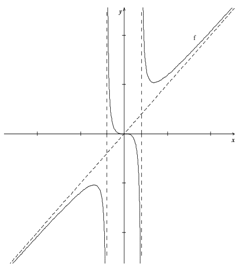
Analyse

Matériel :

- Monographique CRM n°25 : *FUNDAMENTUM de mathématique ANALYSE* pour la théorie et les exercices (Utile en 3e et 4e)
- *Formulaires et tables CRM,* pour les épreuves (et cours)
- Ce polycopié d'analyse
- Des séries d'analyse distribuées en cours (AS1, AS2, etc.)
- Une calculatrice personnelle non programmable
- Monographie CRM n°27: *Notions élémentaires*
  (pour les notions acquises en 1ere et 2eme)

0. Introduction

Ce chapitre a plusieurs objectifs. Depuis le début du collège, nous étudions différentes fonctions de bases : les droites, les paraboles, les sinus et cosinus, les logarithme et exponentielle, etc.

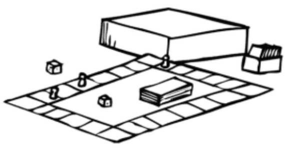


Un premier but serait de pouvoir **étudier de nouvelles fonctions** composées à partir de fonctions de bases connues et de pouvoir les représenter graphiquement de manière la plus précise possible. *Exemple :* Étudier la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

Un deuxième objectif lié aux exercices sera de répondre à des **problèmes d'optimalisation**, par exemple : Étant données des dimensions d'un matériau, comment déterminer la forme permettant d'obtenir le plus grand volume ou la plus grande surface (barrières pour un enclos, feuille d'alu pour une canette, etc.) ?

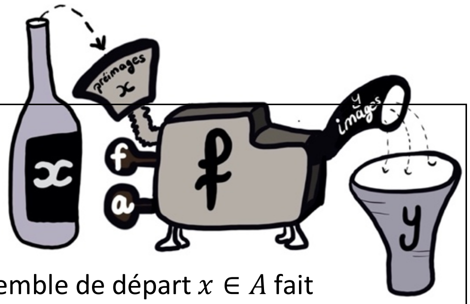
L'objectif de la théorie est de **justifier les résultats** utilisés dans des exercices. Pour cette justification, vous devrez comprendre dans quel ordre se justifient les résultats. Certains théorèmes ne seront que des étapes dans le but d'en prouver un autre, qui permettra d'en prouver encore un autre encore, qui arrivera finalement à un résultat qui peut s'utiliser directement dans des exercices. Il vous faudra donc comprendre ce type d' "*architecture logique*".

Pour **comprendre comment jouer** à un nouveau jeu, il faut commencer par lire les règles. En commençant à jouer, les règles deviennent plus claires ; on commence à chercher les limites et à faire des liens. Nous poserons donc des définitions comme on pose une règle de jeu et puis nous pourrons ainsi jouer pour aller plus loin ! Votre but sera donc de chercher les limites, les failles ; ce qui permet d'établir si la définition ou l'architecture est solide.



1. Rappels sur les fonctions

1.1 Fonctions réelles, propriétés[1]

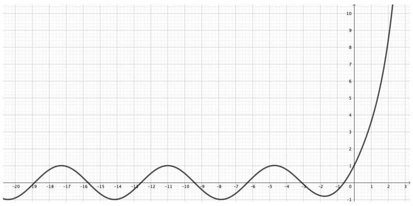


Définition : Une **fonction** est définie par :

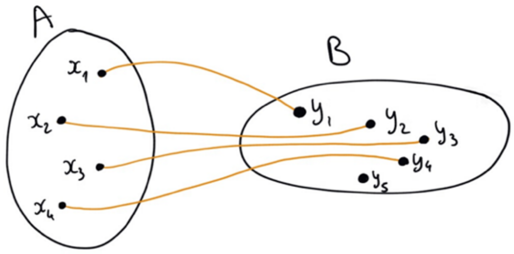
1) Un ensemble A appelé **ensemble de départ**, ou **source**.

2) Un ensemble B appelé **ensemble d'arrivée**, ou **but**.

3) Une règle de correspondance, qui à chaque élément de l'ensemble de départ $x \in A$ fait correspondre zéro (aucun) ou un élément de l'ensemble d'arrivée $y \in B$.



$A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}, f(x) = e^x + \sin(x)$



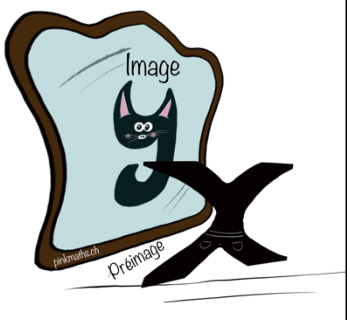
Remarque : Si à chaque élément de l'ensemble de départ la règle de correspondance associe exactement un élément de l'ensemble d'arrivée, il s'agit d'une **application**.

Lorsque cela n'est pas précisé, nous prendrons comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble des nombres réels.

Définitions :

- On désigne souvent une fonction par les lettres $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ ou $\boldsymbol{h}$
- Si x appartient à l'ensemble de départ A et y est un élément de l'ensemble d'arrivée B qui correspond à x, y est appelé **l'image de $\boldsymbol{x}$** (x possède au plus une image)
- x est appelé une **préimage de $\boldsymbol{y}$** (y peut posséder zéro, une ou plusieurs préimages)
- Si on désigne la fonction par f alors on note : $\boldsymbol{f(x)}$ l'image de x
- On note : $f: x \longmapsto f(x) = y$ de A vers B

  $\underset{équivalent}{\Longleftrightarrow} \quad f: \begin{cases} A \longrightarrow B \\ x \longmapsto f(x) = y \end{cases}$



Exercice :

$\boldsymbol{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{f}$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est une fonction réelle.

L'image de -4 est

L'ensemble des préimages de 2 est $f^{-1}(2) = \{ \qquad\qquad \}$, car

[1] CRM n°25, p. 1 à 5 & p.12-15

Définition :

- Le **domaine de définition** (ou ensemble de définition) d'une fonction f est l'ensemble des nombres appartenant à $\mathbb{R}$ qui ont une image par f. Cet ensemble est noté D_f.

- Le graphique de f est la représentation géométrique des couples de coordonnées $\big(x; f(x)\big)$ où $x \in D_f$.

Rappels concernant des domaines particuliers : Trois cas particuliers

1) Le dénominateur d'une fraction	**Exemple :** $f(x) = \frac{x}{x-2}$ $D_f =$
2) Les racines paires	**Exemple :** $f(x) = \sqrt{x-3}$ (ou $g(x) = \sqrt[6]{x-3}$) $D_f =$
3) Le logarithme .... (fonction très importante en 4ème)	**Exemple :** $f(x) = \log(x)$ $D_f =$

Exercice :

$\boldsymbol{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$

Le domaine de définition de f est . . . .

Le graphique de f sur l'intervalle $[-7; 5]$ est :

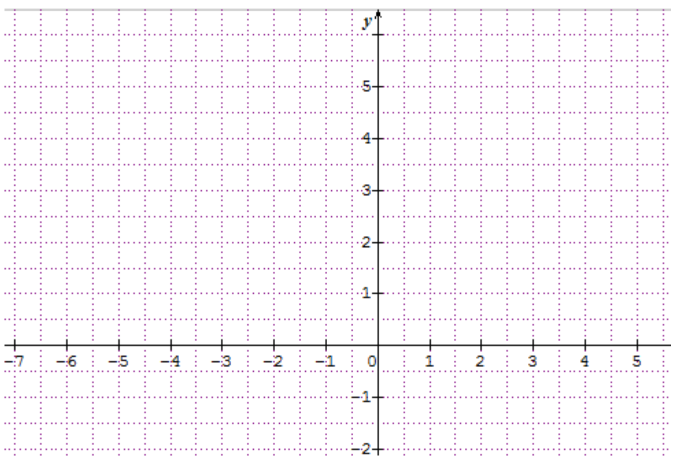
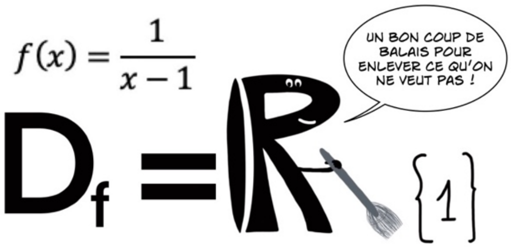


Tableau de valeurs :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$							

Que peut-on trouver dans la table CRM ?



Fonction réelle d'une variable réelle

On note f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle x.

L'*image* de x par la fonction f est notée $f(x)$.

L'*ensemble de définition* de la fonction f, noté D_f, est l'ensemble des nombres réels qui ont une image par f.

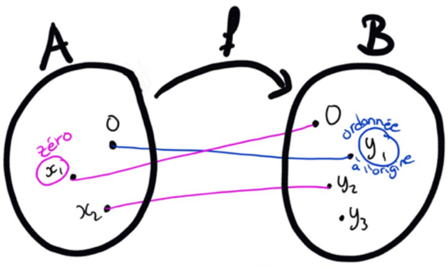
L'*ensemble image* de la fonction f, noté $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble de toutes les images par f des éléments de D_f.

