

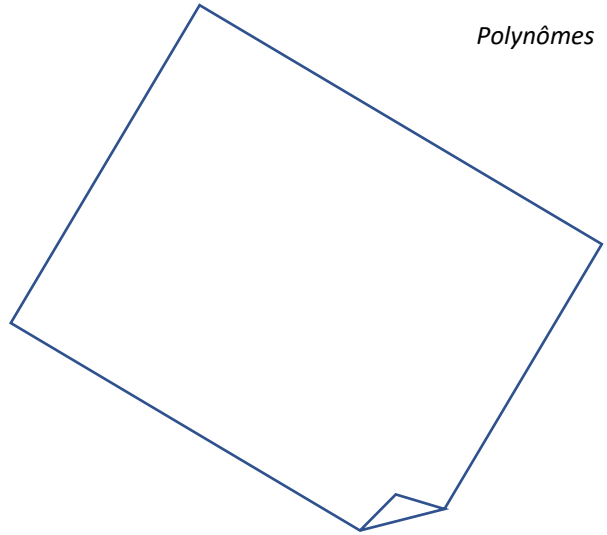
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

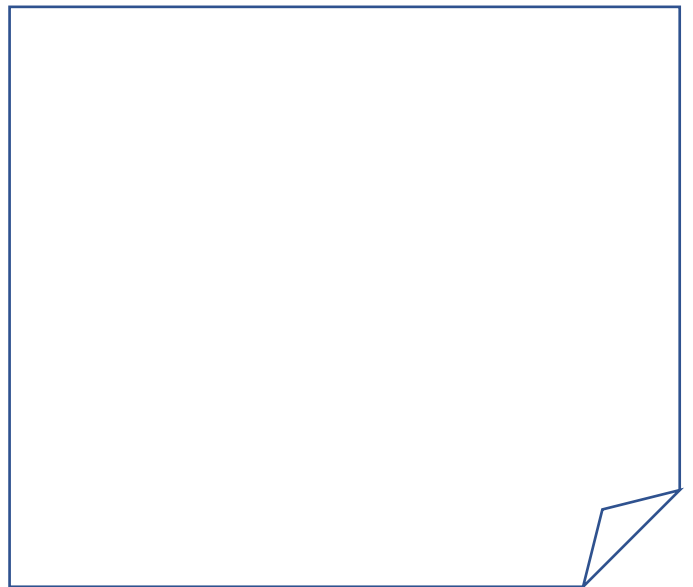
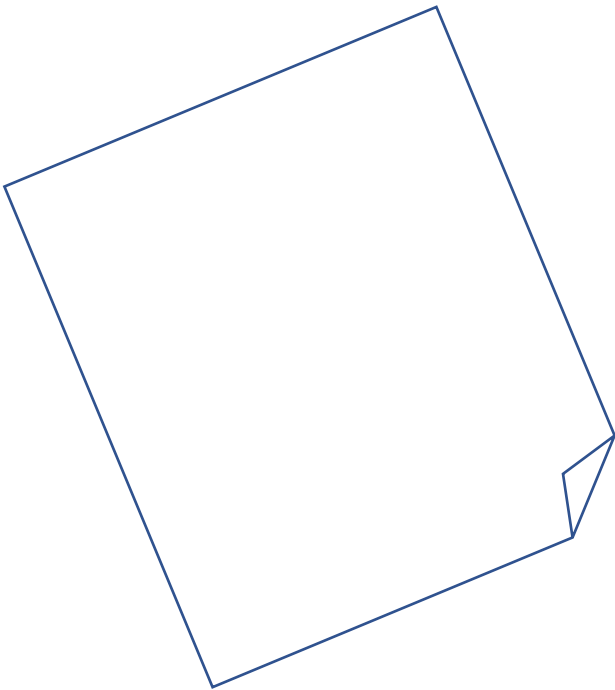
$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$a^2 + b^2$ n'est pas factorisable



Algèbre



Algèbre : les polynômes

0. Matériel :

- Ce polycopié
- Les séries « Algèbre Série ... » (PS1, PS2, etc.)
- Une calculatrice
- Une table CRM (pour les épreuves)
- Notions élémentaires (pour le cours et exercices)
- Feuilles quadrillées ou cahier (pour les exercices)



1. Introduction¹ :

Le mot **algèbre** vient du mot **ilm al-jabr w'al muqabala**, titre d'un livre écrit au IX^e siècle par le mathématicien arabe al-Khwozimi. On a traduit ce titre comme la science de la restitution et de la réduction, ce qui signifie la transposition et la combinaison de termes semblables (d'une équation). L'expression al-jabr a conduit au nom de la branche des mathématiques que nous appelons algèbre.

