Ne pas confondre les formules :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$: la relation de Chasles
- $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\boldsymbol{OA}} + \overrightarrow{\boldsymbol{OB}}\right)$: il y a une addition, on obtient un vecteur
- $\boldsymbol{M}\left(\frac{\boldsymbol{a_1+b_1}}{\boldsymbol{2}};\frac{\boldsymbol{a_2+b_2}}{\boldsymbol{2}}\right)$: il y a une addition, on obtient un point.

Géométrie vectorielle et analytique

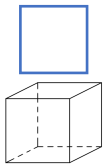
Géométrie vectorielle et analytique plane

Introduction[1]

L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan ou de l'espace peuvent être représentés par des couples ou des triplets de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre : *Discours de la méthode.* Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : la **géométrie analytique**.

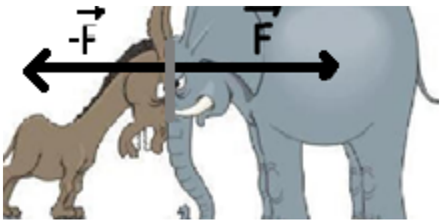
L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

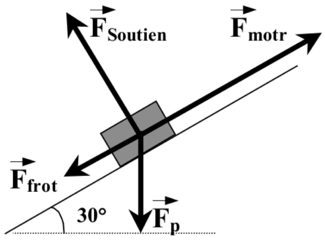
Ce chapitre est étudié en deux dimensions en 2e et en trois dimensions en 3e.

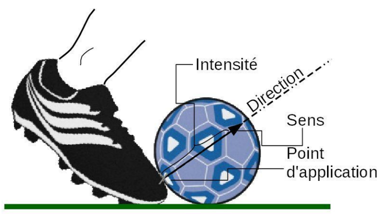


Rappel : **2D :** Plan (Jeu vidéo : comme Tetris, les premiers Mario, Le Roi Lion, Un carré)
3D : Espace (Notre monde, Zelda Breath Of The Wild, Un cube)

Des quantités comme l'aire, le volume, la longueur, la température et le temps n'ont qu'une intensité et peuvent être entièrement représentées par un nombre réel (accompagné de l'unité de mesure adéquate, comme $cm^2, m^3, cm, °, etc.$).
Une grandeur de ce type est une **grandeur scalaire** et le nombre réel correspondant est un **scalaire**.
Des concepts tels que la vitesse ou la force ont à la fois une intensité, un sens et une direction et sont souvent représentés par un segment de droite **orienté**, c'est-à-dire un segment de droite avec une **direction** propre et un **sens**. On nomme aussi ce segment de droite orienté un **vecteur**.

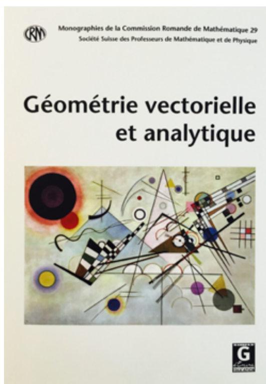






Matériel :

- Ce polycopié
- Les séries : GVS1, GVS2, etc.
- Des feuilles quadrillées,
- Règle, crayon, gomme (pour les croquis)
- Calculatrice non PRO
- Table CRM (pour les épreuves)
- Géométrie vectorielle et analytique, CRM n°29 (facultatif)



[1] CRM n°29, Géométrie vectorielle et analytique

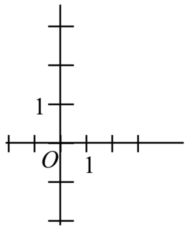
1. Plan vectoriel

Définition :

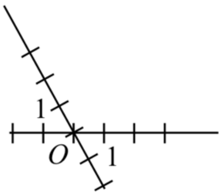
Un ***repère orthonormé*** dans un **plan** est un système de **deux axes** perpendiculaires et la distance entre deux graduations successives, égale une unité de longueur.

L'intersection des deux axes est prise comme origine : O.

Exemple :



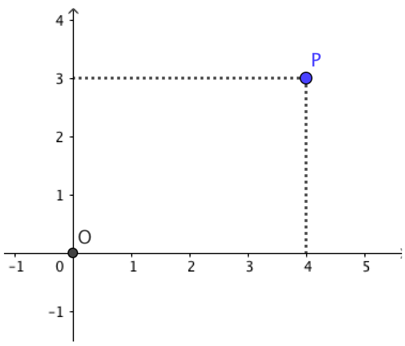
Contre-exemple :



Ainsi, chaque point P de l'espace peut être représenté par un couple $(p_x; p_y)$ de deux nombres réels qui se nomment les coordonnées du point P. Réciproquement, à chaque couple de deux réels correspond un point de l'espace.

Il y a donc une correspondance bijective entre les points de l'espace et les couples de nombres réels. C'est pour cette raison que l'on parle souvent du plan $\mathbb{R}^2$.

Notation :
$P(p_x; p_y)$



Exemple :

$A(1; 4)$

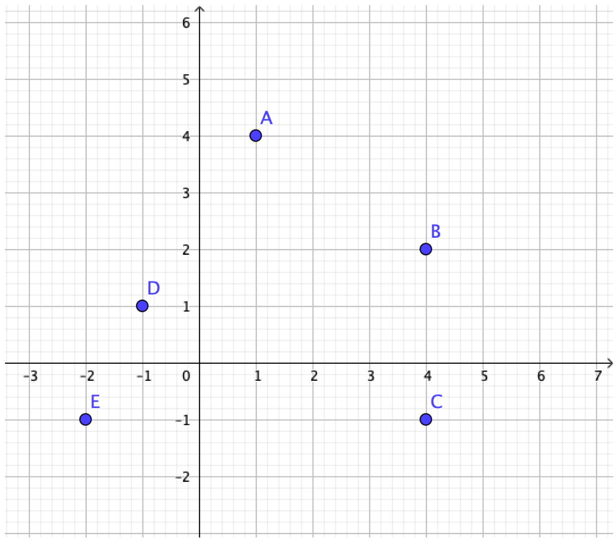
$B(\dots\dots; \dots\dots)$

$C(\dots\dots; \dots\dots)$

$D(\dots\dots; \dots\dots)$

$E(\dots\dots; \dots\dots)$

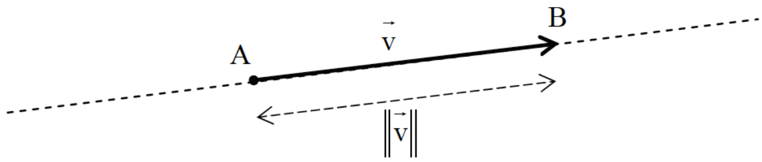
$O(0; 0)$



2. Vecteurs

Définition : Un **vecteur** est un objet mathématique caractérisé par :

- Une direction
- Un sens
- Une norme



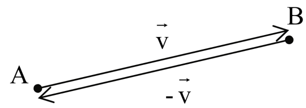
Il est pratique de le représenter graphiquement par une flèche ce qui permet de décrire une direction (droite), un sens (pointe) et une intensité (longueur de la flèche)

Remarques :

- **Direction :** La direction Genève-Lausanne est la même que la direction Lausanne-Genève.
- **Sens :** À droite est l'opposé du sens à gauche. En considérant la direction Ge-Lau, le sens de Genève à Lausanne est l'opposé du sens de Lausanne à Genève.
- **Norme :** C'est l'intensité liée au vecteur. Si l'on représente à l'aide d'une flèche, la longueur sera proportionnelle à la norme.

