Géométrie vectorielle et analytique plane

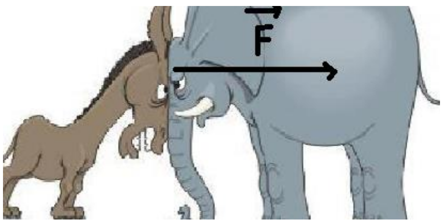
0. Introduction[1]

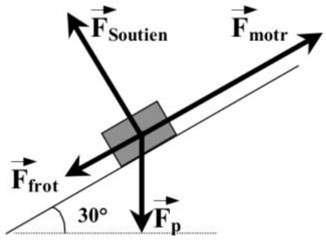
L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan ou de l'espace peuvent être représentés par des couples ou des triplets de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre : *Discours de la méthode.* Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : la **géométrie analytique**.

L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

Ce chapitre est étudié en deux dimensions en 2^e et en trois dimensions en 3^e.

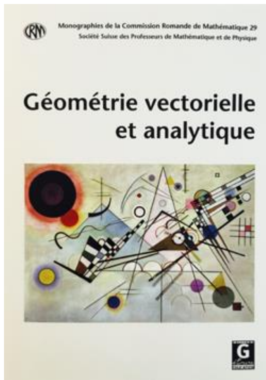
Des quantités comme l'aire, le volume, la longueur, la température et le temps n'ont qu'une intensité et peuvent être entièrement représentées par un nombre réel (accompagné de l'unité de mesure adéquate, comme $cm^2, m^3, cm, °, etc.$).
Une grandeur de ce type est une **grandeur scalaire** et le nombre réel correspondant est un **scalaire**. Des concepts tels que la vitesse ou la force ont à la fois une intensité, un sens et une direction et sont souvent représentés par un segment de droite **orienté**, c'est-à-dire un segment de droite avec une **direction** propre et un **sens**. On nomme aussi ce segment de droite orienté un **vecteur**.





Matériel :

- Ce polycopié
- Les séries : GVS1, GVS2, etc.
- Des feuilles quadrillées,
- Règle, crayon, gomme (pour les croquis)
- Calculatrice non PRO
- Table CRM (pour les épreuves)
- Géométrie vectorielle et analytique, CRM n°29 (facultatif)



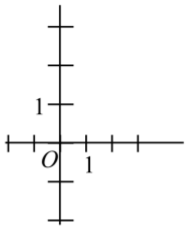
[1] CRM n°29, Géométrie vectorielle et analytique

1. Plan vectoriel

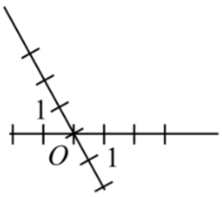
Définition :

Un ***repère orthonormé*** dans un **plan** est un système de **deux axes** perpendiculaires et la distance entre deux graduations successives, égale une unité de longueur. L'intersection des deux axes est prise comme origine.

Exemple :



Contre-exemple :

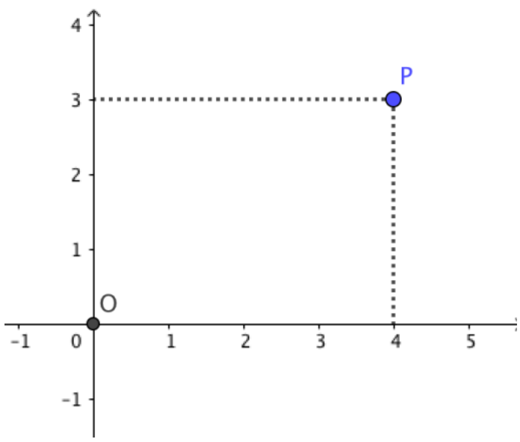


Ainsi, chaque point P de l'espace peut être représenté par un couple $(p_x; p_y)$ de deux nombres réels qui se nomment les coordonnées du point P. Réciproquement, à chaque couple de deux réels correspond un point de l'espace.

Il y a donc une correspondance bijective entre les points de l'espace et les couples de nombres réels. C'est pour cette raison que l'on parle souvent du plan $\mathbb{R}^2$.