En algèbre, nous utilisons des symboles ou lettres – tels a, b, c, d, x, y – pour désigner des nombres arbitraires. Cette caractéristique générale de l'algèbre est illustrée par de nombreuses formules employées dans les disciplines scientifiques et techniques. A mesure que vous progresserez dans ce polycopié et que vous suivrez des cours plus avancés en mathématiques ou que vous vous dirigerez vers des domaines qui les emploient, vous vous rendrez compte de l'importance et de la puissance de l'algèbre.

ALGÈBRE n. f. « arabe *al gabr* « la réduction », d'abord « calcul avec les chiffres arabes, arithmétique ») 1 Ensemble d'opérations, de résolutions d'équations avec substitution de lettres aux valeurs numériques et de la formule générale au calcul numérique particulier ; par ext. étude des structures abstraites définies sur des ensembles et des lois de composition. « L'algèbre est une langue bien faite et c'est la seule » (Condillac). - Algèbre de Boole, application de l'algèbre aux relations logiques. ♦ Ouvrage traitant de cette science. 2 Chose difficile à comprendre, domaine inaccessible à l'esprit. C'est de l'algèbre pour moi. ⇒ chinois, hébreu.

Le Robert pour tous, 1994

¹ Algèbre de E.W. Swokowski et J.A. Cole

2. Motivation : Pourquoi étudier les polynômes ?

Évaluer un polynôme en un point est simple, puisqu'il ne faut faire que des additions et multiplications. Ce sont des fonctions qui ne sont ni trop simples ni trop compliquées à étudier. Les polynômes interviennent naturellement dans de nombreux problèmes. De plus, on montre que toute fonction "continue" peut être approchée par un polynôme.

Exemple : $p(x) = 2x^2 + 3x$ à évaluer en 4 : $p(4) = 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 = 44$

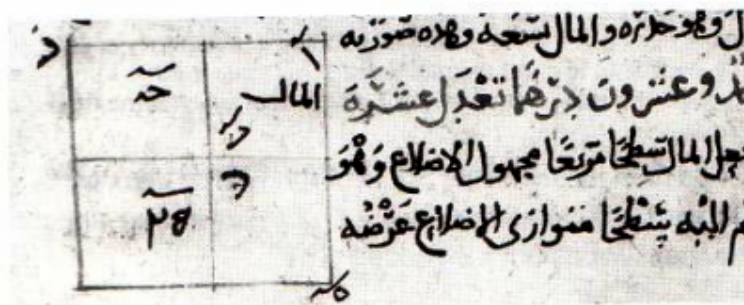
3. Un peu d'histoire²

L'algèbre est un héritage culturel de l'Antiquité grecque et orientale. Le célèbre ouvrage *Al-jabr w'al muqâbala* a été écrit vers 830 par Mohammed ben Musa Al-Khwarism³i.

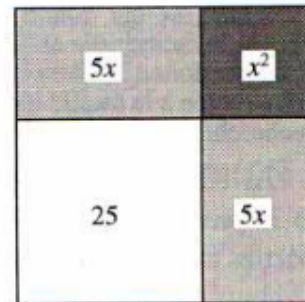
Il commence par la solution de l'équation quadratique suivante :

$$x^2 + 10x = 39$$

Une équation de ce type contient l'inconnue x , appelée par les arabes *dshidr* (racine), mot qui signifiait originellement le côté du carré d'aire donnée.



Manuscrit de 1342



Dessin moderne

Solution :

A-Khwarismi dessine un carré de côté x pour représenter x^2 et deux rectangles de côté 5 pour les $10x$. L'équation qui nous intéresse ici montre que l'aire hachurée de la figure ci-dessus est 39; par conséquent, l'aire du carré entier est $39 + 25 = 64 = 8^2$, donc $5 + x = 8$ et $x = 3$.

² L'analyse au fil de l'histoire, E. Hairer et G. Wanner, Université de Genève

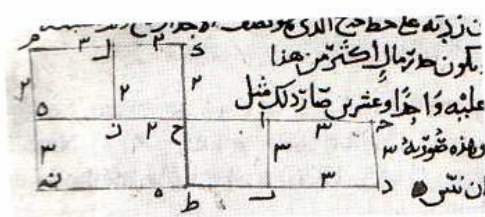
³ Les mots "algèbre" et "algorithmes" dérivent de Al-jabr et Al-Khowârizmî.