Vocabulaire :

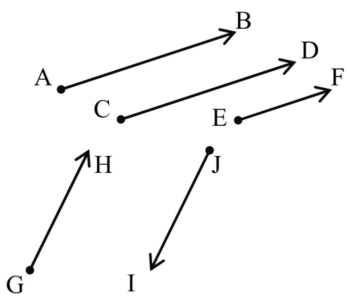
- Le ***point d'application*** du vecteur est le point A et l'***extrémité*** est le point B.
  On note $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur et $\|\vec{v}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ son intensité (on dit aussi la norme de $\vec{v}$ ou la distance de A à B.
- On appelle vecteur nul, noté $\vec{0}$, le vecteur dont le point d'application et l'extrémité coïncident : $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{0}$ a une intensité nulle, sa direction est indéterminée.
- Le vecteur opposé de $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ est le vecteur dont l'origine est B et l'extrémité A. Il est noté : $-\vec{v} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



Les vecteurs sont des objets très utilisés en physique, pour représenter des forces, des vitesses, des accélérations ; ils sont à différencier des scalaires (ou nombres réels), qui ont une norme, mais ni direction, ni sens.

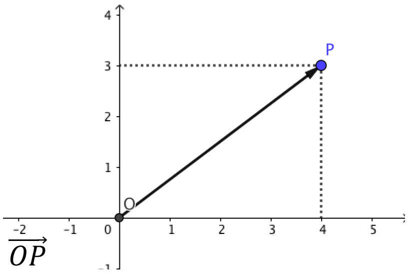
Deux vecteurs sont **équipollents** si et seulement s'ils ont même <u>direction</u>, même <u>sens</u> et même <u>intensité</u> (longueur).

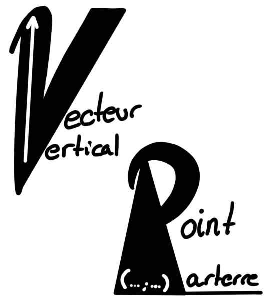
Exercice : Quels sont les vecteurs équipollents ?



Placé dans un repère orthonormé, tout point P de l'espace correspond à un vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$

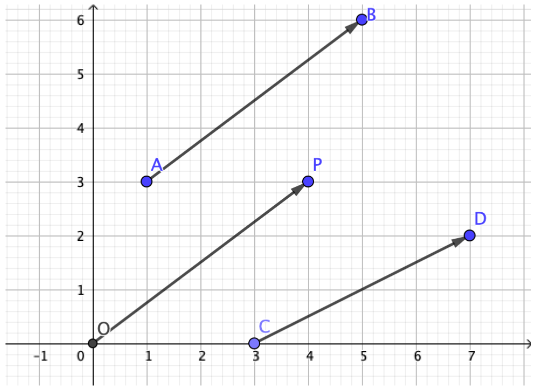
Illustration :





Les coordonnées du point P sont respectivement les composantes du vecteur $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$

Si $P = (4;3)$ alors $\overrightarrow{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



Remarque :

Il ne faut pas confondre le point P dont les coordonnées sont respectivement 4 et 3 avec le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dont les composantes sont respectivement 4 et 3.

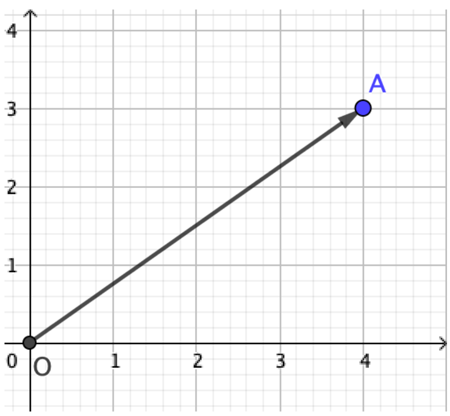
Dans les deux cas, nous utilisons le même couple de nombres. Mais les coordonnées du **point** représentent la <u>position</u> du point alors que les composantes du **vecteur** représentent un <u>déplacement</u> (une <u>translation</u>).

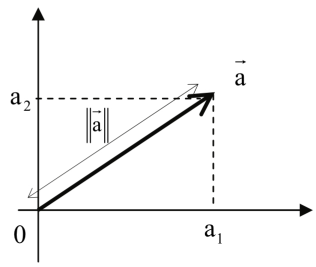
Définition : La ***norme*** d'un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ est par définition la longueur du segment $\overline{OA}$.

Elle s'écrit :

$$\|\vec{a}\| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \text{où } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple : Calculer la norme du vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$





Triangle rectangle → Thm. de Pythagore

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 \Leftrightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

➢ ***GVS1 ex 1 à 4***

Opérations entre deux vecteurs

Il existe deux opérations élémentaires que l'on peut définir sur les vecteurs :

- La somme de deux vecteurs / la différence de deux vecteurs
- Le produit d'un vecteur par un scalaire (nombre).

0. Sommes de deux vecteurs

La première est **l'addition** (et par extension **la différence**) de deux vecteurs. Pour l'effectuer, il est possible d'utiliser :

- la relation de Chasles ou
- la règle du parallélogramme.

(a) **Relation de Chasles** :

Soient A et C deux points. Pour tout point B, on a $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$

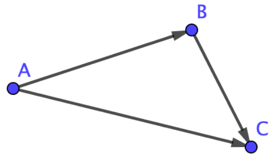


Illustration :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
On veut calculer le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$
Si A est un point quelconque,
On construit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
On a alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

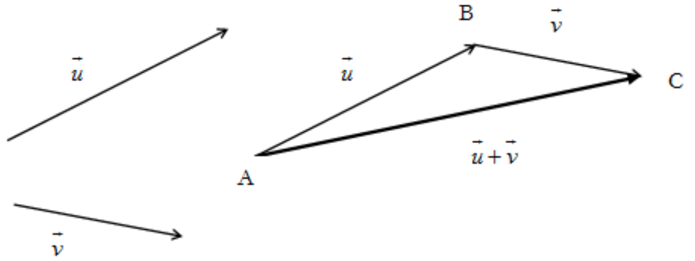
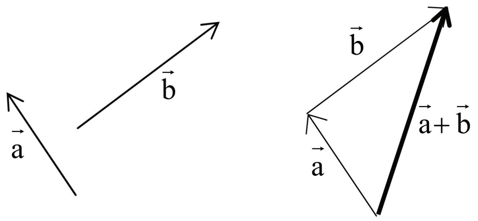
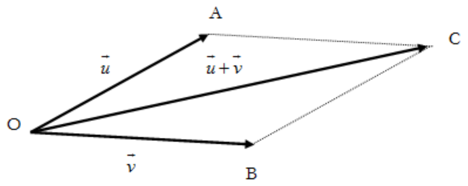


Illustration : En mettant les deux vecteurs à additionner de sorte que l'extrémité de l'un coïncide avec le point d'application de l'autre.