Notations :

$$P = (p_x; p_y) \qquad P(p_x; p_y)$$
$$P = \langle p_x; p_y \rangle \qquad P\langle p_x; p_y \rangle$$



2. Vecteurs

Définition : Un **vecteur** est un objet mathématique caractérisé par :

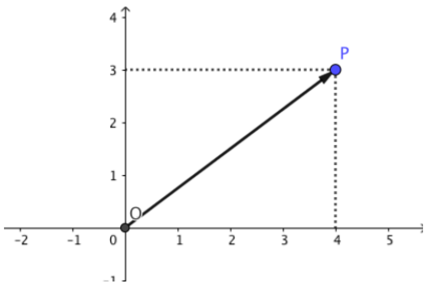
- Une direction
- Un sens
- Une norme

Il est pratique de le représenter graphiquement par une flèche.

Les vecteurs sont des objets très utilisés en physique, pour représenter des forces, des vitesses, des accélérations ; ils sont à différencier des scalaires (ou nombres réels), qui ont une norme, mais ni direction, ni sens.

Placé dans un repère orthonormé, tout point P de l'espace correspond à un vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$

Illustration :



Les coordonnées du point P sont respectivement les composantes du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$
Si $P = (4; 3)$ alors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

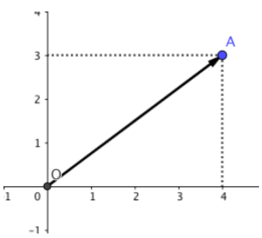
Le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, est appelé **vecteur nul**, et noté $\vec{0}$. Ainsi, le vecteur $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne possède pas de direction, et naturellement pas de sens.

Définition : La ***norme*** d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est par définition la longueur du segment OA. Elle s'écrit

$$\|\vec{a}\| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

où $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

Exemple : Calculer la norme du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



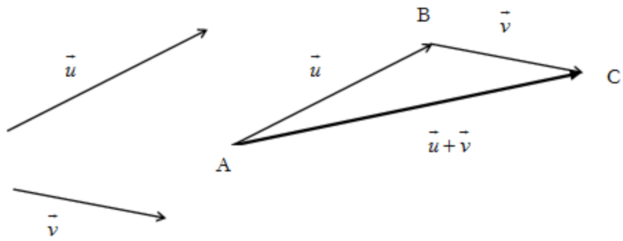
b. Sommes de deux vecteurs

Il existe deux opérations élémentaires que l'on peut définir sur les vecteurs. La première est l'addition (et par extension la soustraction) de deux vecteurs. Pour l'effectuer, il est possible d'utiliser la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme.

(a) **Relation de Chasles** :

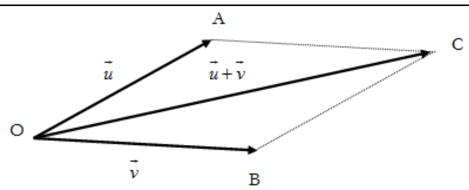
Soient A et C deux points. Pour tout point B, on a $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$

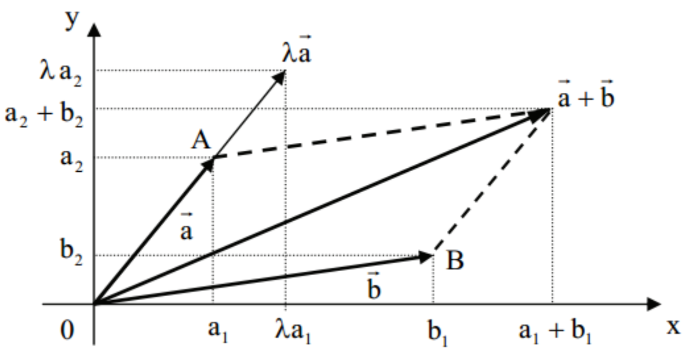
Illustration :
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
On veut calculer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$
Si A est un point quelconque,
On construit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



(b) **Règle du parallélogramme :**

Si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ *et* $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$ tel que $OACB$ est un parallélogramme.