Une deuxième équation considérée par Al-Khwarismi :

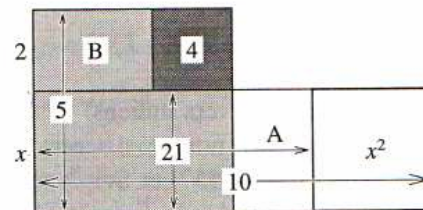
$$x^2 + 21 = 10x$$

Solution :

Dessiner un carré x^2 , auquel on adjoint un rectangle de largeur x et d'aire 21 (voir figure ci-dessous)



Manuscrit de 1342



Dessin moderne

Par la figure ci-dessus, la figure totale est de longueur 10.

Elle est coupée en son milieu et le petit rectangle (A), compris entre x^2 et la bissectrice, est tourné et placé en haut à gauche (B). Cela donne une figure de hauteur 5.

L'aire en gris clair est donc 21 et il manque $4 = 2^2$ pour compléter le carré $5^2 = 25$.

Nous avons donc $x = 5 - 2 = 3$.

Avec une figure similaire, Al-Khwarismi trouve aussi la deuxième solution $x = 7$.

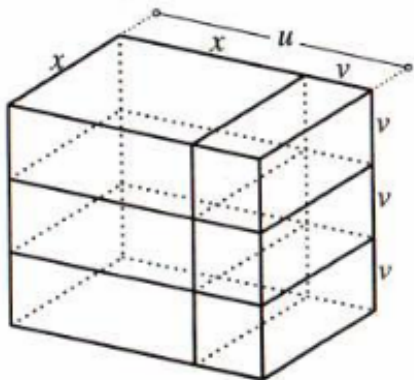
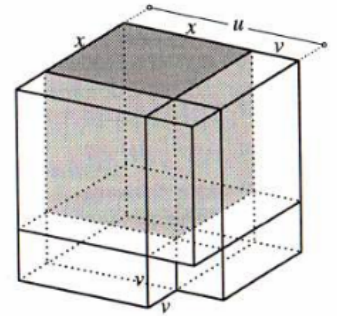


Passons ensuite à la recherche de solution pour une **équation de degré trois** :

Nicòlò Tartaglia (1499-1557) et Scipione dal Ferro (1465-1526) trouvent la méthode de résolution ; ils la gardent secrète dans le but de gagner des concours. Sous pression et attiré par de fausses promesses, Tartaglia la cède à Jérôme Cardan (1501-1576) camouflé dans des vers et sans démonstration. Cardan reconstruit la démarche avec beaucoup de peine et la publie en 1545.

Démarche de résolution pour l'équation : $x^3 + 6x = 20$

Nous représentons x^3 par un cube de côté x (par quoi sinon ? de couleur grise dans la figure ci-contre); puis le terme $6x$ est introduit, sous la forme de trois parallélépipèdes rectangles de volume x^2v et de trois autres de volume xv^2 (blancs dans la figure ci-contre). Cela donne un corps de volume 20 qui n'est autre qu'un cube u^3 dont on a retranché un petit cube v^3 , c'est-à-dire : $u^3 - v^3 = 20$ où $u = x + v$



Si l'on dispose les six parallélépipèdes complémentaires comme sur la figure ci-contre, on voit que leur volume est $6x$ (valeur désirée) si

$$3uvx = 6x \text{ ou } uv = 2$$

Nous connaissons alors la somme (=20) et le produit (= -8) de u^3 et $-v^3$ et, à l'aide du puzzle d'Al-Khwarismi, nous pouvons reconstruire les grandeurs :

$$u^3 = 10 + \sqrt{108} \quad -v^3 = 10 - \sqrt{108}$$

et, par $x = u - v$, nous avons finalement

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Quelques années plus tard, une méthode permettant de résoudre les équations de degré quatre est trouvée (Ludovico Ferrari); l'équation de degré cinq demeure encore un mystère pendant des siècles jusqu'à la preuve de l'impossibilité de sa solution par radicaux, donnée par Abel en 1826.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir quelques techniques pour déterminer les solutions entières et fractionnelles des équations de degré n . Avant cela, il nous faut faire quelques rappels sur les polynômes.