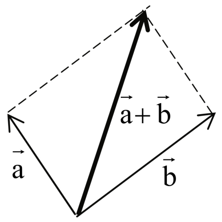


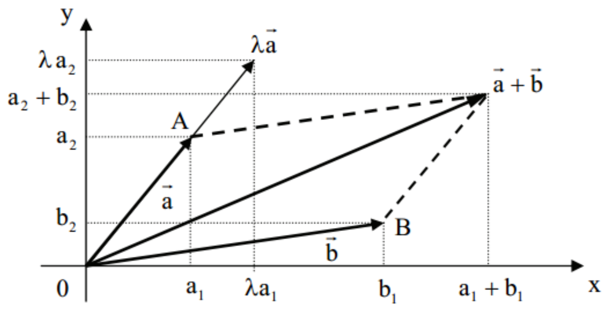
(b) **Règle du parallélogramme :**



Si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$
alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$ tel que $OACB$ est un parallélogramme.

Géométriquement, l'addition de vecteurs revient à mettre les vecteurs bout à bout et l'addition correspond au vecteur obtenu avec la diagonale.

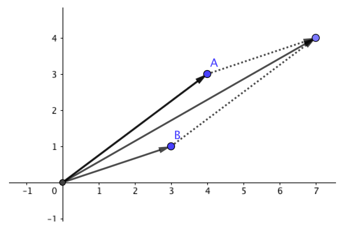




Définition : L'addition de deux vecteurs $\vec{a}, \vec{b}$ est une opération interne. Elle est définie par :

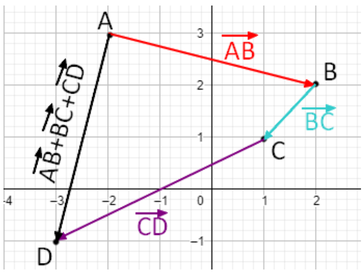
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

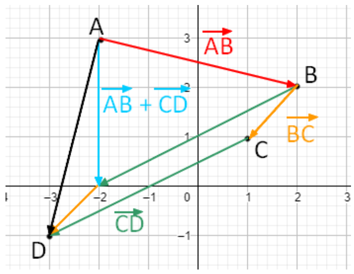
Exemple : Additionner les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ avec $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$



Propriétés :
1) L'addition est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2) L'addition est associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Exemple : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$



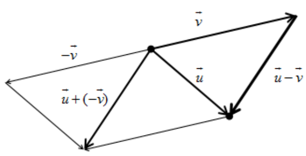


1. Soustraction :

Définition : Pour soustraire un vecteur, il suffit d'additionner un vecteur opposé.

Illustration :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$



➢ ***GVS1 ex 5, 6 et 10***

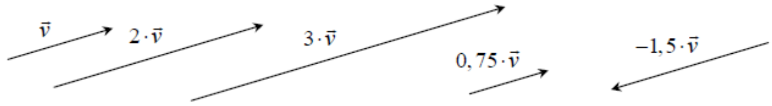
2. Produit d'un vecteur par un scalaire

La deuxième opération de base est la multiplication d'un vecteur par un scalaire (un nombre)

Le **produit d'un vecteur $\vec{v}$ par un scalaire** (nombre réel) λ se note $\lambda \cdot \vec{v}$ et est défini de la manière suivante :
Le vecteur $\boldsymbol{\lambda\vec{v}}$ est représenté par un segment orienté :

- de même direction que $\vec{v}$
- de longueur égale à $|\lambda|$ fois la longueur d'un représentant de $\vec{v}$. Donc $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{v}\|$
- de même sens que $\vec{v}$, si λ est positif, de sens opposé si λ est négatif.

Illustration :

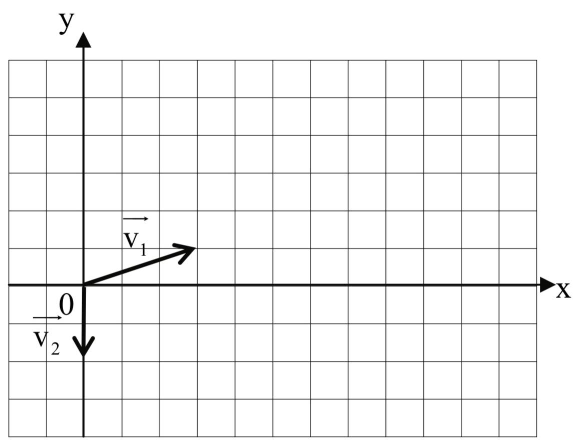


Définition : La **multiplication par un scalaire** est une *opération externe*. Elle est définie par :
$$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } a_1, a_2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Remarque : Multiplier un vecteur par un scalaire revient à modifier sa norme, éventuellement son sens, mais ne modifie en aucun cas sa direction !

Propriétés : soient $a, b \in \mathbb{R}$
1) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
2) $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Exercice : Considérons $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$



a) Calculer :

$\vec{a} = 2\vec{v_1} - 2\vec{v_2} =$

$\vec{b} = 3\vec{v_1} + \vec{v_2} =$

b) Dessiner les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Que peut-on trouver dans la CRM ?

Opérations avec les composantes

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$	$\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

➢ ***GVS1 ex 5 à 10***

3. Bases

Notation : L'ensemble des vecteurs du plan est appelé plan vectoriel et est noté V_2.

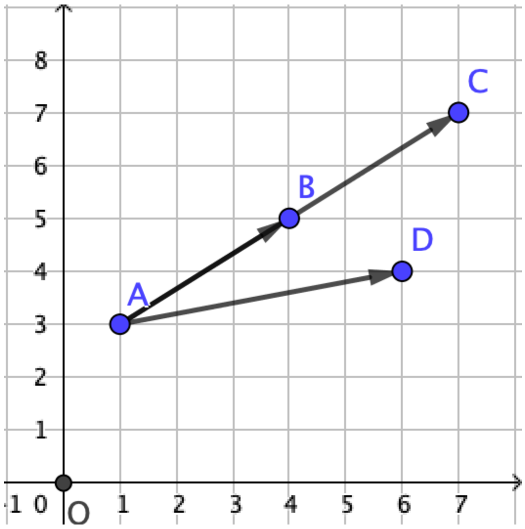
Définition : Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel, autrement dit :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \text{il existe un nombre } \lambda \text{ tel que } \lambda \cdot \vec{v} = \vec{u}$$

Illustration :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires car : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

On peut écrire : $\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$
Ils sont linéairement dépendants (dépendant d'une même droite)



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
Ils ne sont pas multiples l'un de l'autre. Ils sont linéairement indépendants.
La seule manière d'écrire $\vec{0}$ avec ces deux vecteurs est de les multiplier par 0 : $0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Exemple : Est-ce que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -13 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ?