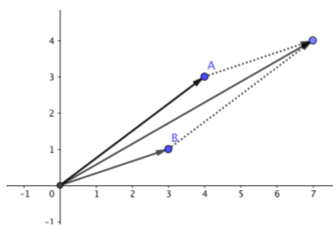




Définition : L'addition de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ est une opération interne. Elle est définie par :

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Exemple : Additionner les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Propriétés :
1) L'addition est commutative : $\vec{u}+\ \vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
2) L'addition est associative : $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

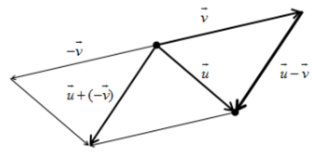
Exemple : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$

Soustraction :

Définition : Pour soustraire un vecteur, il suffit d'additionner un vecteur opposé.

Illustration :

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$



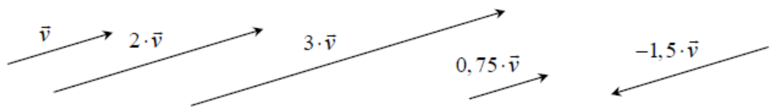
c. Multiple d'un vecteur

La deuxième opération de base est la multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)

Le produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire (nombre réel) λ se note $\lambda\cdot\vec{v}$ et est défini de la manière suivante :
Le vecteur $\boldsymbol{\lambda\vec{v}}$ est représenté par un segment orienté :

- de même direction que $\vec{v}$
- de longueur égale à $|\lambda|$ fois la longueur d'un représentant de $\vec{v}$. Donc $\|\lambda\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{v}\|$
- de même sens que $\vec{v}$, si λ est positif, de sens opposé si λ est négatif.

Illustration :



Définition : La **multiplication par un scalaire** est une *opération externe*. Elle est définie par :

$$\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\ \lambda a_2\end{pmatrix}$$

où $a_1, a_2\ et\ \lambda\in\mathbb{R}$

Remarque : Multiplier un vecteur par un scalaire revient à modifier sa norme, éventuellement son sens, mais ne modifie en aucun cas sa direction !

Propriétés :
1) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$
2) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

Que peut-on trouver dans la CRM ?

Opérations avec les composantes

Si $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, alors	Si $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$, alors
$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$	$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$
$\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\end{pmatrix}$	$\lambda\vec{a}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$

4. Bases

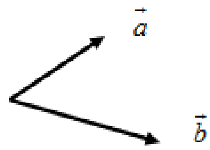
<u>Définition :</u> Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel, autrement dit :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ il existe un nombre λ tel que $\lambda \cdot \vec{v} = \vec{u}$

Illustration :

Les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont linéairement dépendants car $2\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$

Les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont linéairement indépendants car $\vec{0} = 0\vec{a} + 0\vec{b}$



Exemple : Est-ce que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -13 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ?

Remarques :

- Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs sont **linéairement dépendants** si et seulement s'ils sont colinéaires.

<u>Notation :</u> L'ensemble des vecteurs du plan est appelé plan vectoriel et est noté V_2.

<u>Définition :</u> **Une base de V_2** est un couple de vecteurs linéairement indépendants.

Autrement dit :

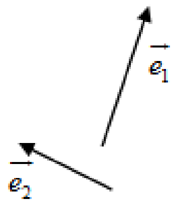
On appelle base du plan, n'importe quel couple de vecteurs non colinéaires.

Exemple : Est-ce que $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ forment une base de V_2 ?

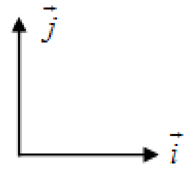
Remarque :

Pour une base, on utilise la lettre e, munie d'un indice pour différencier les deux vecteurs, ou alors les lettre i et j:

Exemple 1 : base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$



Exemple 2 : base $(\vec{i};\vec{j})$



La base $(\vec{i};\vec{j})$ est dite orthonormée car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs perpendiculaires (ou orthogonaux, le préfixe ortho- venant du grec *ortos*, *« droit »*) et de longueur unitaire (*normé* = de longueur 1).