4. Rappel sur les polynômes

Définition : On appelle **polynôme à coefficients réels** une fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

où $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont des nombres réels et $a_n \neq 0$.

Exemple : $P(x) = 3x^4 + 5x - 2$

- L'entier n est appelé le **degré** du polynôme. $n \geq 0$.
La seule exception est le polynôme nul : $P(x) = 0$
- Les nombres $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$ et a_0 sont appelés les **coefficients** du polynôme.
- a_0 est appelé le terme constant. C'est la valeur que prend le polynôme quand on l'évalue en zéro. $P(0) = a_0$
- a_n est appelé le coefficient dominant. C'est le coefficient qui multiplie la plus grande puissance de x .

- Question : pourquoi précise-t-on $a_n \neq 0$?
- Question : Que se passe-t-il si tous les coefficients sont nuls ?

Exemple 1 : Donner un polynôme de degré 3 : $P(x) =$

Ses coefficients sont : $a_3 =$ $a_2 =$ $a_1 =$ $a_0 =$

Le terme constant vaut :

Le coefficient dominant vaut :

Si on remplace x par une autre lettre, toutes les occurrences de x sont remplacées par cette autre lettre :

$$P(t) = \qquad \qquad \qquad P(\odot) =$$

$$P(y) = \qquad \qquad \qquad P(3) =$$

Ici, on sous-entend que t, y et \odot sont des nombres, même si on ne connaît pas leur valeur.

Exemple 2 : Voici un polynôme de degré 4 : $P(x) = 17x^4 - 24x^3 + 14x^2 + 13x - 36$

on a : $a_4 = 17, a_3 = -24; a_2 = 14, a_1 = 13$ et $a_0 = -36$

Le terme constant égale -36 et le coefficient dominant égale 17.

5. Opérations sur les polynômes

Puisque les polynômes sont des fonctions réelles, on peut additionner, soustraire, multiplier, diviser et composer des polynômes entre deux⁴.

Prenons deux polynômes : $A(x) = 3x^2 - 8x + 4$ et $B(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 2$

Définition de la **somme⁵ de deux polynômes** :

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x)$$

Calculons avec l'exemple : $(A + B)(x) =$

On obtient un nouveau polynôme $A + B$ dont le degré est :

Définition de la **différence de deux polynômes** :

$$(A - B)(x) = A(x) - B(x)$$

Exemple : $(A - B)(x) =$

On obtient un nouveau polynôme $A - B$, dont le degré est :

Définition du **produit d'un polynôme avec un nombre réel λ** :

$$(\lambda \cdot A)(x) = \lambda \cdot A(x)$$

Exemples : $-3 \cdot A(x) =$

$$\frac{1}{2} \cdot B(x) =$$

On obtient de nouveaux polynômes, dont les degrés sont :

$$\text{degré}(-3A) = \quad \text{et } \text{degré}\left(\frac{1}{2}B\right) =$$

Définition du **produit de deux polynômes** :

$$(A \cdot B)(x) = A(x) \cdot B(x)$$

Exemple : $(A \cdot B) =$

On obtient un nouveau polynôme $A \cdot B$, dont le degré est :

Cas général :

Soient deux polynômes A et B respectivement de degré m et n , définis par :

$$A(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_m \neq 0$$

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0, b_n \neq 0$$

La somme, la différence et le produit de polynôme sont encore des polynômes. Sans effectuer les calculs, on peut connaître à l'avance le degré de ces derniers :

- $\text{degré}(A + B) \leq \max(m; n)$; il y a toujours égalité, sauf si $m = n$ et $a_m + b_n = 0$
- $\text{degré}(A - B) \leq \max(m; n)$, il y a toujours égalité, sauf si $m = n$ et $a_n - b_n = 0$
- $\text{degré}(k \cdot A) = m$, où $k \in \mathbb{R}^*$ est une constante non nulle
- $\text{degré}(A \cdot B) = m + n$

ÇA RESSEMBLE BEAUCOUP À CE QU'ON AVAIT DANS LE CHAPITRE SUR LES FONCTIONS.



⁴ Voir Brochure du Collège Voltaire sur le calcul littéral, §1

⁵ Voir Brochure du Collège Voltaire, §3.