Remarques :

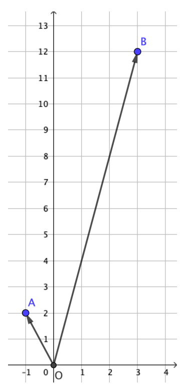
- Deux vecteurs colinéaires non nuls sont de même direction.
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.
- Deux vecteurs sont **linéairement dépendants** si et seulement s'ils sont colinéaires.

Définition : **Une base de V_2** est un couple de vecteurs linéairement indépendants.

Autrement dit :

On appelle **base du plan**, n'importe quel **couple** de vecteurs **non colinéaires**.

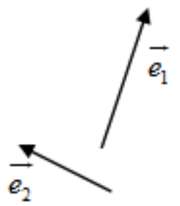
Exemple : Est-ce que $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ forment une base de V_2 ?



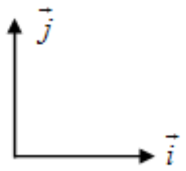
Remarque :

Pour une base, on utilise la lettre e, munie d'un indice pour différencier les deux vecteurs, ou alors les lettre i et j:

Exemple 1 : base $\left(\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$



Exemple 2 : base $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$



La base $(\vec{i},\vec{j})$ est dite orthonormée car $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs perpendiculaires (ou orthogonaux, le préfixe ortho- venant du grec *ortos, « droit »*) et de longueur unitaire (*normé* = de longueur 1).

L'emploi du terme ***base*** - au sens "sur quoi tout repose" ou "sur quoi tout se construit" - s'explique par la propriété donnée ci-dessous :

Propriété :
Si $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2, alors tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 est une **combinaison linéaire unique** de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$: il existe un et un seul couple $(\alpha;\beta)$ de nombres réels tels que $\boldsymbol{\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Base orthonormée

On note $\|\vec{a}\|$ la norme d'un vecteur $\vec{a}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, on note $\vec{a} \perp \vec{b}$

Dans le plan	Dans l'espace
$(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une *base orthonormée* si	$(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une *base orthonormée* si
$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$	$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

Composantes d'un vecteur

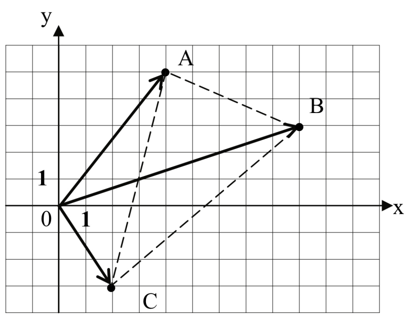
Définition : Soit $(\vec{e_1};\vec{e_2})$ est une base de V_2.
Tout vecteur $\vec{v}$ de V_2 s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\vec{v} = \alpha\vec{e_1} + \beta\vec{e_2}; \text{ on note alors } \vec{v} = \binom{\alpha}{\beta}.$$

α et β sont les composantes de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1};\vec{e_2})$.

Les composantes dépendent de la base et seront différentes si celle-ci change.

Illustration
$\left(\overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OC}\right)$ est une base de V_2
Les composantes de $\overrightarrow{OB}$ dans cette base sont :
$\overrightarrow{OB} = \binom{1}{1}$ car $\overrightarrow{OB} = 1\overrightarrow{OA} + 1\overrightarrow{OC}$



Opérations sur les composantes

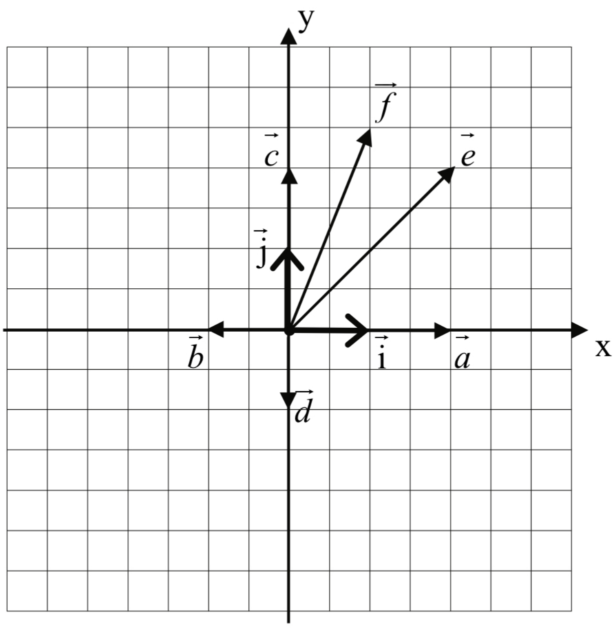
Soit une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$ de V_2, un nombre réel λ et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés par leurs composantes relativement à la base $\mathcal{B}$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

On a :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} \\ \lambda \vec{u} &= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

Exercice :

Considérons le repère orthonormé et les vecteurs du plan suivant :



1. Écrire les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ et $\vec{f}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

2. Peut-on toujours écrire un vecteur $\vec{v}$ du plan comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Points particuliers

Distance entre deux points

Dans le repère orthonormé $(O; I; J)$, soit les points $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$.

On a :

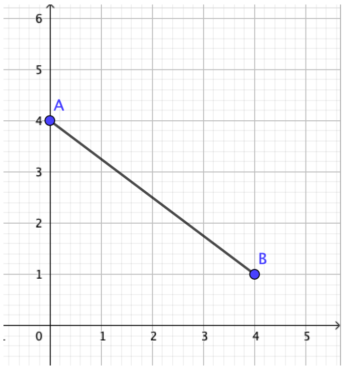
$$\boxed{\delta(A; B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}}$$

Remarque : Une distance est un nombre positif (ou nul).

Méthode :

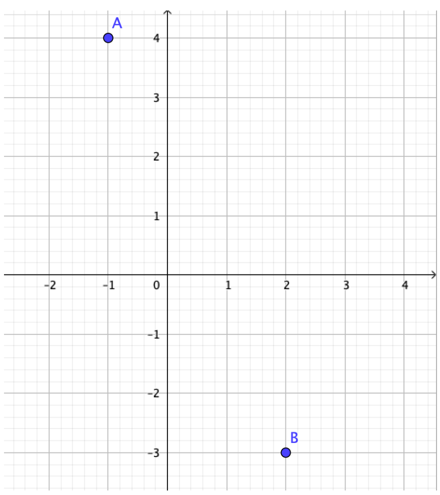
1) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec la formule : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$
2) Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Illustration : On cherche la distance entre $A(0; 4)$ et $B(4; 1)$.