Le *graphe* de la fonction f est l'ensemble des couples $(x\,;f(x))$, où $x \in D_f$. La *représentation graphique* de la fonction f est la courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$ dans un plan muni d'un système d'axes perpendiculaires.

1.2 Caractéristiques[2]

Définitions :

- **L'ordonnée à l'origine** d'une fonction réelle f est l'image de 0. Elle se note $f(0)$
- Les **zéros** d'une fonction réelle f est l'ensemble des préimages de 0. Elle se note $f^{-1}(0)$
  Autrement dit, c'est l'ensemble des nombres x ayant 0 $(= y)$ comme image.



Exemple : $\boldsymbol{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \longmapsto x^2 + 5x + 6 = f(x)} \end{cases}$

L'ordonnée à l'origine de f est . . . .

Les zéros de f est l'ensemble $Z_f =$ . . . .

. . . .

Exemple :

$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad$ $D_f =$

L'ordonnée à l'origine de f est ....

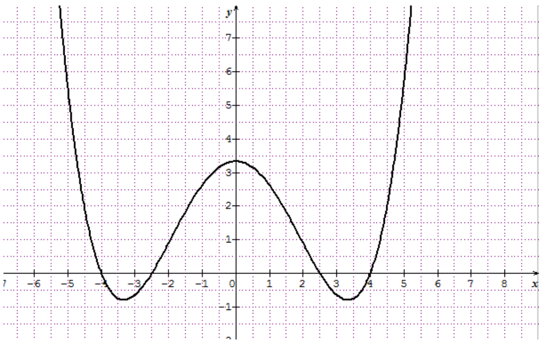
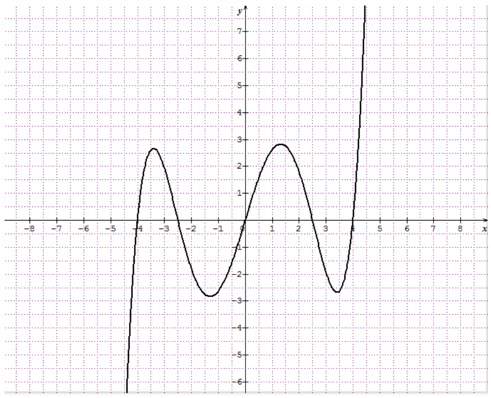
Les zéros de f est l'ensemble ....

....

[2] CRM n°25, p.5-6 & p.15

Définitions :
Si $f(-x) = f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une **fonction paire**. Si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de l'ensemble de définition de f, on dit que f est une **fonction impaire**.

Remarque : cette définition sera utile dans la démonstration d'un théorème important.

Les représentations graphiques des **fonctions paires** sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (axe Oy). (Symétrie axiale)	Les représentations graphiques des **fonctions impaires** sont symétriques par rapport à l'origine. (Symétrie centrale)
	

Remarques :

- L'ensemble de définitions d'une fonction paire ou impaire est symétrique par rapport à l'origine. Une fonction dont l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à l'origine n'est donc ni paire, ni impaire

- Le plus souvent, une fonction n'est ni paire ni impaire

Exemples : Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre

a) $f(x) = x^2$

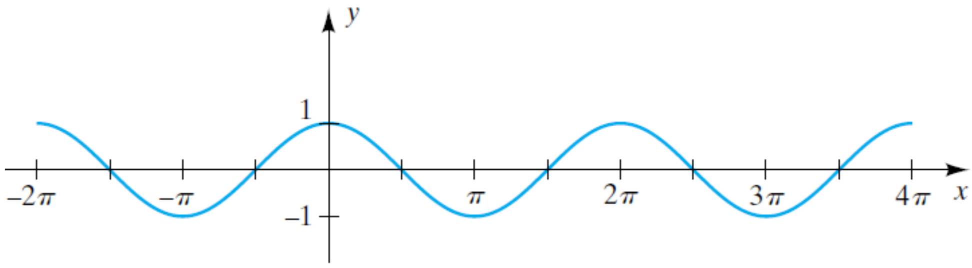
b) $g(x) = \frac{1}{x}$

c) $h(x) = x + 1$

d) $i(x) = \sqrt{x}$

Définition :
Une fonction f est **périodique** s'il existe un nombre $p > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et pour tout x de l'ensemble de définition de f, on ait $f(x + kp) = f(x)$.
Lorsque f n'est pas constante, on définit la **période** p comme le plus petit nombre réel strictement positif p tel que $f(x + p) = f(x)$.

Exemple : $f(x) = \cos(x)$ est périodique de période 2π



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Caractéristiques d'une fonction

Zéro

Le nombre a est un *zéro* de la fonction f si $\boxed{f(a) = 0}$

Parité

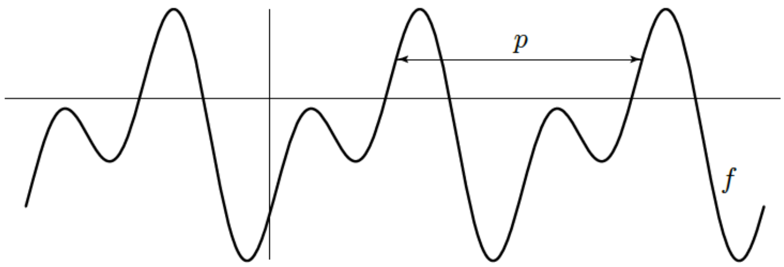
La fonction f est *paire* si $\boxed{f(-x) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$.
La représentation graphique de f est alors symétrique par rapport à l'axe des y.

La fonction f est *impaire* si $\boxed{f(-x) = -f(x)}$ pour tout $x \in D_f$.
La représentation graphique de f est alors symétrique par rapport à l'origine.

Périodicité

La fonction f est *périodique* s'il existe un nombre $p > 0$ tel que $\boxed{f(x+p) = f(x)}$ pour tout $x \in D_f$. La *période* de f est le plus petit $p > 0$ vérifiant cette propriété.

La représentation graphique de f est alors invariante par translation de vecteur $\binom{p}{0}$.



1.3 Opérations[3]

Définition : On considère un nombre réel λ et une fonction f de A vers $\mathbb{R}$. On note λf la fonction définie par $\begin{cases} \lambda f : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda \cdot f(x) \end{cases}$ Notation: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Remarque : $(-1)f$ est noté $-f$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $\lambda = 5$

On a: $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) =$

Définition : On considère deux fonctions f et g de même source A. On appelle **somme de f et g** la fonction définie par $\begin{cases} f + g : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{cases}$ Notation : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Pour définir la **soustraction** de deux fonctions : $f - g = f + (-g)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) =$

et $(f-g)(x) = f(x) - g(x) =$

Définition : On considère deux fonctions f et g de même source A.

On appelle **produit de f et g** la fonction définie par $\begin{cases} f \cdot g : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) \end{cases}$

Notation : $(f \cdot g)(x) = fg(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a: $(f \cdot g)(x) = fg(x) = f(x) \cdot g(x) =$

Définition :
On considère deux fonctions f et g de même source A. La fonction g n'admet pas de zéro dans A. On appelle **quotient** de f par g la fonction définie par $\begin{cases} \frac{f}{g} : A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{cases}$ Notation : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} =$

[3] CRM n°25, p. 9 & p.17-19

Définition : On considère une fonction f de A vers B et une fonction g de B vers C.

On appelle **composée de f et de g** notée $g \circ f$, lu « g rond f » définie par $\begin{cases} g \circ f : A \to C \\ x \mapsto g\big(f(x)\big) \end{cases}$

Notation : $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Exemple : $f(x) = x^2 + 3$ et $g(x) = 2x - 4$

On a :

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) =$

et $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) =$

On remarque donc que :

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Opérations sur les fonctions

Addition	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Soustraction	$f-g$	$(f-g)(x) = f(x)-g(x)$
Multiplication	$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$
Multiplication par un réel λ	$\lambda \cdot f$	$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$
Division	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
Composition	$g \circ f$	$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

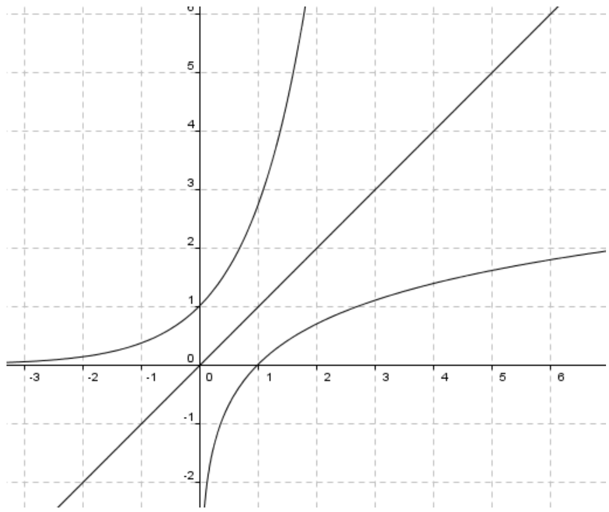
1.4 Réciproque[4]

Définition : Soit $f\ :\ A \to B$ une fonction bijective. On appelle **réciproque de f** (noté ${}^{r}f$ ou f^{-1}) la fonction bijective allant de B vers A qui vérifie la condition suivante :

$$\forall x \in A \text{ et } \forall y \in B: y = f(x) \Leftrightarrow x = {}^{r}f(y)$$

Les graphiques de f et de ${}^{r}f$ présentent une symétrie par rapport à la fonction identité.