6. Rappel de vocabulaire : racines d'un polynôme

Définitions :

- Un nombre x_0 tel que $P(x_0) = 0$ s'appelle **une racine** ou **un zéro** du polynôme.
- L'ensemble des zéros d'un polynôme est noté **Zéros(P)** ou **Z_P**

Remarque :

Si le polynôme est représenté par la lettre Q , on notera $Zéros(Q)$ l'ensemble de ses zéros.

Exemple :

2 est une racine de $P(x) = x^2 - 4$ mais 3 n'en est pas une, car :

- $P(2) =$
- $P(3) =$

Question :

Est-ce que -2 est une racine de $P(x) = 2x^2 - 8$?

**Que peut-on trouver dans la table CRM ?****Polynôme de degré n**

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (c_n \neq 0)$$

Les *zéros* du polynôme P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

Pour les polynômes de degré supérieur à 2, les zéros sont généralement estimés par des méthodes numériques (voir page 97).

Plusieurs cas particuliers de polynômes ont déjà été étudiés en première année et même au cycle.

Les polynômes de degré 1 :

Les **polynômes de degré 1** sont les **applications affines** $P(x) = ax + b$, $a \neq 0$

L'équation $P(x) = 0$ s'écrit $ax + b = 0$ et admet une unique solution qui est $x = -b/a$

L'ensemble des zéros de ce polynôme ne contient qu'un seul nombre : $Zéros(P) = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

Exemple : $P(x) = 2x + 4$ $Z_P =$

Les polynômes de degrés plus petits que 1 :

Les polynômes de degré <1 sont les polynômes de degré 0 ou $-\infty$. Ce sont des fonctions constantes.

Les polynômes de degré 0 sont de la forme $P(x) = a, a \neq 0$. Ils ne s'annulent jamais,
 $Zéros(P) = \emptyset$

Exemple : $P(x) = 3$ est de degré zéro

Le polynôme de degré $-\infty$ est de la forme $P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Puisqu'il est toujours nul :
 $Zéros(P) = \mathbb{R}$

Les polynômes de degrés plus grands que 1 :

Les polynômes de degré 3 et 4 ont été vus plusieurs fois lors d'exercices de factorisation. Ces factorisations permettaient de déterminer les zéros de ces polynômes. Dans la suite, on s'intéressera particulièrement à la factorisation de polynômes et à la recherche de leurs zéros.

Exemples :

a) $P(x) = (x - 3)^4$ est de degré et $Z_P =$

b) $P(x) = 2x(x - 1)$ est de degré Et $Z_P =$

c) $P(x) = x^4 - 1$ est de degré Et $Z_P =$



➤ **Polynômes Série 1**

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Polynômes

Polynôme du deuxième degré à coefficients réels

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

Les zéros du polynôme P sont les solutions de l'équation du deuxième degré $P(x) = 0$

Zéros et factorisation

L'expression $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* de P .

Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux zéros réels

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et on a l'identité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet un seul zéro réel

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

et on a l'identité

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet pas de zéro réel et n'est pas décomposable en un produit de polynômes du premier degré à coefficients réels.

P admet cependant deux zéros complexes conjugués $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$



Relations de Viète

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Polynôme de degré n

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0 \quad (c_n \neq 0)$$

Les zéros du polynôme P sont les solutions de l'équation $P(x) = 0$

Pour les polynômes de degré supérieur à 2, les zéros sont généralement estimés par des méthodes numériques (voir page 97).

7. Divisions euclidiennes de polynômes⁶

Nous allons voir qu'un polynôme peut être divisé par un autre, de façon similaire à la division d'un nombre entier par un autre.

Rappel : Divisons 483 par 5, avec un reste et un dividende entier.

Suite à cette division, on peut en conclure que : $483 = 5 \cdot \quad +$

Vocabulaire :

$P = 483$ est le **dividende**, $D = 5$ est le **diviseur**, $Q = 96$ est le **quotient** et $R = 3$ est le **reste**.

