un élément du but qui ne possède pas de préimage.



$f: A \to B$ est **surjective** si
$\forall y \in B\ \ \exists x \in A \mid f(x) = y$

Exemple d'une fonction **surjective** :



Pour vérifier si f est surjective, il suffit de résoudre l'équation $f(x) = y$ pour voir si l'on peut trouver un élément x de la source pour n'importe quel élément y du but. Si oui, f est surjective ; si non f n'est pas surjective.

Contre-exemple : Montrons que $f: x \mapsto (x+1)^2$ de $A = \mathbb{R}$ vers $B = \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

$$y = (x+1)^2$$
$$\pm\sqrt{y} = x + 1$$
$$x = -1 \pm \sqrt{y}$$

Domaine : $y \geq 0$ donc $D = [0; \infty[$ or $B = \mathbb{R}$

Exercice : Montrons que $f: x \mapsto (x+1)^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Exemple : Montrons que $f : x \mapsto -4x + 5$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien surjective.

$$y = -4x + 5$$
$$y - 5 = -4x$$
$$x = \frac{y-5}{-4}$$

Domaine $D = \mathbb{R} = B$ donc f est surjective.

Exercice : Montrons que $f: x \mapsto 3x - 9$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bien surjective.

Méthode algébrique : $f: A \to B$

1) $f(x) = y$
2) Isoler x
3) $x = ***$
4) Déterminer le domaine de $***$

- Si le domaine $= B$ (ensemble d'arrivée de f) alors f est surjective
- Si le domaine $\neq B$ alors non.

Définition :

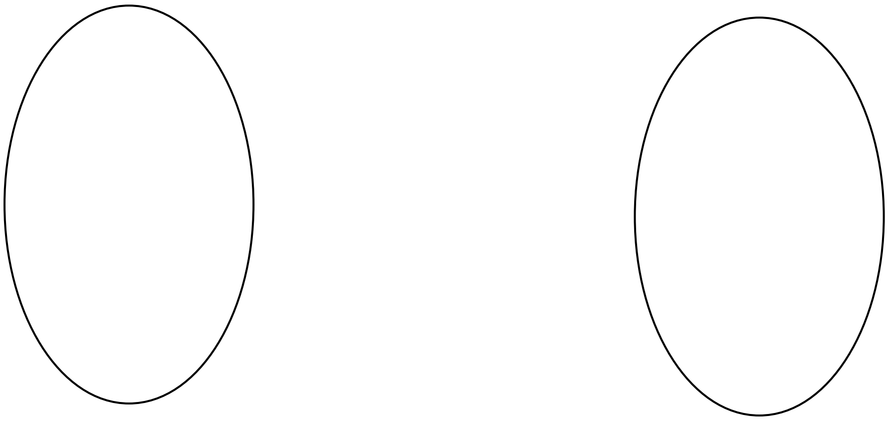
Soient f et g deux applications telles que $f: A \to B$ et $g: A' \to B'$ avec $A' \subset A$.
On définit g est la **restriction** de f à A', ou f est un **prolongement** de g à A si, et seulement si, pour tout $x \in A'$, on a que $f(x) = g(x)$.

3. Bijections

Définition :

Une application f de A vers B est une **bijection** si et seulement si f est à la fois une **injection** et une **surjection**.

Exemple d'une fonction **bijective** :



Remarque :

- Pour vérifier qu'une application est bijective, il faut montrer qu'elle est d'une part injective, d'autre part surjective.

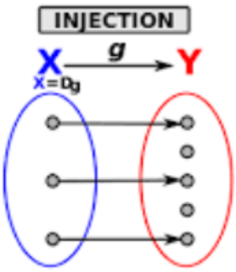
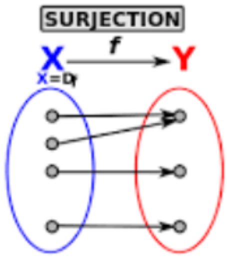
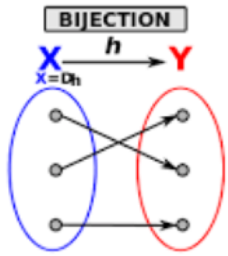
  Si f est une bijection tous les éléments du but possèdent une et une seule préimage.

Exercice :

a) Est-ce que $f(x) = 2x - 3$ est une bijection ?

b) Est-ce que $x^2 - 4$ est une bijection ?

Résumé :

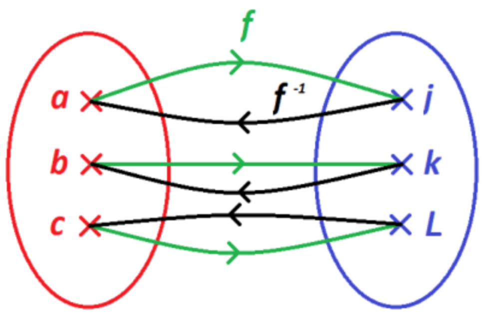
	Injectif	Surjectif	Bijectif
Français	Une application de A vers B est **injection** si et seulement si tout élément y du but B possède **au maximum une** préimage x dans A	Une application f de A vers B est **surjection** si et seulement si tout élément y du but B possède **au minimum une** préimage x dans A.	Une application f de A vers B est une **bijection** si et seulement si f est à la fois une **injection** et une **surjection**.
Maths	$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$	$\forall y \in B\ \exists x \in A\ tel\ que\ f(x) = y$	
Diagramme de Venn			
Graphique	Pour vérifier qu'une application est injective, il faut montrer qu'aucun élément du but ne possède plus d'une préimage. Mais pour vérifier qu'une application n'est pas injective, il suffit de trouver un élément du but qui ne possède pas que 0 ou 1 préimage. Si f est une injection, tous les éléments du but possèdent 0 ou 1 préimage.	Pour vérifier qu'une application est surjective, il faut montrer qu'aucun élément du but ne possède moins d'une préimage. Mais pour vérifier qu'une application n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément du but qui ne possède pas de préimage.	Pour vérifier qu'une application est bijective, il faut montrer qu'elle est d'une part injective, d'autre part surjective. Si f est une bijection tous les éléments du but possèdent une et une seule préimage.