Exemple : $f(x) = e^{x}, {}^{r}f(x) = \ln(x)\,, g(x) = x$



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Fonction réciproque

Si $f\colon A \to B$ est une fonction bijective, alors la *fonction réciproque* de f est la fonction ${}^{r}f\colon B \to A$ définie par $\boxed{{}^{r}f(y) = x \;\Leftrightarrow\; y = f(x)}$

Lorsque le repère est orthonormé, les représentations graphiques des fonctions f et ${}^{r}f$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$

$({}^{r}f \circ f)(x) = x$ pour tout $x \in A$	$(f \circ {}^{r}f)(y) = y$ pour tout $y \in B$

- ***Analyse série 1***
- ***CRM n°25 ex p.12 à 20***

[4] CRM n°25, p 10-11 & p.19-20

2. Limites

2.1 Définition[5]

La notion de limite est la **notion fondamentale de l'analyse**, car tous les concepts de base de l'analyse (dérivées, intégrales, suites et séries) sont définis à l'aide des limites.

La notion de limite est liée aux valeurs que peuvent prendre les images de nombres très proches d'un nombre fixé (plus petits et plus grands que celui-ci).

Regardons comment se traduit cette notion sur un exemple numérique.

2.1.1 Exemple numérique : $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

Déterminer son domaine de définition : $D_f =$

Comme f n'est pas définie en 1 (i.e. : $f(1)$ n'existe pas), nous désirons connaître les valeurs de $f(x)$ lorsque x s'approche du nombre 1. Nous allons calculer l'image, par f, de nombres de plus en plus proches de 1.

$f(0{,}5) =$	$f(1{,}5) =$
$f(0{,}9) =$	$f(1{,}1) =$
$f(0{,}99) =$	$f(1{,}01) =$
$f(0{,}999) =$	$f(1{,}001) =$

Nous remarquons que lorsque x s'approche de plus en plus de 1, l'image de $f(x)$ s'approche de plus en plus près de .

Nous dirons que le nombre est la limite de la fonction f lorsque x tend vers 1.

Nous noterons :

$$\lim_{x \to 1} f(x) =$$

Finalement, l'idée essentielle de la notion de limite peut s'exprimer ainsi :

La limite d'une fonction en un point donné est le nombre duquel s'approchent les images $f(x)$ lorsque x s'approche de plus en plus près du point donné.

[5] CRM n°25, p. 29-30

2.1.2 Exemples de détermination à l'aide d'un graphique

But : Visualiser la limite d'une fonction en un point, à l'aide du graphique de la fonction.

Exercice : Pour chaque fonction, numérotée de 1) à 6), traitez les points suivants sur des feuilles quadrillées *(une page par fonction)* :

a) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

b) Que vaut l'image de 3 ?

c) Représentez graphiquement cette fonction (un graphique différent par fonction)

d) Lorsque x s'approche de 3 en prenant des **valeurs inférieures** à 3, $f(x)$ s'approche-t-elle d'un nombre précis ? *(Prendre :* $x = 2{,}9, x = 2{,}99$ *et* $2{,}999$*)*

Si non, comment évoluent les valeurs de $f(x)$?

e) Lorsque x s'approche de 3 en prenant des **valeurs supérieures** à 3, $f(x)$ s'approche-t-elle d'un nombre précis ? *(Prendre : x=* $3{,}1, x = 3{,}01, x = 3{,}001)$

Si non, comment évoluent les valeurs de $f(x)$?

f) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ Existe-t-elle ? *(Oui si d) =e), non si d)≠ e))*

Si oui, que vaut-elle ?

g) D'après la représentation graphique, cette fonction vous semble-elle "continue en 3" *(pas interrompue, il n'y a a pas besoin de lever le crayon pour dessiner)* ?

1) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

2) $f(x) = x + 3$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, si\ x \neq 3 \\ 4, si\ x = 3 \end{cases}$

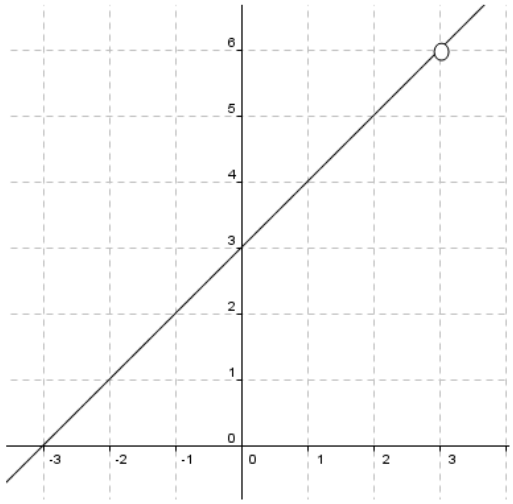
4) $f(x) = \begin{cases} x + 3, si\ x \geq 3 \\ x + 2, si\ x < 3 \end{cases}$

5) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

6) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

Solutions de l'exercice :

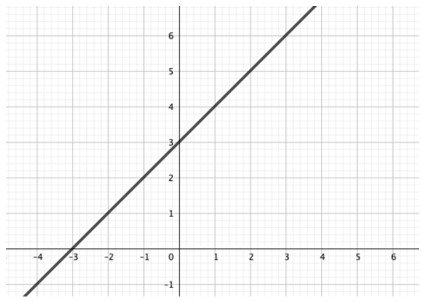
1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}}$



   a) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{3\}$
   b) $f(3)$ N'existe pas
   c)
   d) Lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6
   e) Lorsque x s'approche de plus en plus près de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6.
   f) La limite existe puisqu'à gauche et à droite, la fonction s'approche de la même valeur. On peut donc écrire : $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$
   g) Cette fonction n'est pas continue en 3 (il y a un "trou")

---

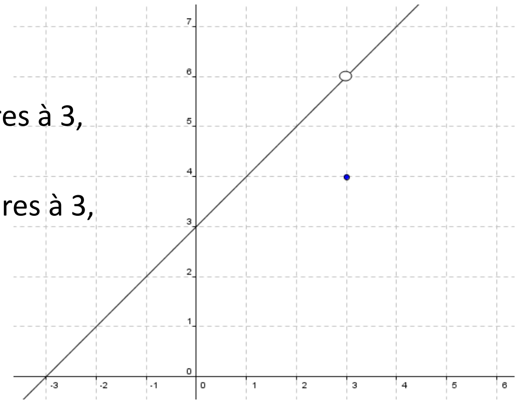
2. $\boldsymbol{f(x) = x + 3}$



a) $D_f = \mathbb{R}$ b) $f(3) = 3 + 3 = 6$
d) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6
e) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6
f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$
g) cette fonction est continue en 3

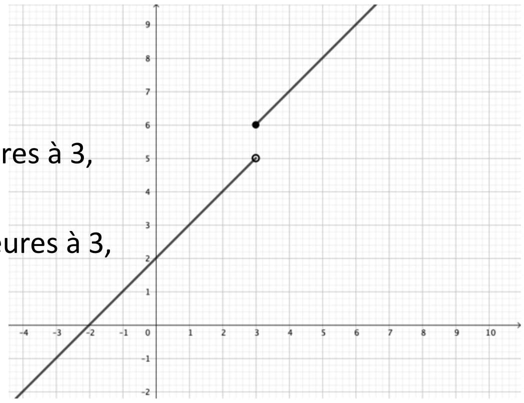
---

3. $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, si\ x \neq 3 \\ 4, si\ x = 3 \end{cases}}$



a) $D = \mathbb{R}$ b) $f(3) = 4$
d) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$s'approche de plus en plus près de 6
e) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6
f) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ existe et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$
g) cette fonction n'est pas continue en 3
(il y a un "trou", même si $f(3)$ existe)

4. $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x+3, si\ x\geq 3 \\ x+2, si\ x<3\end{cases}}$



a) $D=\mathbb{R}$

b) $f(3)=3+3=6$

d) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 5

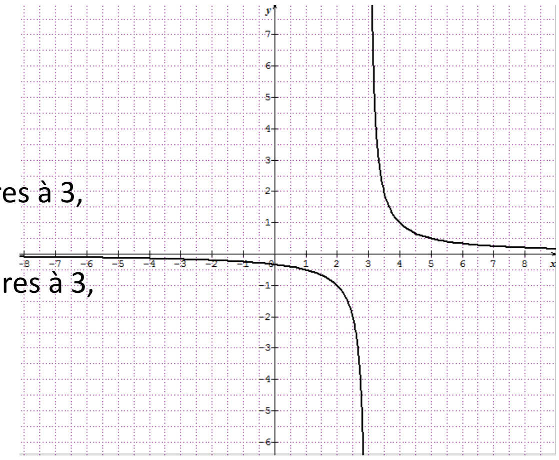
e) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6.

f) $\underset{x\to 3}{lim} f(x)$ n'existe pas

g) cette fonction n'est pas continue en 3. (il y a un "saut")

---

5. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x-3}}$



a) $D=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

b) $f(3)$ n'existe pas

d) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$ prend des valeurs négatives de plus en plus "grandes"

e) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus "grandes".

f) $\underset{x\to 3}{lim} f(x)$ n'existe pas

g) cette fonction n'est pas continue en 3.