L'emploi du terme ***base*** - au sens "sur quoi tout repose" ou "sur quoi tout se construit" - s'explique par la propriété donnée ci-dessous :

> **Propriété :**
> Si $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2, alors tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 est une **combinaison linéaire unique** de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$: il existe un et un seul couple $(\alpha;\beta)$ de nombres réels tels que $\boldsymbol{\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Base orthonormée

On note $\|\vec{a}\|$ la norme d'un vecteur $\vec{a}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, on note $\vec{a}\perp\vec{b}$

Dans le plan	**Dans l'espace**
$(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une *base orthonormée* si	$(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une *base orthonormée* si
$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$	$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2$, $\vec{e}_1\perp\vec{e}_3$, $\vec{e}_2\perp\vec{e}_3$

a. Composantes d'un vecteur

Soit $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2. Tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 s'écrit de manière unique sous la forme : $\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}$; on note alors $\vec{v} = \binom{\alpha}{\beta}$.

α et β sont les composantes de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$. Les composantes dépendent de la base et seront différentes si celle-ci change.

b. Opérations sur les composantes

Soit une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1};\vec{e_2})$ de V_2, un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés par leurs composantes relativement à la base $\mathcal{B}$: $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$, $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$

On a :

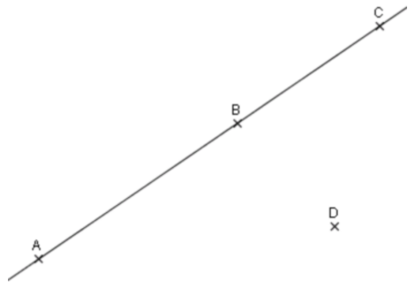
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{u}+\vec{v} &= \begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\end{pmatrix}\\ \lambda\vec{u} &= \begin{pmatrix}\lambda u_1\\ \lambda u_2\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

5. Droites

Définition : Trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Illustration :



Exemple : Les points $A(-1;8), B(4;5)$ *et* $C(2;-7)$ *sont-ils alignés ?*

Définitions : Soit deux points distincts A et B

La droite (AB) est l'ensemble des points M du plan π alignés avec A et B :

$$(AB) = \{M | \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}$$

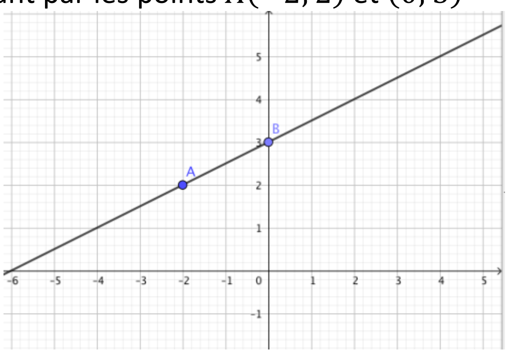
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB)

Soit un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul

La droite passant par A et de direction $\vec{d}$, notée $(A;\ \vec{d})$, est l'ensemble des points M du plan π tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires:

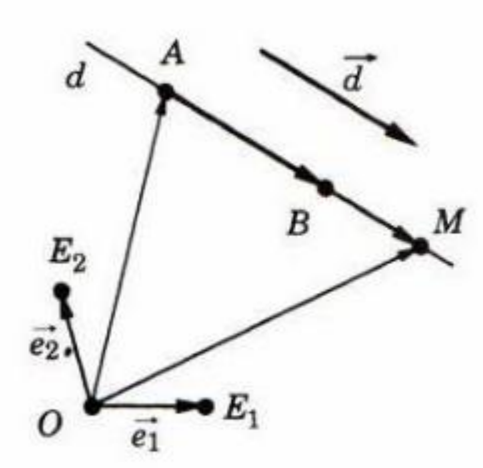
$$(A;\vec{d}) = \{M | \overrightarrow{AM} = k\vec{d}\ k \in \mathbb{R}\}$$