1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \binom{4}{1} - \binom{0}{4} = \binom{4}{3}$
2) $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

Exemple : Déterminer la distance entre les points $A(1; 4)$ et $B(2; -3)$



Milieu d'un segment

M est le point milieu de $[AB] \Leftrightarrow \boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\overrightarrow{OA}} + \boldsymbol{\overrightarrow{OB}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{M}\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$

Le point M se trouve à l'extrémité du demi vecteur $\boldsymbol{\overrightarrow{OA}} + \boldsymbol{\overrightarrow{OB}}$

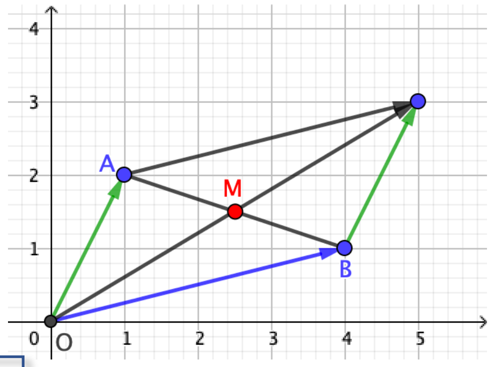


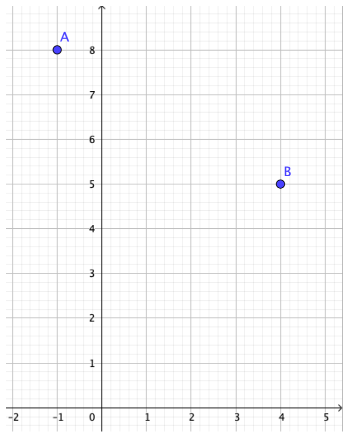
Illustration :

Le point A a les coordonnées $A(1;2)$ et
le point B a les coordonnées $B(4;1)$

On calcule : $M\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+1}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$

Remarque : Ne pas confondre les formules :

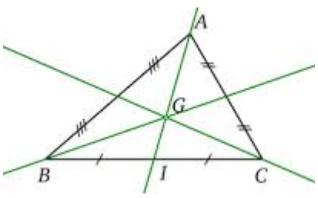
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$: la relation de Chasles
- $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\overrightarrow{OA}} + \boldsymbol{\overrightarrow{OB}})$: il y a une addition, on obtient un vecteur
- $\boldsymbol{M}\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$: il y a une addition, on obtient un point.

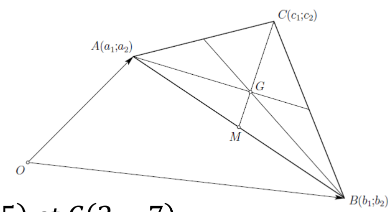


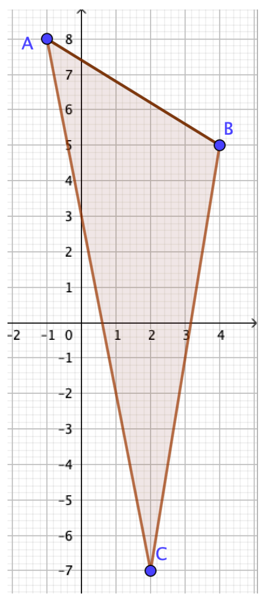
Exemple : On donne les points $A(-1;8), B(4;5)$
Calculer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ et le placer sur le repère :

Centre de gravité d'un triangle :

G est le centre de gravité du triangle $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \Leftrightarrow G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$







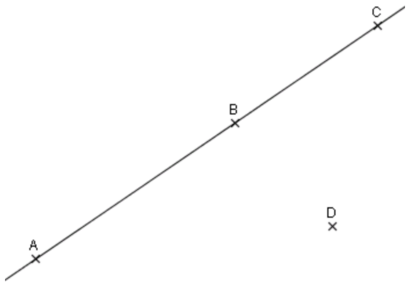
Exemple : *On donne les points $A(-1;8), B(4;5)$ et $C(2;-7)$*
Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC

5. Droites

Définition : Trois points distincts A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires :

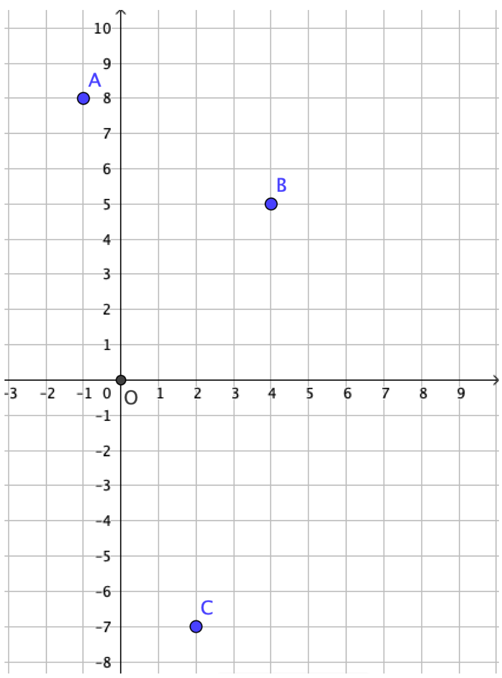
$$\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Illustration :



Exemple : Les points $A(-1; 8), B(4; 5)$ *et* $C(2; -7)$ *sont-ils alignés ?*

Exercice : Les points Les points $A(-1; 8), B(4; 5)$ *et* $D(9; 2)$ *sont-ils alignés ?*

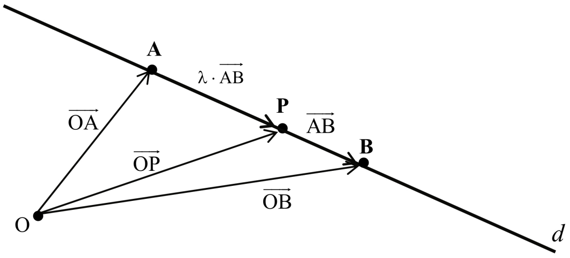


Définitions : Soit deux points distincts A et B
La droite (AB) est l'ensemble des points $P(x;y)$ du plan π alignés avec A et B :

$$(AB) = \{P | \overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}, k \in \mathbb{R}\}$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite (AB)