---

6. $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}}$

a) $D=\mathbb{R}\backslash\{3\}$

b) $f(3)$ n'existe pas

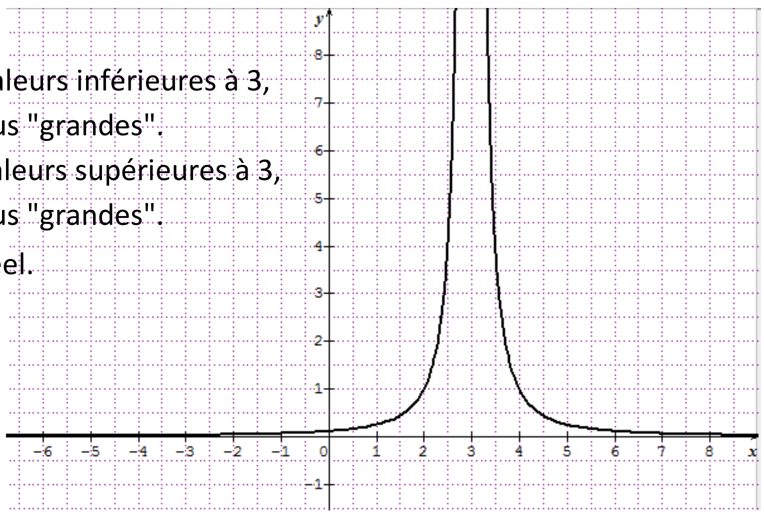
d) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs inférieures à 3, $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus "grandes".

e) lorsque x s'approche de 3 en prenant des valeurs supérieures à 3, $f(x)$ prend des valeurs positives de plus en plus "grandes".

f) $\underset{x\to 3}{lim} f(x)$ existe, mais n'est pas un nombre réel.

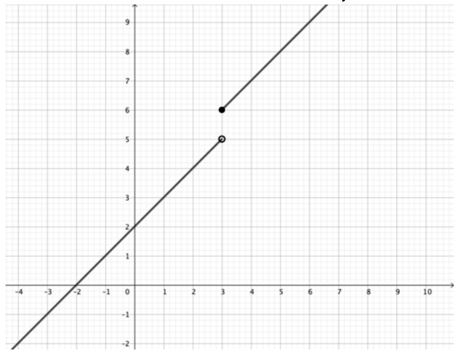
On notera: $\underset{x\to 3}{lim} f(x)=\infty$

h) Cette fonction n'est pas continue en 3



➢ ***Analyse Série 2 & CRM n°25 p.46 ex 2.1***

2.2 Limites latérales[6]



Considérons à nouveau la fonction $f(x) = \begin{cases} x+3, si\ x \geq 3 \\ x+2, si\ x < 3 \end{cases}$

Nous avons constaté que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ n'existe pas.

Par contre :

a) Si on restreint le domaine de f aux nombres inférieurs à 3 (i.e. : $]-\infty;3[$),
alors $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 5.

On dit que **5 est la limite à gauche de f en 3** et on note :

$$\lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x)=5 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x\to 3^-} f(x) = 5$$

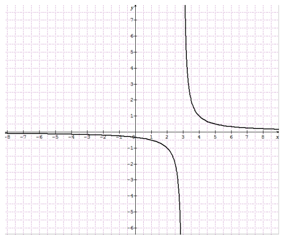
b) Si on restreint le domaine de f aux nombre supérieurs à 3 (i.e. : $]3;\infty[$),
alors $f(x)$ s'approche de plus en plus près de 6.

On dit que **6 est la limite à droite de f en 3** et on note :

$$\lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f(x)=6 \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$

Autre exemple : $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Au sens strict de la définition donnée au bas de la page … , f n'a pas de limite à gauche ou à droite en 3, car ∞ n'est pas un nombre réel.

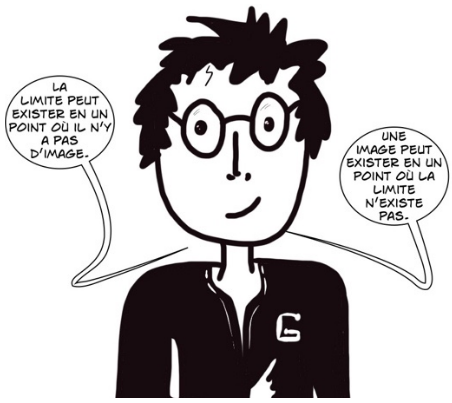


Par extension de la notion de limite à ce type de situation, on écrira tout de même :

$$\lim_{\substack{x\to 3 \\ x<3}} f(x)=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 3 \\ x>3}} f(x)=\infty$$

Remarques fondamentales : Nous avons pu maintenant constater les 4 faits essentiels suivants :

1. La notion de limite est une notion **locale**.
2. Pour décider si une fonction admet une limite en un point a, on considère des nombres très proches de a, mais **différents de a**.
3. Il est possible que la limite d'une fonction en un point n'existe pas. Mais si cette limite existe, alors elle est **unique**.
4. Pour que la limite d'une fonction en un point existe, il faut que les **limites à gauche** et à **droite** existent et soient égales.
5. Les notions de limite en un point a et d'image de a sont indépendantes.



[6] CRM n° 25, p. 31

Définition de ***la limite*** :

Soit une fonction f définie au voisinage de a (autour de a, mais pas forcément en a). Nous écrivons $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$ Et nous énonçons "la limite de $f(x)$, quand x tend vers a, est égale à L" Si pour des valeurs de x suffisamment proches de a (à gauche et à droite), mais différentes de a, $f(x)$ se rapproche aussi près que l'on veut de L.

Remarques :

a) La fonction f n'est pas forcément définie pour $x = a$.
La seule chose qui est importante est que f soit définie "tout à côté" de a, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.
La valeur de a ne doit pas nécessairement appartenir au domaine de définition de f.
Dans la majorité des cas, $a \notin D_f$.

b) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ne veut pas dire que $f(a) = L$.

c) La notion de limite nous permet, entre autres, d'étudier comment se comporte une fonction pour des valeurs de x qui sont proches d'une valeur problématique.

d) La définition rigoureuse de la limite est la suivante[7]:
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie : $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \; tel\ que, \forall x, 0 < |x - a| < \delta, alors\ |f(x) - L| < \epsilon$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Limite

On note f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a, sauf éventuellement en a.

Le nombre L est la *limite* de f en a si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment proche de a $(x \neq a)$.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Formellement, le nombre L est la limite de f en a si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

➢ ***Analyse Série 2***

[7] Cette définition ne sera pas demandée dans les travaux

2.3 Propriétés[8]

Nous allons maintenant calculer des limites en appliquant des propriétés des limites

Propriétés des limites :

Soient f et g deux fonctions et λ une constante.

Supposons que les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent.

Alors :

1. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \lambda = \lambda}$ *La limite d'une constante est la constante elle-même.*
2. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)}$ *La limite d'une somme est égale à la somme des limites.*
3. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \big(\lambda\cdot f(x)\big) = \lambda\cdot \lim_{x\to a} f(x)}$
4. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)}$ *La limite d'un produit est égale au produit des limites.*
5. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}\ si\ \lim_{x\to a} g(x) \neq 0}$ *La limite d'un quotient est égale au quotient des limites.*
6. $\boldsymbol{\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}}$ *La limite d'une racine nième est la racine nième de la limite.*

Remarque :

Pour une fonction polynômiale ou rationnelle f, calculer une limite au point d'abscisse $x=a$, lorsque $x=a$ n'est pas une valeur particulière de cette fonction ($a\in D_f$), revient simplement à évaluer f en $x=a$ (càd: calculer son image en a). On peut donc rajouter une propriété :

7. Si f est une fonction polynômiale ou rationnelle et a un point de son domaine de définition, alors

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Les fonctions qui jouissent de cette propriété sont dites continues en a et seront étudiées au paragraphe 2.4.

[8] CRM n°25, p. 32

Exercice : Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 4} 10 =$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (2x^2 - 3x + 4) =$

Attention aux parenthèses :

$\lim\limits_{x \to -1} (2x^2 - 3x + 4) \neq \lim\limits_{x \to -1} 2x^2 - 3x + 4$

c) $\lim\limits_{x \to a} (2x^2 - 3x + 4) =$

d) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 - 1)(x + 2) =$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x} =$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Propriétés

On note f et g des fonctions dont la limite en a existe et λ un nombre réel.