Propriété importante :

$$P = D \cdot Q + R, \text{ avec } 0 \leq R < D$$

Imitons ce procédé de division pour des polynômes :

Divisons $P(x) = 5x^2 - 7x + 4$ par $D(x) = x - 2$

Suite à cette division, on peut en conclure que :

$$5x^2 - 7x + 4 = (x - 2)(5x + 3) + 10$$

$P(x) = 5x^2 - 7x + 4$ est le **dividende**, $D(x) = x - 2$ est le **diviseur**, $Q(x) = 5x + 3$ est le **quotient** et $R(x) = 10$ est le **reste**

Prenons un autre exemple :

Diviser le polynôme $A(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 7$ par le polynôme $B(x) = x^2 - x + 3$

⁶ Voir aussi Notions élémentaires p.72

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 + 2x + 7 & x^2 - x + 3 \\
 \hline
 &
 \end{array}$$

Suite à cette division, on peut en conclure que :

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 7 = (x^2 - x + 3)(\quad) +$$

De façon générale :

Soient P et D sont deux polynômes, avec $\text{degré}(P) \geq \text{degré}(D)$,

Alors, il existe deux polynômes Q et R avec $\text{degré}(R) < \text{degré}(D)$ tels que :

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Les polynômes Q et R s'obtiennent par division polynômiale.

Définition : Si le reste R de la division de P par D est nul, c'est-à-dire si $R(x) = 0$, alors on dit que le polynôme P est **divisible** par le polynôme D . Dans ce cas, on a : $P(x) = D(x) \cdot Q(x)$

En résumé nous avons :

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) & D(x) \\
 \hline
 R(x) & Q(x)
 \end{array}
 \quad \text{où } P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ et } \text{degré}(R) < \text{degré}(D)$$

Le polynôme P est **divisible par** le polynôme D si le reste R est nul, c.-à-d. si $R(x) = 0$.

Exercice : Est-ce que le polynôme $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ est divisible par $x + 1$?

➤ **Polynômes Série 2 Exercice 1**

➤ **Notions élémentaires p.82 exercice 21**

Théorème : Soit P un polynôme et soit $a \in \mathbb{R}$

$$P(x) \text{ est divisible par } (x - a) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Dans ce cas, on dit que a est une racine du polynôme P

*Preuve*⁷:

\Rightarrow Si $P(x)$ est divisible par $(x - x_0)$, cela signifie que le reste est nul, et donc que $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$
Donc $P(x_0) = (x_0 - x_0) \cdot Q(x_0) = 0 \cdot Q(x_0) = 0$. Ceci montre une partie du théorème.

\Leftarrow Si $P(x_0) = 0$.

Divisons $P(x)$ par $(x - x_0)$: $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + R(x)$ avec $\text{degré}(R) < \text{degré}(x - x_0) = 1$

Donc le polynôme R est un polynôme constant. $R(x) = k = \text{constante}$.

Donc $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) + k$.

En évaluant les polynômes en x_0 , on trouve que : $0 = P(x_0) = \underbrace{(x_0 - x_0)}_{=0} \cdot Q(x_0) + k$, ce qui signifie que

la constante k est nulle. Ainsi $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$ et P est bien divisible par $(x - x_0)$. CQFD.

Attention: $P(x)$ et $(x - a)$ représentent deux polynômes, a et $P(a)$ représentent deux nombres !

Conséquence : Si l'on connaît une racine a du polynôme P ,
alors on peut le factoriser en effectuant la division :
 $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, où $\text{degré}(Q) = \text{degré}(P) - 1$



Exercice:

Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 - 7x + 6$ en observant que $P(1) = 0$

➤ **Polynômes Série 2**

➤ **Notions élémentaires p.80-83 exercices 4 à 7 & 9-10 & 12 à 20 & 22 à 30**

⁷ de Bernard Gisin, Collège Claparède

8. Schéma de Horner⁸

Pour diviser un polynôme $p(x)$ par le binôme $x - a$, il suffit d'appliquer le schéma de Horner.

Commençons par effectuer la division de $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2$ par $x - 3$:

Cette même division peut être effectuée de la manière ci-dessous :

	1	-3	2	-1	2
3					

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du polynôme. Le 3 de la deuxième ligne du tableau est le zéro de $x - 3$.

Construisons le tableau depuis la colonne du coefficient du plus grand degré.

1	-3	2	-1	2	
	⊕	⊕	⊕	⊕	
1	3	0	6	15	
	0	2	5	17	Ⓟ

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $x^3 + 2x + 5$ et le reste est 17.
On peut donc écrire : $p(x) = (x - 3)(x^3 + 2x + 5) + 17$

Avantage : méthode plus rapide que la division

Désavantage : on oublie vite dans quel sens utiliser cette méthode !