Soit un point A et un vecteur $\vec{d}$ non nul

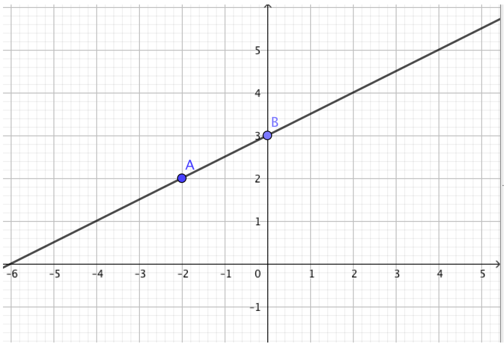


La droite passant par A et de direction $\vec{d}$, notée $(A;\ \vec{d})$, est l'ensemble des points M du plan π tels que les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires :

$$(A;\vec{d}) = \{P | \overrightarrow{AP} = k\vec{d}\ k \in \mathbb{R}\}$$

Autre écriture : $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = k \cdot \vec{d} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{d}$

Exemple : La droite d passant par les points $A(-2;2)$ et $(0;3)$



1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}$

2) Choisir un point position (A ou B)

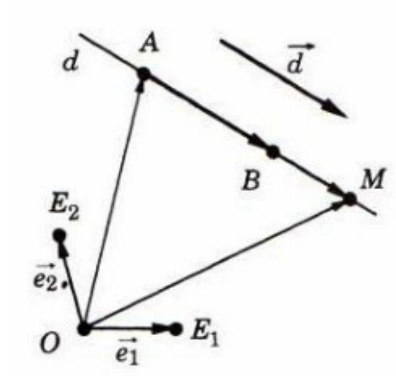
3) L'équation devient : $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$

Méthode : Pour une droite passant par deux points (A et B) :
1) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{AB}$
2) Choisir un point position (A ou B)
3) L'équation devient : $d: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R}$

Vocabulaire :

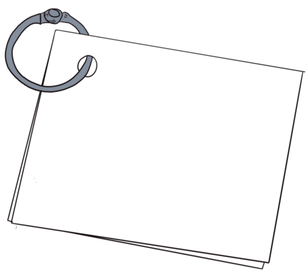
Le plan π est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, E_1, E_2)$

Soit la droite d passant par le point $A(a_1; a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{d_1}{d_2}$.
Si $d_1 \neq 0$, le rapport $m = \frac{d_2}{d_1}$ est appelé **pente** (ou **coefficient directeur**) de la droite d
Si la droite d est donnée par deux points distincts $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$, elle a pour **vecteur directeur** $\boldsymbol{\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}}$
Si $b_1 \neq a_1$, **la pente de $\boldsymbol{d}$ est $\boldsymbol{m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}}$**



Équations paramétriques de la droite $\boldsymbol{d = (A; \vec{d})}$

Pour tout point $P(x; y)$ de la droite d, on a :



$$d: \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d: \binom{x}{y} = \binom{a_1}{a_2} + k\binom{d_1}{d_2}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d: \begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Exemple : Déterminer la droite d de vecteur directeur $\vec{d} = \binom{3}{-1}$ et passant par le point $P(2; 4)$.

Équation cartésienne

Une droite d est l'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient une équation du type

$$\boxed{ax + by + c = 0, \qquad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$$

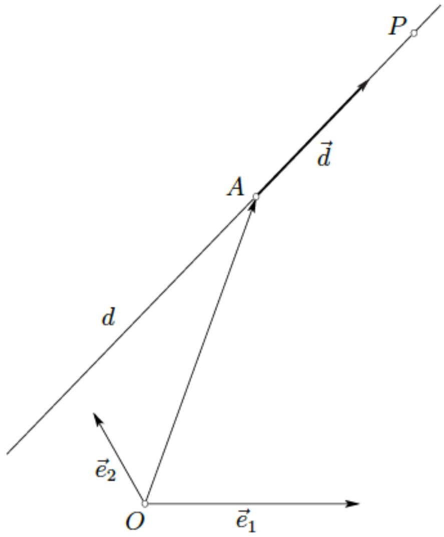
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d.
Cette droite a pour **vecteur directeur** $\vec{d} = \binom{-b}{a}$
et si $b \neq 0$, pour **pente** : $m = -\frac{a}{b}$

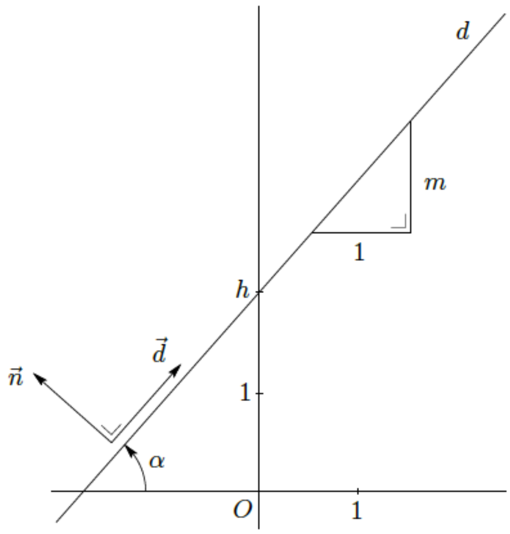
Exemple : Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(1; 2)$ et $B(2; -1)$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Droite

On note d une droite passant par le point $A(a_1; a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$.





Un point $P(x\,;y)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :	
Équation vectorielle	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\,\vec{d}\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda\,d_1 \\ y = a_2 + \lambda\,d_2 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Équation cartésienne	$a\,x + b\,y + c = 0$
Autres formes	$y = mx + h$ $\dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2}$ $y - a_2 = m(x - a_1)$

Les vecteurs $\vec{n} = \begin{pmatrix} -d_2 \\ d_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à la droite d. 1

Le nombre $m = \dfrac{d_2}{d_1} = -\dfrac{a}{b}$ est la pente de la droite d.

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de la droite d.

L'angle α est l'*angle directeur* de la droite d. On a $\tan(\alpha) = m$. 1

Le nombre h est l'*ordonnée à l'origine* de la droite d.

Positions relatives de deux droites

Définition : On appellera ici **droites parallèles** deux droites ayant même direction. Elles peuvent être parallèles au sens strict (sans point commun) ou confondues.