$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
$\lim\limits_{x \to a} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad$ si $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

➢ ***Analyse Série 3 ex 1 à 3***

Méthodes de calcul permettant de déterminer une limite

Constat : Il n'est pas toujours facile de représenter une fonction ou de tirer des enseignements précis d'une représentation effectuée.

But : Trouver des méthodes algébriques permettant de déterminer la valeur d'une limite, lorsqu'elle existe.

Lorsque la fonction considérée est continue au point considéré, calculer la limite en ce point est très facile, car cela revient à calculer l'image de ce point (cf. propriété 7, p. 16).

Lorsque la fonction n'est pas continue au point considéré, la difficulté réside dans le fait que nous aboutissons à une **forme indéfinie ou indéterminée** , c'est-à-dire une expression qui n'est ***pas un nombre réel.***

Exemples :

A) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$ pour $x = 3$, on obtient une forme du type $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (page suivante)

B) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x+6}{x-2}$ pour $x = 2$, on obtient une forme du type $\frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{0}}$ $(\neq 0)$ (Voir §2.5)

C) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3+3}{x^2+x}$ pour x "=" ∞, on obtient une forme du type $\frac{\infty}{\infty}$ (voir §2.6)

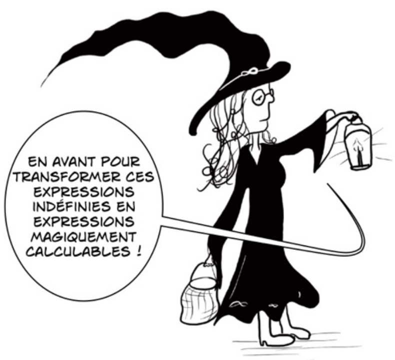
D) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2 - x)$ pour x "="∞, on obtient une forme du type $\infty - \infty$

Calculer une limite reviendra en général à **lever l'indétermination**, à savoir transformer la forme indéterminée en une expression calculable.

Pour y parvenir, nous utiliserons deux moyens : le calcul algébrique ainsi que des théorèmes (que nous ne démontrerons pas) relatifs à la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions.

Pour introduire ces calculs, nous partirons des diverses formes indéterminées vues ci-dessus, que nous traiterons chaque fois à l'aide d'un ou plusieurs exemples-types.

Pour chaque exemple-type, nous indiquerons l'idée de départ, puis nous effectuerons le calcul ; ensuite nous énoncerons les théorèmes utilisés et enfin nous traiterons deux exercices relatifs à l'exemple-type traité.



A) Forme indéterminée $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

1er cas : la fonction dont on cherche à calculer la limite est une fraction rationnelle

Exemple : $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = "\frac{3^2-9}{3^2-3\cdot 3}" = "\frac{0}{0}"$

Idée : comme x^2-9 et x^2-3x s'annulent pour $x=3$, ces deux polynômes sont *divisibles* par $(x-3)$ et donc *factorisables* par $(x-3)$.

Calcul :

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x} = \lim_{x\to 3} \frac{x+3}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 3} x} = \frac{6}{3} = 2$$

Théorèmes utilisés :

1. La limite d'un quotient de deux fonctions vaut le quotient des limites, pour autant que ces limites existent.

c.à.d. : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

2. La limite d'une somme de deux fonctions vaut la somme des limites, pour autant que ces limites existent.

c.à.d. : $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

Exercices :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x^2+2x} =$

b) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+x-12}{x^2-2x-24} =$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-6} =$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x+1} =$

- ***Analyse Série 3 ex 4 & 5***

2ème cas : la limite à calculer comporte une ou plusieurs racines

Exemple : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$

Idée : comme l'indétermination provient de $\sqrt{x}-1$, il faut essayer de transformer $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$ de sorte à d'abord "éliminer" la racine du dénominateur et ensuite pouvoir simplifier numérateur et dénominateur. Pour Cela, il faut multiplier numérateur et dénominateur par le **conjugué** de $\sqrt{x}-1$, à savoir $\sqrt{x}+1$.

Calcul :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-(1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = (1+1)(\sqrt{1}+1) = 4$$

Théorème utilisé :

3. La limite d'un produit de deux fonctions vaut le produit des limites pour autant que ces limites existent.

c.à.d. : $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Exemples :

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} =$

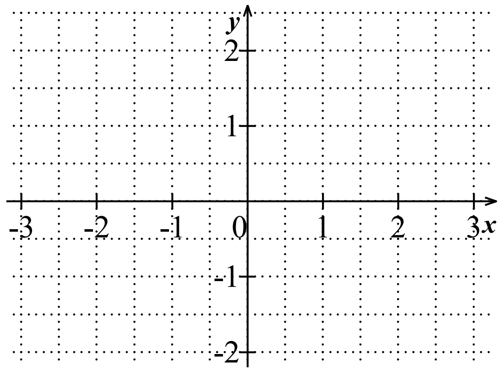
b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{1-\sqrt{x-2}} =$

➢ ***Analyse Série 3 ex 6***

3ème cas : calcul par la limite à droite et limite à gauche

Parfois, il est plus aisé d'obtenir certaines limites en calculant les limites à gauche et à droite.

Exemple : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$



Rappel : $|x| = \begin{cases} x; si\ x \geq 0 \\ -x; si\ x < 0 \end{cases}$

Calcul :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

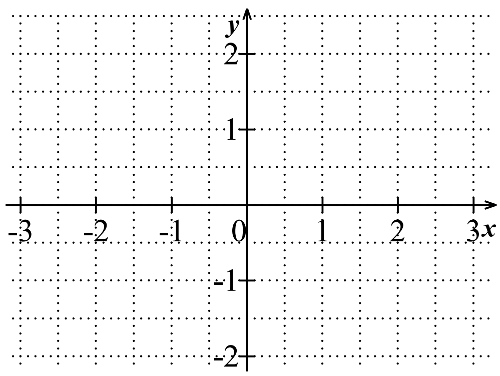
Les limites à gauche et à droite existent mais ne sont pas égales. Par conséquent, la limite en question n'existe pas. Le graphique de cette fonction confirme les limites que nous avons obtenues.

Propriété utilisée :

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ si et seulement si } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ et } \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

Autre exemple : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ avec $f(x) = \begin{cases} x-1, si\ x < 2 \\ -x+3, si\ x \geq 2 \end{cases}$

Calcul :



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$

Remarque : les limites à gauche et à droite existent et sont égales. Par conséquent, la limite en question existe et est égale à 1. Le graphique de cette fonction confirme les limites que nous avons obtenues.

- ***Analyse Série 3 ex 7 & 8***

2.4 Continuité[9]

Constat : Les exemples graphiques des pages 11 à 13 nous permettent de donner une définition "intuitive" de la continuité d'une fonction en un point donné, à savoir : f est continue en a si f peut être tracée sans lever le crayon en a.

But : Établir une définition précise de la continuité d'une fonction en un point.

Moyen : A l'aide des exemples des pages 11 à 13, déterminer les causes de discontinuité d'une fonction en un point.

Analyse des exemples des pages 11 à 13 :

a) Dans les exemples 1), 5) et 6), f n'est pas continue en 3, car il y a un "trou" en 3, c'est-à-dire que l'image de 3 n'existe pas

b) Dans l'exemple 3), il y a aussi un "trou" en 3 mais il y a une image et pourtant f n'est pas continue en 3.

c) Dans l'exemple 4), il n'y a pas de "trou" mais il y a un saut qui est la cause de la discontinuité de f en 3.

Donc si l'image de 3 n'existe pas, alors f n'est pas continue en 3. Si l'image de 3 existe alors soit f est continue en 3 (cf exemple n°   ), soit f est discontinue en 3 (cf exemples n°   ,   )

1ère Conclusion :

Question : Dans l'exemple 4) comment le saut en 3 peut-il être décrit en terminologie mathématique ?

2ème Conclusion :

Question : D'après les deux premières conclusions, peut-on dire qu'une fonction est continue en 3, si l'image existe et si la limite existe ?