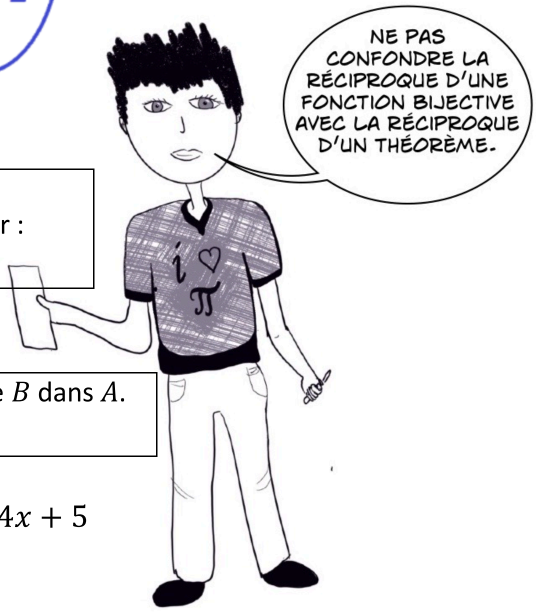
➢ ***Analyse Série 1 exercice 9 + Série 2 exercices 1 à 3***

➢ ***Notions élémentaires p.16 ex 25***

4. Application réciproque

Si une application f fait correspondre à tout élément x de la source un élément y du but, la réciproque fera correspondre à tout élément y du but l'élément x qui est sa préimage : cela n'est possible que si ce x existe et est unique, c'est-à-dire si f est bijective.





Définition :

Soit f une application bijective de A dans B. L'application réciproque de f, notée ${}^{r}f$, de B dans A sera définie par : ${}^{r}f(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Théorème :

Soient f une application bijective de A dans B et ${}^{r}f$ sa réciproque de B dans A. Alors $(({}^{r}f) \circ f)(x) = x$ et $(f \circ ({}^{r}f))(y) = y$

Exemple : Déterminons la réciproque de la bijection : $f : x \mapsto -4x + 5$

$$y = -4x + 5$$

$$y - 5 = -4x$$

$$x = \frac{y-5}{-4} = -\frac{5-y}{-4} = \frac{5-y}{4} = {}^{r}f(y)$$

donc : ${}^{r}f(x) = \frac{5-x}{4}$

Vérifions : ${}^{r}f\big(f(x)\big) = \frac{5-(-4x+5)}{4} = \frac{5+4x-5}{4} = \frac{4x}{4} = x$

Exercice : Déterminer la réciproque de $f : x \mapsto x + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une bijection.

Notation : L'application réciproque est parfois notée f^{-1} au lieu de ${}^r f$ mais cette notation peut prêter à confusion car f^{-1} peut aussi signifier : $\frac{1}{f}$.

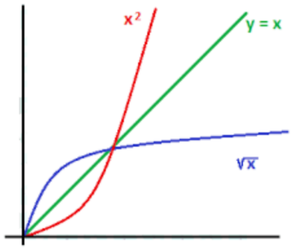
Remarque :

f étant une bijection, ${}^r f$ est nécessairement aussi une bijection.

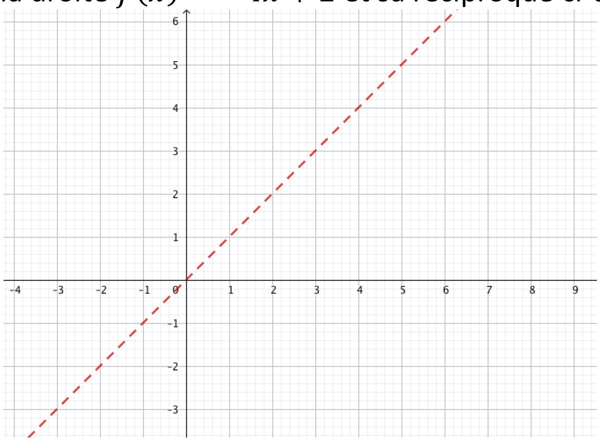
Il existe une propriété graphique reliant une application f et sa réciproque ${}^r f$:

La représentation graphique de f et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

Exemple : Soit $f: x \mapsto x^2$ dans $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. La réciproque de f est : ${}^r f: y \mapsto \sqrt{x}$



Exemple : Représenter la droite $f(x) = -4x + 2$ et sa réciproque ci-dessous :



Méthode :
1) Représenter f
2) Représenter $y = x$
3) Effectuer la symétrie de f par rapport à $y = x$, c'est ${}^r f$

- ***Analyse Série 2 exercices 4 à 7 + Série 3***
- ***Notions élémentaires p. 17 ex 26 à 29***

Nous allons maintenant étudier des fonctions particulières : fonctions exponentielles, fonctions logarithmiques, fonctions polynomiales, fonctions rationnelles et fonctions trigonométriques.