Critère de parallélisme

Soit $d_1 = (AB)$ et $d_2 = (CD)$ deux droites, de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{d_2} = \overrightarrow{CD}$

Les droites d_1 et d_2 sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont colinéaires

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles :

- Elles sont **confondues** si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$
- Elles sont **strictement parallèles** si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AC}$ n'est pas colinéaire aux vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$

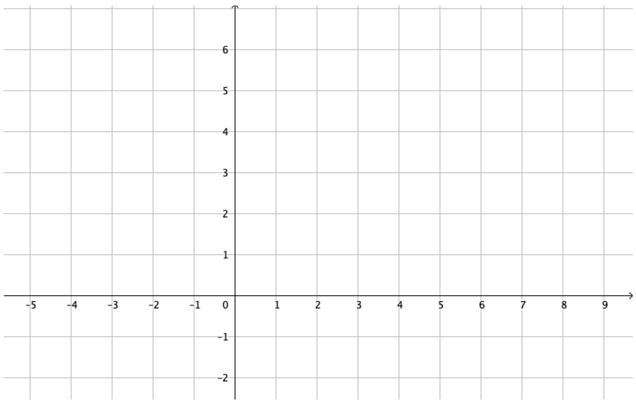
Exemple : La droite $d_1 : \binom{x}{y} = \binom{1}{2} + k\binom{-1}{4}$, où $k \in \mathbb{R}$ et la droite $d_2 : \binom{x}{y} = \binom{3}{5} + t\binom{2}{-8}$, où $t \in \mathbb{R}$ sont parallèles car $\overrightarrow{d_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{d_2}$.

Sont-elles confondues ou strictement parallèles ?

On peut prendre un point de d_1, $A(1; 2)$ et voir s'il appartient à d_2 :

$\begin{cases} 1 = 3 + 2t \\ 2 = 5 - 8t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{3}{8} \neq -1 \end{cases}$ donc le point $A \notin d_2$ les droites sont strictement parallèles.

Exercice : Soient les points $A(-2; 4), B(1; 3), C(3; 3), D(6; 1)$
Est-ce que la droite (AB) passant par les points A et B est parallèle à la droite (CD) passant par les points C et D ?



Position relative de deux droites données par leurs équations cartésiennes

Soit d_1 et d_2 deux droites données par leurs équations cartésiennes

$$d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad et \quad d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

> Les droites $d_1$et d_2 sont **parallèles** si et seulement s'il existe un nombre réel k tel
> $(a_2; b_2) = (ka_1; kb_1)$

Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles :

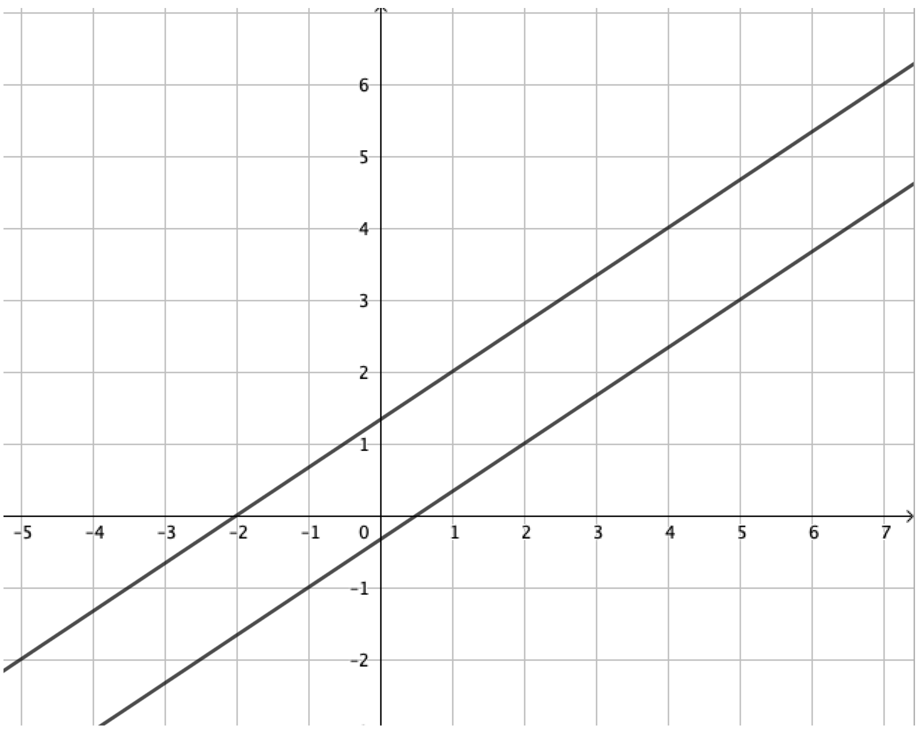
- Elles sont confondues si et seulement si le facteur de proportionnalité k est tel que $c_2 = kc_1$; on a donc $(a_2; b_2; c_2) = (ka_1; kb_1; kc_1)$
- Elles sont strictement parallèles si et seulement si le facteur de proportionnalité k est tel que $c_2 \neq kc_1$

> Les droites $d_1$et d_2 sont **sécantes** si et seulement s'il n'existe aucun nombre réel k tel que
> $(a_2; b_2) = (ka_1; kb_1)$

Exemple : $2x - 3y + 4 = 0$ et $-4x + 6y + 2 = 0$ sont-elles parallèles ou confondues ?

$a_1 = 2, b_1 = -3$
$-2 \cdot (a_1; b_2) = (-4; 6)$
$\qquad\qquad = (a_2; b_2)$
Les droites sont donc parallèles.

Cependant, $c_1 = 4$
Et $4 \cdot (-2) = -8 \neq 2 = c_2$
Les droites ne sont donc pas confondues.



Résumé des droites :

Une droite d_1 avec vecteur directeur $\vec{d}$ et point position A

$$d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

$$d_1: \begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases}, \text{où } k \in \mathbb{R}$$

Une droite d_2 avec vecteur directeur $\vec{e}$ et point position B

$$d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} + t\vec{e}, \text{où } t \in \mathbb{R}$$

$$d_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \text{où } t \in \mathbb{R}$$

$$d_2: \begin{cases} x = b_1 + te_1 \\ y = b_2 + te_2 \end{cases}, \text{où } t \in \mathbb{R}$$

Si $\vec{d} = n \cdot \vec{e}$: Les vecteurs directeurs sont colinéaires, les droites sont **parallèles** (parallèles strictement ou confondues)

Pour distinguer les droites parallèles strictement (aucun point en commun) de droites confondues (les mêmes droites), il suffit de prendre un point (par exemple A qui appartient à la droite d_1) et vérifier s'il appartient à l'autre droite.

Si $\vec{d} \neq n \cdot \vec{e}$: Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires. Les droites sont **sécantes**. Il faut trouver leur point d'intersection.