Exemple : La droite d passant par les points $A(-2;2)$ et $(0;3)$



Equations paramétriques

Le plan π est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$
Soit la droite d passant par le point $A(a_1; a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$.
Si $d_1 \neq 0$, le rapport $m = \frac{d_2}{d_1}$ est appelé **pente** (ou **coefficient directeur**) de la droite d
Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$, elle a pour **vecteur directeur** $\vec{\boldsymbol{d}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}$
Si $b_1 \neq a_1$, **la pente de** $\boldsymbol{d}$ **est** $\boldsymbol{m} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$



Equations paramétriques de la droite $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{A}; \vec{\boldsymbol{d}})$

Pour tout point $M(x; y)$ de la droite d, on a:

$$d: \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d: \begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple : Déterminer la droite d de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{3}{-1}$ et passant par le point $P(2; 4)$.

Equations cartésiennes

Une droite d est l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient une équation du type

$$\boxed{ax + by + c = 0, \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$$

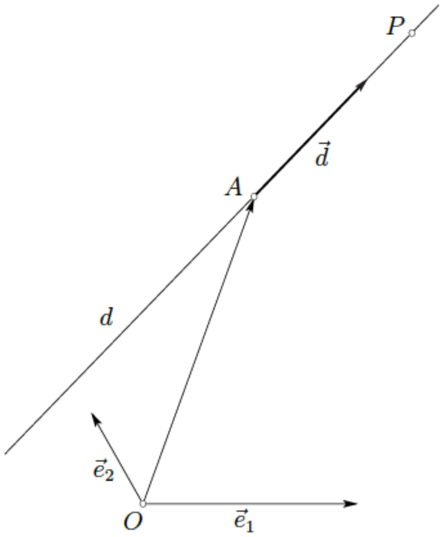
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.
Cette droite a pour **vecteur directeur** $\vec{d} = \binom{-b}{a}$
et si $b \neq 0$, pour **pente** : $m = -\frac{a}{b}$

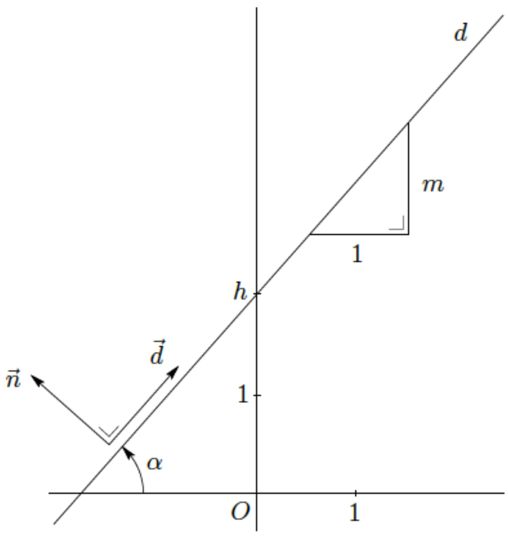
Exemple : Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(1; 2)$ et $B(2; -1)$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Droite

On note d une droite passant par le point $A(a_1;a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.





Un point $P(x;y)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Équations paramétriques $\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Équation cartésienne $ax + by + c = 0$

Autres formes $y = mx + h$

$$\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2}$$

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Les vecteurs $\vec{n}=\begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à la droite d. ①

Le nombre $m = \dfrac{d_2}{d_1} = -\dfrac{a}{b}$ est la pente de la droite d.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite d.

L'angle α est l'*angle directeur* de la droite d. On a $\tan(\alpha) = m$. ①

Le nombre h est l'*ordonnée à l'origine* de la droite d.

b. Positions relatives de deux droites

Remarque : On appellera ici **droites parallèles** deux droites ayant même direction. Elles peuvent être parallèles au sens strict (sans point commun) ou confondues.