3ème Conclusion :

[9] CRM n°25, p. 33-34

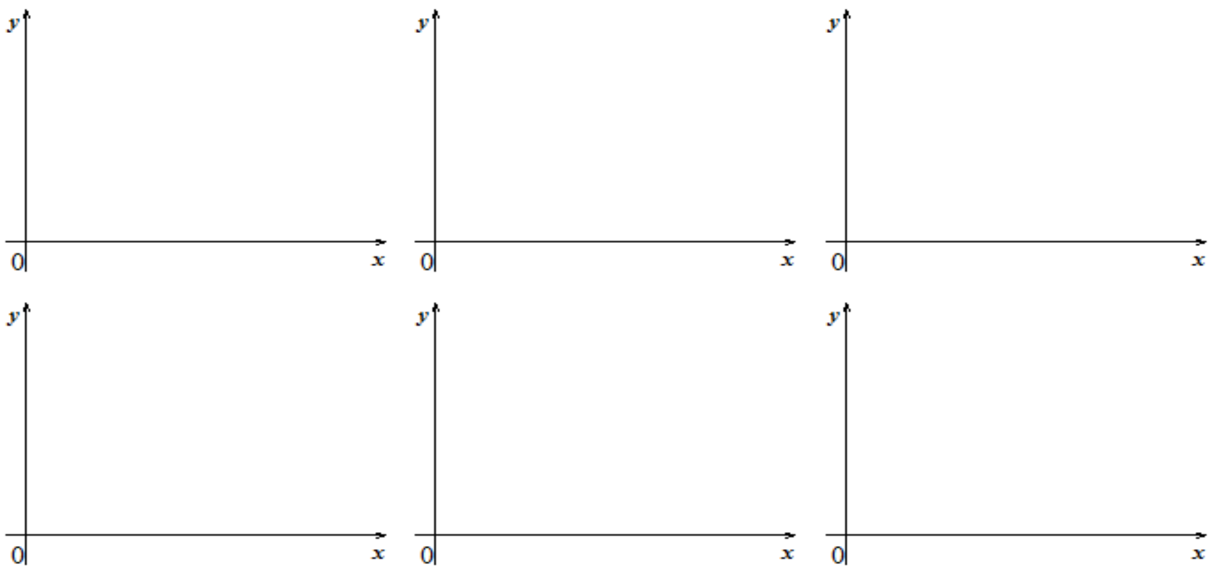
A partir des trois conclusions précédentes, appliquées à une fonction f dont on cherche à déterminer la continuité en un point appelé a, nous pouvons établi la définition mathématique de la continuité de f en a :

> *Définition :*
> Soit f une fonction, $a \in D_f$
> La fonction $\boldsymbol{f}$ **est continue en $\boldsymbol{a}$** si
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

> *Définition :* Une fonction f est **continue sur un intervalle ouvert** $I =]u; v[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle

> *Définition :* Une fonction f est **continue sur un intervalle fermé** $I = [u; v]$ si elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]u; v[$ et si $\lim_{x\to u^+} f(x) = f(u)$ et $\lim_{x\to v^-} f(x) = f(v)$

Remarque : D'un point de vue géométrique, nous pouvons penser à une fonction continue en tous les points d'un intervalle comme à une fonction dont la courbe représentative ne présente aucune interruption. Le graphique peut être tracé sans jamais lever le crayon du papier.



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Continuité

On note f une fonction définie dans un intervalle ouvert contenant a.

La fonction f est *continue* en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

➢ ***Analyse Série 4***

Liste de fonctions continues

Les fonctions :
- Polynomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ $\quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty;\infty[$
- Sinus, cosinus $f(x) = \sin(x)\,;\, g(x) = \cos(x)$ $\quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty;\infty[$
- logarithmiques $f(x) = \log_a(x)$ $\quad D_f = \mathbb{R}_+^* =]0;\infty[$
- exponentielles $f(x) = a^x$ $\quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty;\infty[$
- Racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}_+ = [0;\infty[$
- Valeur absolue $f(x) = |x|$ $\quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty;\infty[$

sont continues sur leurs domaines de définition et donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pour $a \in D_f$

Montrons sur quelques exemples comment s'applique cette définition de la continuité :

a) $\lim\limits_{x \to 2} 5 =$
car la fonction $f(x) =$ est continue partout. La limite d'une constante est

b) $\lim\limits_{x \to -1} (2x - 1) =$
car la fonction $f(x) =$ est continue en -1 parce que c'est une fonction polynômiale qui est continue sur

c) $\lim\limits_{x \to a} (x - a) =$
car la fonction $f(x) =$

d) $\lim\limits_{x \to \pi} x^2 =$
car la fonction $f(x) =$

e) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos(x) =$
car la fonction $f(x) =$

f) $\lim\limits_{x \to 0} e^x =$
car la fonction $f(x) =$

g) $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \frac{1}{x} =$
car la fonction $f(x) =$

Propriétés des fonctions continues :

<u>Si</u> f et g sont des fonctions continues en a et si λ est une constante,
<u>Alors</u> les fonctions suivantes sont aussi continues en a :

a) $f + g$ b) $f - g$

c) $\lambda \cdot f$ d) $f \cdot g$ e) $\frac{f}{g}$ $si\ g(a) \neq 0$

f) <u>Si</u> f est une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$,
<u>alors</u> la fonction $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration de a) : Par hypothèse, nous avons $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$

Montrons que $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = (f+g)(a)$:

$$\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a) \qquad \square$$

Justifications :

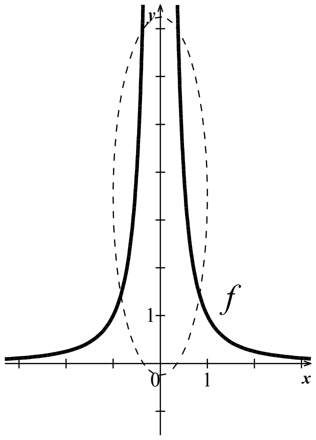
Exercice : Démontrer une autre propriété

2.5 Extensions de la notion de limite

Nous examinerons dans ce paragraphe le comportement des fonctions, en particulier, si le graphique s'approche d'une asymptote (droite).

2.5.1 Les limites infinies et asymptotes verticales[10]

Exemple : Comportement de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ au voisinage de 0



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) =$$

Ceci ne signifie pas que nous considérons l'infini comme un nombre, ni que la limite existe. Cette notation exprime que $\frac{1}{x^2}$ peut devenir aussi grand que l'on veut en prenant x suffisamment proche de 0.

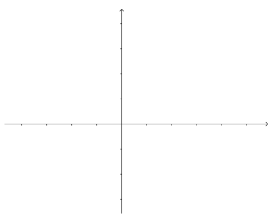
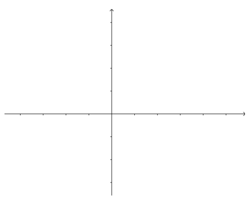
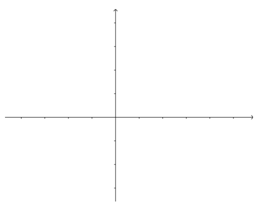
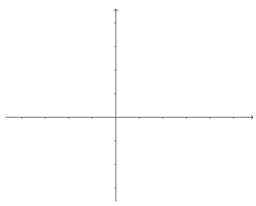
Définition limite infinie :

Soit une fonction f définie au voisinage de a (autour de a, mais pas forcément en a).
On écrit :

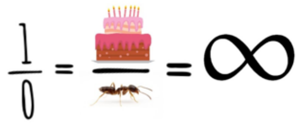
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment proche de a (mais non égal à a).
Cette expression est souvent lue comme suit: "$f(x)$ tend vers l'infini lorsque x tend vers a"

On définit de manière semblable :

$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$
			

[10] CRM n°25, p. 40-42



2.5.2 Limites infinies[11]

B) Forme « $\frac{A}{0}$ »

Exemple : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+6}{x-2}$

Idée : lorsque x est très proche de 2, $(x-2)$ est très proche de 0 et $(x+6)$ est très proche de 8. Or, lorsqu'on divise un nombre non nul par un nombre très proche de 0, le résultat est un nombre très grand. Donc, lorsque x est très proche de 2, $\frac{x+6}{x-2}$ est un nombre très grand.

Mais ce nombre n'a peut-être pas le même signe suivant que x s'approche de 2 par la gauche ou par la droite.

Il faut donc déterminer les limites à gauche et à droite en 2

Calcul :

$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+6}{x-2} = \frac{8}{0^+}$ donc très grand positif: $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x+6}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+6}{x-2} = \frac{8}{0^-}$ donc très grand négatif: $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+6}{x-2} = -\infty$

Vérification avec un tableau de signe de $\frac{x+6}{x-2}$:

		-6		2	
$x+6$					
$x-2$					
$\frac{x+6}{x-2}$					

Comme les limites à gauche et à droite en 2 sont différentes, la limite en 2 n'existe pas.