Pour trouver le point en commun, il faut résoudre l'équation $\begin{cases} a_1 + kd_1 = b_1 + te_1 \\ a_2 + kd_2 = b_2 + te_2 \end{cases}$

5. Cercle

Équation d'un cercle

Le cercle Γ de centre $C(\alpha;\beta)$ et de rayon r est l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que :

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\alpha})^2 + (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\beta})^2 = \boldsymbol{r}^2$$

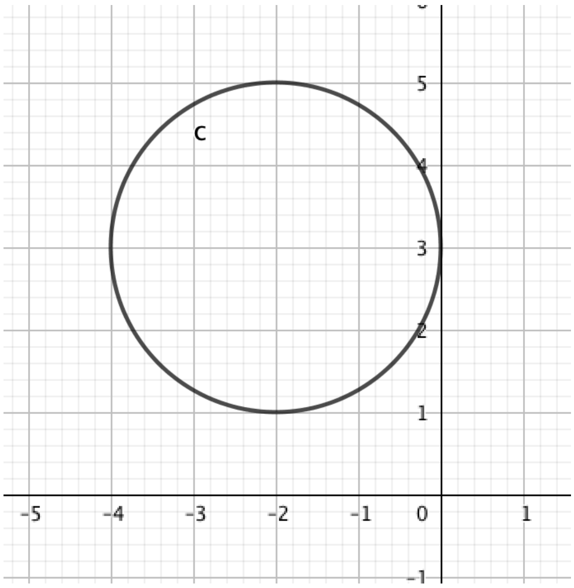
Cette relation est appelée équation cartésienne (canonique) du cercle Γ.

L'équation générale d'un cercle est de la forme :

$$ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0, a \neq 0$$

Exemple : Le cercle ci-dessous est donné par l'équation : $C: (x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$

De centre : (-2 ;3) et de rayon 2



Exercice : Déterminer l'équation du cercle centré en $P(1;2)$ et de rayon 3.

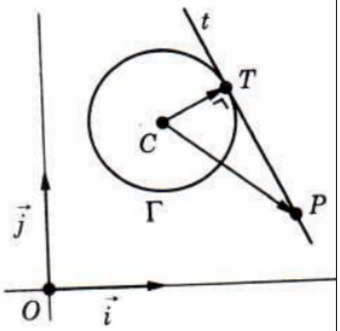
Tangente à un cercle

Soit T un point du cercle Γ de centre C et de rayon r. Si P est un point quelconque du plan et si t désigne la tangente au cercle en T, on a:

$$P \in t \iff \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{TP}} = 0$$

ainsi que :

$$P \in t \iff \overrightarrow{\mathrm{CT}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = \mathrm{r}^2$$



La tangente en un point $T(x_0; y_0)$ du cercle Γ de centre $C(\alpha; \beta)$ et de rayon r a pour équation cartésienne :

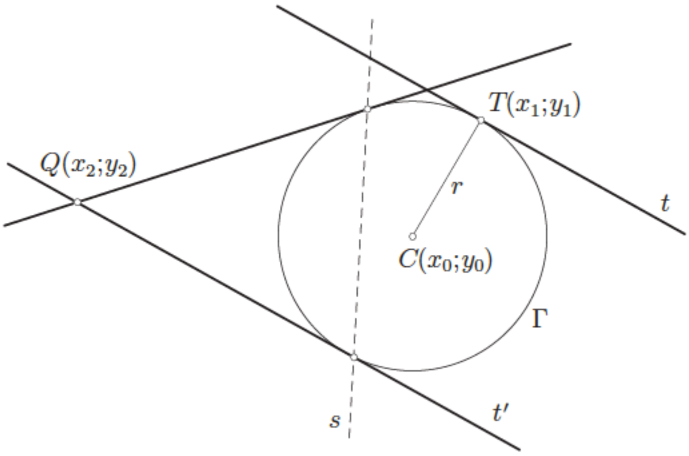
$$(x_0 - \alpha)(x - \alpha) + (y_0 - \beta)(y - \beta) - r^2 = 0$$

Si le cercle est donné par l'équation $ax^2 + ay^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ l'équation de la tangente s'écrit : $ax_0 + ay_0 + d(x_0 + x) + e(y_0 + y) + f = 0$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Cercle

On note $P(x\,;y)$ un point et Γ un cercle de centre $C(x_0\,;y_0)$ et de rayon r.



Équation du cercle

$P \in \Gamma \iff \|\overrightarrow{CP}\| = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Tangente en un point T

$P \in t \iff \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{TP} = 0 \iff (x_1 - x_0)(x - x_1) + (y_1 - y_0)(y - y_1) = 0$

$P \in t \iff \overrightarrow{CT} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \iff (x_1 - x_0)(x - x_0) + (y_1 - y_0)(y - y_0) = r^2$

Tangentes de pente m

$P \in t$ ou $P \in t' \iff y - y_0 = m(x - x_0) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

Polaire d'un point Q

$P \in s \iff \overrightarrow{CQ} \cdot \overrightarrow{CP} = r^2 \iff (x_2 - x_0)(x - x_0) + (y_2 - y_0)(y - y_0) = r^2$

Puissance d'un point Q

$\|\overrightarrow{CQ}\|^2 - r^2 = (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 - r^2$

6. Produit scalaire

On a vu qu'il était aisé d'additionner ou soustraire des vecteurs entres eux. Cependant, la multiplication de vecteurs ne fonctionne pas aussi aisément. La raison est la direction possiblement différente des vecteurs les uns par rapports aux autres. Il existe deux produits de vecteurs. Le **produit scalaire** (qui donne un nombre) et le **produit vectoriel** (qui donne un vecteur). Seul le produit scalaire est vu cette année.

Définition : Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, le **produit scalaire** de ces vecteurs est :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Cela **donne donc un nombre réel**.

Exemple : Calculez le produit scalaire de $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Remarque : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \|\vec{a}\|^2$

Théorème : $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$

Signifie : Deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Démonstration :

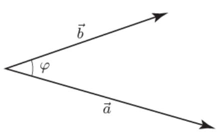
Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Propriétés

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$	
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	



a. Norme

Norme d'un vecteur

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

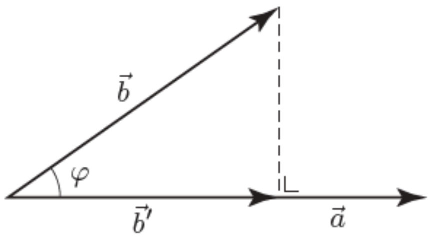
Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\|\lambda\vec{a}\| = \lvert\lambda\rvert\ \|\vec{a}\|$	$\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert \leq \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|$
$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right)$

b. Angle entre deux vecteurs

Projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

On note $\vec{b}\,'$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.



$\vec{b}\,' = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\,\vec{a}$	$\|\vec{b}\,'\| = \dfrac{\lvert\vec{a} \cdot \vec{b}\rvert}{\|\vec{a}\|}$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}\,'$

Angle de deux vecteurs

On note φ l'angle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $(0 \leq \varphi \leq 180°)$.

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\|}}$$

Table des matières

Vidéos pour réviser ce cours	
Polycopié pages 1 à 5 GVS1 ex 1 à 3	
	Polycopié p.6 à 8 GVS1 ex 5 et 7
Théorie p. 9 à 11 GVS2 ex 6	
	Théorie p. 14 à 17 GVS3 ex 4,8 et 9
Théorie p.18 GVS3 ex 25	
	Théorie p.19 GVS3 ex 25 et 28