Critère de parallélisme

Soit $d_1 = (AB)$ et $d_2 = (CD)$ deux droites, de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{CD}$

Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont colinéaires

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles :

- Elles sont confondues si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$
- Elles sont strictement parallèles si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ n'est pas colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$

Exemple : La droite $d_1 : \binom{x}{y} = \binom{1}{2} + k\binom{-1}{4}$, où $k \in \mathbb{R}$ et la droite
$d_2 : \binom{x}{y} = \binom{3}{5} + t\binom{2}{-8}$, où $t \in \mathbb{R}$ sont parallèles

Position relative de deux droites données par leurs équations cartésiennes

Soit d_1 et d_2 deux droites données par leurs équations cartésiennes

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad et \quad d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles si et seulement s'il existe un nombre réel k tel $(a_2; b_2) = (ka_1; kb_1)$

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles :

- Elles sont confondues si et seulement si le facteur de proportionnalité k est tel que $c_2 = kc_1$; on a donc $(a_2; b_2; c_2) = (ka_1; kb_1; kc_1)$
- Elles sont strictement parallèles si et seulement si le facteur de proportionnalité k est tel que $c_2 \neq kc_1$

Les droites d_1 et d_2 sont sécantes si et seulement s'il n'existe aucun nombre réel k tel que $(a_2; b_2) = (ka_1; kb_1)$

Exemple : $2x - 3y + 4 = 0 \; et - 4x + 6y + 2 = 0$ sont-elles parallèles ou confondues ?

7. Points particuliers

Distance entre deux points

Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, soit les points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$. On a :

$$\delta(A; B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Exemple : Déterminer la distance entre les points $A(1; 4)$ et $B(2; -3)$

Milieu d'un segment

M est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow M\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Exemple : On donne les points $A(-1; 8), B(4; 5)$

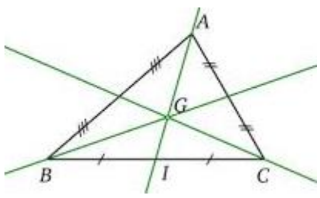
Calculer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

Centre de gravité d'un triangle :

G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$

Exemple : *On donne les points $A(-1; 8), B(4; 5)$ et $C(2; -7)$*

Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC



9. Cercle

a. Equation d'un cercle

Le cercle Γ de centre $C(\alpha;\beta)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

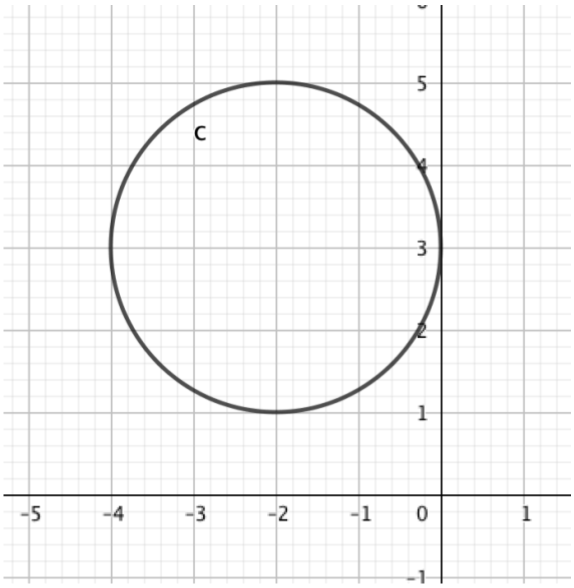
Cette relation est appelée équation cartésienne (canonique) du cercle Γ.

L'équation générale d'un cercle est de la forme :

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0, a \neq 0$$

Exemple : Le cercle ci-dessous est donné par l'équation : $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

De centre : (-2 ;3) et de rayon 2



Exercice : Déterminer l'équation du cercle centré en $P(1;2)$ et de rayon 3.