⁸ (Notions élémentaires p. 73)

Problème : Factoriser : $p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$

On trouve rapidement que $p(-1) = 0$, donc :

$$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = (x + 1) \cdot (\quad)$$

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}{x + 1} =$$

$3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$	$x + 1$
------------------------	---------

Ou Horner :

Idée : factoriser le degré 2 avec une formule :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Factorisation :

$$p(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 =$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Divisibilité de $P(x)$ par $x - a$

Pour tout nombre réel a , il existe un polynôme Q défini par l'identité $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$

$$P(x) \text{ est divisible par } x - a \Leftrightarrow P(a) = 0$$

Le schéma de Horner est un algorithme qui permet de déterminer les coefficients du polynôme Q et la valeur $P(a)$:

$c_n \quad c_{n-1} \quad c_{n-2} \quad \dots \quad c_2 \quad c_1 \quad c_0$	avec	$\begin{cases} d_{n-1} = c_n \\ d_{i-1} = c_i + ad_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ P(a) = c_0 + ad_0 \end{cases}$
$\underbrace{d_{n-1} \quad d_{n-2} \quad d_{n-3} \quad \dots \quad d_1 \quad d_0}_{\text{coefficients de } Q} \quad P(a)$		

Relations de Viète

Si $P(x) = c_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$, alors x_1, x_2, \dots, x_n sont les zéros de P et

$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{c_{n-1}}{c_n}$	$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{c_0}{c_n}$
--	--

➤ Polynômes Série 2

➤ Notions élémentaires p.81 exercice 11 à 13

9. Racines rationnelles

BUT : Nous allons voir sur un exemple comment trouver toutes les racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers.

Exemple sur le polynôme : $B(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$

Supposons que $\frac{p}{q} \in \mathbb{R}$ soit une racine rationnelle du polynôme B , c'est-à-dire que $B\left(\frac{p}{q}\right) = 0$.

On peut s'arranger pour que q soit positif et pour que p et q n'aient pas de facteurs communs (fraction simplifiée).

Donc :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 5\left(\frac{p}{q}\right) - 15 = 0$$

Donc :

$$\frac{p^3}{q^3} - 3 \cdot \frac{p^2}{q^2} + 5 \cdot \frac{p}{q} - 15 = 0$$

Multiplions par q^3 et développons pour qu'il n'y ait plus de fractions.

L'égalité devient :

$$\boxed{p^3 - 3p^2q + 5pq^2 - 15q^3 = 0} \quad (*)$$

En faisant passer le terme $-15q^3$ à droite de l'égalité * et en mettant p en évidence à gauche, on a :

$$p(p^2 - 3pq + 5q^2) = 15q^3$$

p et q n'ont pas de facteur communs, donc **p divise 15**

Donc les seules valeurs envisageables pour p sont : ± 1 ; ± 3 ; ± 5 et ± 15

En faisant passer le terme p^3 à droite de l'égalité * et en mettant q en évidence à gauche, on a :

$$q(-3p^2 + 5pq - 15q^2) = -p^3$$

Comme p et q n'ont pas de facteurs communs, donc **q divise -1**

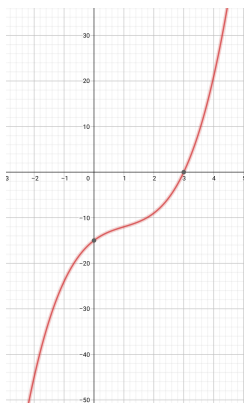
Donc la seule valeur envisageable pour q est 1.

$\frac{p}{q}$	± 1	± 3	± 5	± 15
1	$\pm 1/1$	$\pm 3/1$	$\pm 5/1$	$\pm 15/1$

Conclusion : **Si** $\frac{p}{q}$ est une racine rationnelle du polynôme B ,
alors $\frac{p}{q}$ égale ± 1 ; ± 3 ; ± 5 et ± 15 .

Il suffit d'évaluer le polynôme B sur ces huit valeurs pour déterminer s'il possède une racine rationnelle.

Terminer en déterminant la racine rationnelle de B , puis en factorisant le polynôme B .



En résumé, on peut démontrer le **théorème** suivant :

Si $B(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ avec $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ et $a_j \in \mathbb{Z}$
 c.-à-d. B est un polynôme de degré n dont tous les coefficients sont entiers, avec $a_0 \neq 0$.
 Si $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est une racine rationnelle irréductible du polynôme B , c'est-à-dire que $B\left(\frac{p}{q}\right) = 0$
 Alors p divise a_0 et q divise a_n .