Exercices :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x+6}{(x-2)^2} =$

b) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{3-x}{(x-3)^2} =$

➢ ***Analyse Série 5 exercices 1***

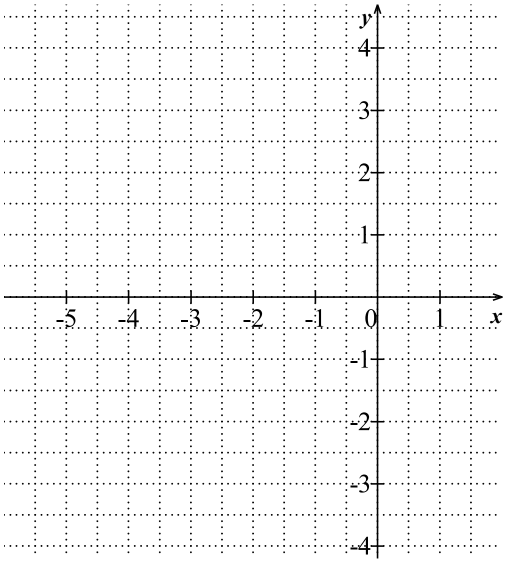
[11] CRM n°25, p. 37-38

Définition asymptote verticale

La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale (A.V.) de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est vérifiée :

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

Exemple : Considérons la fonction rationnelle : $f(x) = \frac{2}{x+3}$ $D_f =$

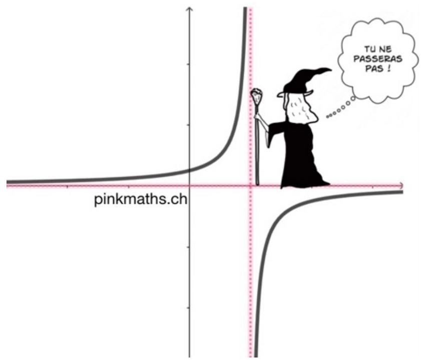


Remarques :

a) Il n'est pas suffisant de constater que $a \notin D_f$ pour affirmer que f possède une asymptote verticale en $x = a$

Exemple : $f(x) = \frac{(x-2)(x+5)}{x-2}$ n'est pas définie en $x = 2$, mais son graphique est une droite avec un "trou".

$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = 7 \neq \pm\infty$



b) Le graphique d'une fonction ne coupera jamais une asymptote verticale, si $a \notin D$.

(Si $a \in D$, alors prenons l'exemple $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, si\ x > 0 \\ 3, si\ x \leq 0 \end{cases}$, l'$AV$ en $a = 0$ est coupée au point $(0; 3)$).

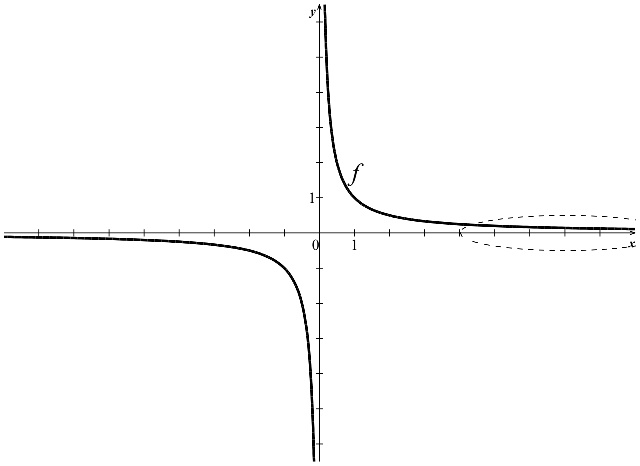
c) Autres fonctions qui présentent des asymptotes verticales :

$f(x) = \tan(x)$ et $g(x) = \log(x)$

2.6 Formes indéterminées et asymptotes affines[12]

2.6.1 Limites en l'infini

Exemple : Étudions le comportement de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x devient grand.



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$

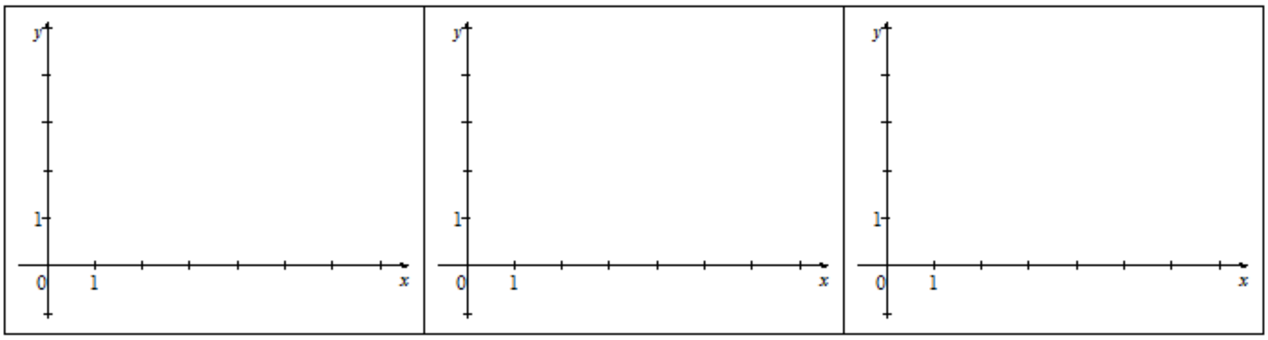
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$

Nous pouvons observer que, plus les valeurs de x sont grandes, plus les valeurs correspondantes de $f(x)$ sont proches de 0. Cette situation s'écrit symboliquement : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Définition limite à l'infini

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a;\ +\infty[$ (respectivement $]-\infty; a]$). On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \ \left(respectivement \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L\right)$ Si $f(x)$ est arbitrairement proche de L dès que x est suffisamment grand. Cette expression est souvent lue comme suit : "la limite de $f(x)$ pour x tendant vers l'infini est L".

Le graphique de f peut s'approcher de différentes façons de la droite $y = L$



12 CRM n° 25, p.40-42

2.6.2 Méthode de calcul pour les limites en l'infini[13]

C) Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Exemple : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3+3}{x^2+x}$

Idée : Comme $x \to \infty$ (i.e. x est très grand positif), les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur "l'emportent" sur les autres termes (comparés à eux, les autres termes sont "négligeables")

Donc : $\frac{2x^3+3}{x^2+x} \approx \frac{2x^3}{x^2} \approx 2x$ si x est très grand positif

Calcul :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x^3}\right)}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^3}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \infty \cdot \frac{2}{1} = \infty$$

Théorèmes utilisés :

Si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x^n} = 0$ (idem pour $x \to -\infty$)

Si $n \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$

Exercices :

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^3+3} =$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{x^2+x} =$

[13] CRM n°25, p. 39

On remarque rapidement que le comportement à l'infini des fonctions polynômiales ne dépend que de leur terme du plus haut degré. On a donc :

Théorème (de la plus grande puissance) :

Si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,

$$avec\ a_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \{0; 1, \dots; n\} \text{ et } a_n \neq 0$$

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} a_n x^n$

Preuve :

Ainsi, lorsqu'on applique ce raisonnement à des fonctions rationnelles, on obtient le résultat :

Théorème :

Si $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$,

$$avec\ a_i, b_j \in \mathbb{R}, \forall i \in \{0; 1, \dots; n\}\ et\ \forall j \in \{0; 1, \dots; m\} \text{ et } a_n \neq 0 \text{ et } b_m \neq 0$$

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, si\ n = m \\ \infty; si\ n > m \\ 0; si\ n < m \end{cases}$

Preuve :

➢ ***Analyse Série 5 exercice 2***

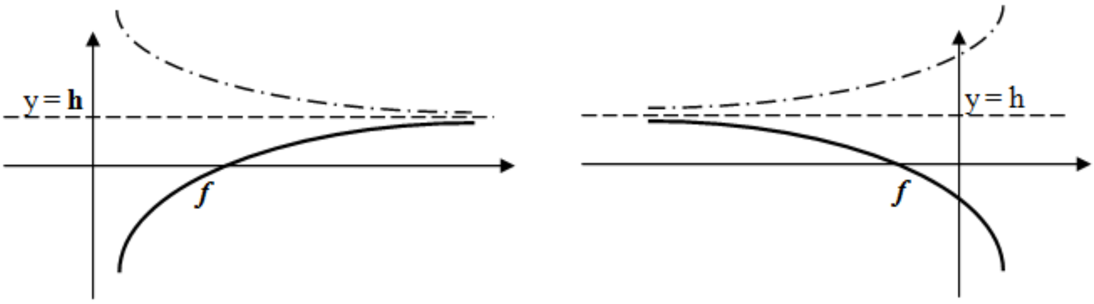
2.6.3 Asymptote horizontale

Définition de l'asymptote horizontale

On dit qu'une droite horizontale d'équation $\boldsymbol{y = h}$ est une **asymptote horizontale** $(A.H.)$ de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite :

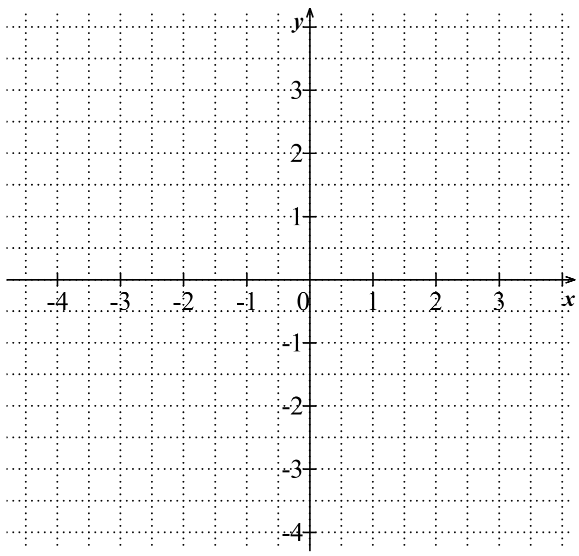
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = h \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = h$$

Illustration :



Exemple : considérons la fonction rationnelle $g(x) = \frac{4x+3}{2x+1}$ $\quad D_g =$

Calculons : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+3}{2x+1} =$



$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{2x+1} =$

On a donc une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y =$

Remarques :

- Une fonction peut avoir une asymptote verticale et horizontale.
  Exemple : $g(x) = \frac{4x+3}{2x+1}$ possède une A.V. en $x = -\frac{1}{2}$ et une A.H. en $y = 2$
- $f(x) = x^2$ n'a pas d'A.V. ni d'A.H.
- Le graphique d'une fonction peut dans certains cas couper une asymptote horizontale.