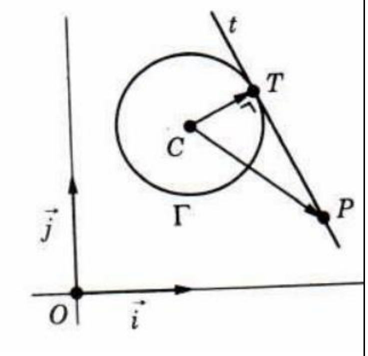
c. Tangente à un cercle

Soit T un point du cercle Γ de centre C et de rayon r. Si P est un point quelconque du plan et si t désigne la tangente au cercle en T, on a:

$$P \in t \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TP}} = 0$$

ainsi que:

$$P \in t \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \mathrm{r}^2$$



La tangente en un point $T(x_0; y_0)$ du cercle Γ de centre $C(\alpha; \beta)$ et de rayon r a pour équation cartésienne:

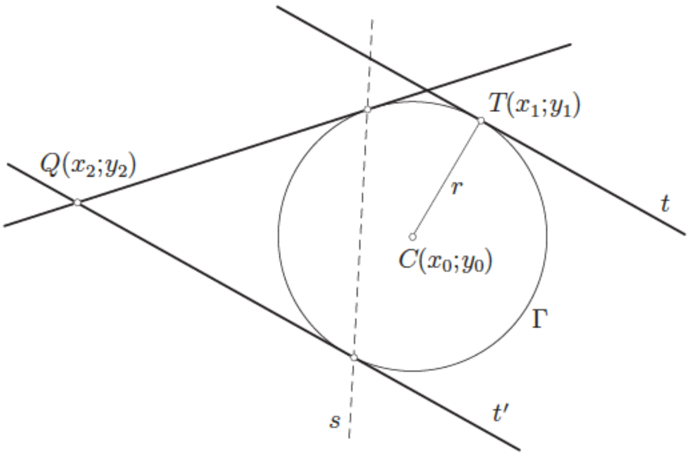
$$(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) - r^2 = 0$$

Si le cercle est donné par l'équation $ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ l'équation de la tangente s'écrit : $ax_0 + ay_0 + d(x_0 + x) + e(y_0 + y) + f = 0$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Cercle

On note $P(x\,;y)$ un point et Γ un cercle de centre $C(x_0\,;y_0)$ et de rayon r.



Équation du cercle

$P \in \Gamma \quad \Leftrightarrow \quad \|\overrightarrow{CP}\| = r \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Tangente en un point T

$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$

$P \in t \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$

Tangentes de pente m

$P \in t$ ou $P \in t' \quad \Leftrightarrow \quad y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

Polaire d'un point Q

$P \in s \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_2 - x_0)(x - x_0) + (y_2 - y_0)(y - y_0) = r^2$

Puissance d'un point Q

$\|\overrightarrow{CQ}\|^2 - r^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 - r^2$

10. Produit scalaire

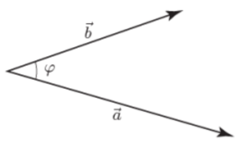
Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Propriétés

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lVert\vec{a}\rVert \, \lVert\vec{b}\rVert \cos(\varphi)$	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	



a. Norme

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Norme d'un vecteur

$\lVert\vec{a}\rVert = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors $\lVert\vec{a}\rVert = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, alors $\lVert\vec{a}\rVert = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

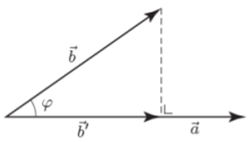
$\lVert\lambda\vec{a}\rVert = \lvert\lambda\rvert \, \lVert\vec{a}\rVert$	$\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert \leq \lVert\vec{a}\rVert \, \lVert\vec{b}\rVert$
$\lVert\vec{a} + \vec{b}\rVert \leq \lVert\vec{a}\rVert + \lVert\vec{b}\rVert$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\lVert\vec{a}\rVert^2 + \lVert\vec{b}\rVert^2 - \lVert\vec{a} - \vec{b}\rVert^2)$

b. Angle entre deux vecteurs

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

On note $\vec{b}'$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.



$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert^2} \vec{a}$	$\lVert\vec{b}'\rVert = \frac{\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert}{\lVert\vec{a}\rVert}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}'$

Angle de deux vecteurs

On note φ l'angle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $(0 \leq \varphi \leq 180°)$.

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert \, \lVert\vec{b}\rVert}}$$

Table des matières