Un théorème qui a une importance historique : « **Le théorème fondamental de l'algèbre** ». En utilisant ce que nous avons vu sur la factorisation, il est facile de voir qu'un polynôme de degré n possède au maximum n racines. Dans ce cas, on peut factoriser le polynôme en produit de polynômes du premier degré. Une question naturelle est :

« **peut-on toujours factoriser un polynôme en produit de polynômes du premier degré ?** »

Si on se limite aux nombres réels \mathbb{R} , la réponse est négative. Si on accepte de travailler avec les nombres complexes \mathbb{C} , la réponse est positive. Cette remarque montre l'importance des nombres complexes (Que vous n'étudiez peut-être jamais dans votre vie ! Quel dommage !)

Si on se limite aux nombre réels \mathbb{R} , on peut toujours factoriser un polynôme en produit de polynômes du premier degré ou du second degré avec discriminant négatif.

Ces affirmations correspondent au théorème fondamental de l'algèbre. Il a fallu plusieurs siècles avant d'obtenir une démonstration rigoureuse de ce théorème.

Exercice : Soit $B(x) = 2x^3 - 9x^2 + 10x - 3$

- a) Déterminer l'ensemble des racines rationnelles du polynôme B
(*indication: utiliser le théorème pour limiter les candidats possibles.*)
- b) B possède-t-il d'autres racines ?

Exercice : Factoriser : $p(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$

10. Tableau de signes⁹

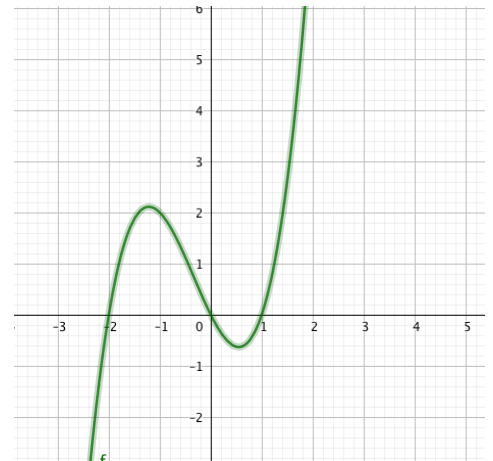
Ce paragraphe a été commencé en première année et il sera très important en 3^e et 4^e pour les études de fonctions. Il est important de bien comprendre sa construction et signification.

Définition : Le tableau des signes d'une fonction présente les intervalles pour lesquels cette fonction est positive et ceux pour lesquels elle est négative.

Exemple 1 : La fonction f est donnée par le graphe ci-contre.

On constate sur ce graphe que cette fonction :

- S'annule en $-2, 0$ et 1 ,
- est négative sur $] -\infty; -2[$ et $] 0; 1[$
- est positive sur $] -2; 0[$ et $] 1; +\infty[$



On regroupe ces informations ainsi :

x		-2		0		1	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Exemple 2 : La fonction f est donnée par $f(x) = (x + 2)x(x - 1)$.

La règle du produit nul nous indique que f s'annule en $-2, 0$ et 1 .

Voilà le tableau de signes :

x		-2		0		1	
$x + 2$	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Exemple 3 : Autre présentation pour la fonction $f(x) = (x + 3)(-2x + 6)$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x + 3$		0		
$-2x + 6$			0	
$(x + 3)(-2x + 6)$				

⁹ Voir aussi Notions élémentaires p.76

Méthode pour établir un tableau de signes :

- 1) Factoriser la fonction.
- 2) Déterminer les zéros des différents facteurs : Une colonne pour chaque.
- 3) Étudier les signes de chaque facteur.
- 4) Bilan des signes.

Exercice : Établir le tableau de signes de la fonction : $f(x) = (x + 3)(1 - x)(x - 2)$

➤ *Notions élémentaires, p. 84 ex 34*

11. Table des matières

0. Matériel :	2
1. Introduction :	2
2. Motivation : Pourquoi étudier les polynômes ?	3
3. Un peu d'histoire	3
4. Rappel sur les polynômes	6
5. Opérations sur les polynômes	7
Cas général :	7
6. Rappel de vocabulaire : racines d'un polynôme	8
Les polynômes de degré 1 :	8
Les polynômes de degrés plus petits que 1 :	9
Les polynômes de degrés plus grands que 1 :	9
7. Divisions euclidiennes de polynômes	11
8. Schéma de Horner	14
9. Racines rationnelles	16
10. Tableau de signes	19
Méthode pour établir un tableau de signes :	20