Comportement autour de l'AH.

Partons d'une fonction $f(x)$ avec une asymptote horizontale $d(x)$.

Quelques questions se posent pour pouvoir représenter graphiquement la fonction f.

- *Comment savoir si la fonction va couper ou non l'asymptote horizontale avant de la suivre ?*

Nous allons simplement résoudre l'équation $\boldsymbol{f(x) = d(x)}$*, où* $d(x)$ *est l'équation de l'asymptote horizontale.*

Exemple : $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2-1}$ *possède une A.H. en* $d(x) =$

- *Mais que se passe-t-il hors de ces points d'intersections ? Est-ce que la fonction se retrouvera au-dessus ou au-dessous de l'asymptote ?*

Idée pour étudier le comportement de f proche de son A.H. : étudier "$f(x) - d(x)$ "
(c'est-à-dire la **différence** entre la fonction et l'équation de l'asymptote horizontale)

Notons cette nouvelle fonction : $\boxed{\boldsymbol{\delta(x) = f(x) - d(x)}}$ (fonction *delta* pour *différence*)

Exemple : Reprenons $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2-1}$

$\boldsymbol{\delta(x) = f(x) - d(x)} = \frac{3x^2+2}{x^2-1} - 3 =$

$\delta(x)$					
Lien entre f et l'AH					

Nous pouvons maintenant étudier une fonction en regroupant toutes les notions étudiées.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x^2-1}$

Points à étudier : 1) D_f *2)* Z_f *3) Tableau de signes 4)AV 5) AH avec* $\boldsymbol{\delta(x)}$ *6) Graphique*

Exemple : $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x^2-1}$ $D_f =$

<u>Zéro(s) :</u>

<u>Étude des signes de f :</u>

x^2+x-4									
x^2-1									
$f(x)$									

<u>Calcul d'A.V. :</u>

<u>Calcul d'A.H. :</u>

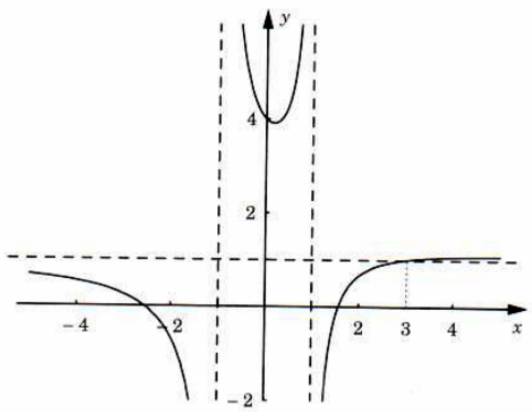
Le comportement de f proche de son A.H. : $\boldsymbol{\delta(x) = f(x) - d(x)}$

$\delta(x) =$

Étudions les signes de cette nouvelle fonction :

		-1		1		3	
$x-3$	-	-	-	-	-	0	+
x^2-1	+	0	-	0	+	+	+
$\delta(x)$	-	/	+	/	-	0	+
Position du graphe de f relativement à l'A.H.	Dessous	/	dessus	/	dessous	coupe	dessus

<u>Graphe :</u>



Remarque importante :

Il est possible de prendre un raccourci dans la recherche de la fonction delta.

Effectuons la division qui est conseillée dans l'écriture de la fonction $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x^2-1}$

On peut écrire $f(x) = \frac{x^2+x-4}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)+(x-3)}{x^2-1} = \frac{x^2-1}{x^2-1} + \frac{x-3}{x^2-1} = 1 + \frac{x-3}{x^2-1} = d(x) + \delta(x)$

2.6.4 Asymptote oblique

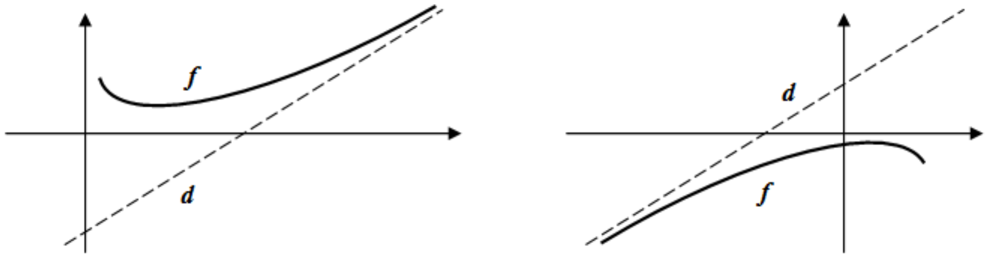
Définition de l'asymptote oblique :

Une droite $d(x) = mx + h$ (m est la pente et h est l'ordonnée à l'origine) est appelée asymptote oblique $(A.O.)$ de la fonction f si l'une au moins des conditions suivantes est satisfaite ;

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - d(x)\big) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - d(x)\big) = 0$$

Autrement dit : Si x tend vers $\pm\infty$, alors la différence entre $f(x)$ et $d(x)$ tend vers 0.

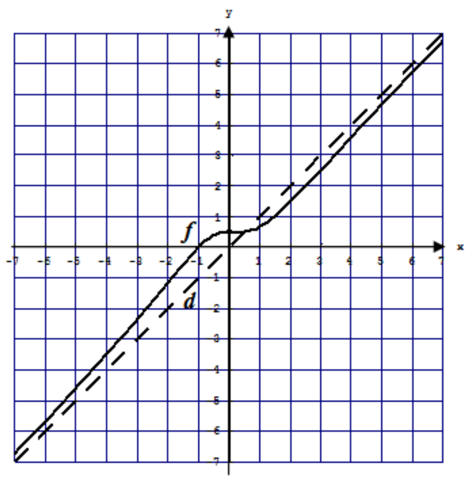
Illustration :



Théorème :

La droite d'équation $d(x) = mx + h$ est une asymptote oblique de la fonction f
$\Leftrightarrow m = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right)$ et $h = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$

Exemple : Soit la fonction rationnelle : $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+2}$ $\qquad D_f =$



Calculons une éventuelle asymptote oblique de la forme $d(x) = mx + h$:

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) =$

$h = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) =$

L'asymptote oblique est donc donnée par la fonction $d(x) = 1 \cdot x + 0 = x$

Remarques :

- Si $m = 0$ et $b \neq \pm\infty$, alors on a une $A.H.$
- Si une fonction possède une A.H. à "droite" et à gauche" alors il n'y a pas d'A.O.
- Le graphique d'une fonction peut dans certains cas couper une asymptote oblique.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Asymptotes

Asymptote verticale

La droite d'équation $x = a$ est une *asymptote verticale* de la fonction f si
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} |f(x)| = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} |f(x)| = +\infty$

Asymptote horizontale

La droite d'équation $y = h$ est une *asymptote horizontale* de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = h$

On traite de manière analogue le cas où x tend vers $-\infty$.

Asymptote oblique

La droite d'équation $y = mx+h$ est une *asymptote oblique* de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + h)) = 0$

Si $f(x)$ ne peut pas s'écrire facilement sous la forme $f(x) = mx + h + \delta(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \delta(x) = 0$, on peut déterminer m et h en calculant :

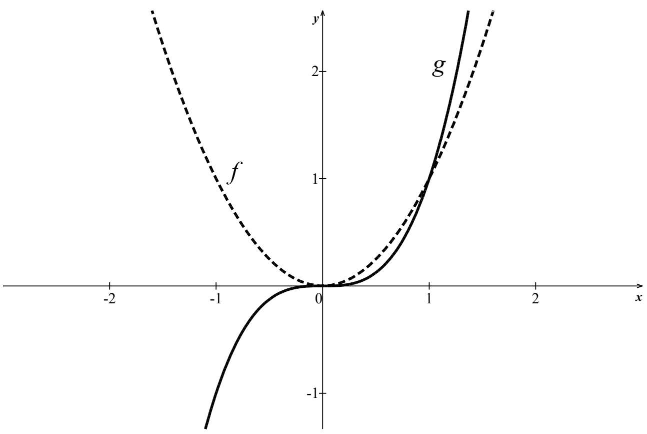
$$\boxed{m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{et} \quad h = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx)}$$

On traite de manière analogue le cas où x tend vers $-\infty$.

➢ **Analyse Série 5 exercice 3**

2.6.5 Autres formes indéterminées :

Exemple : Étudions le comportement des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$ lorsque x devient grand.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) =$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$

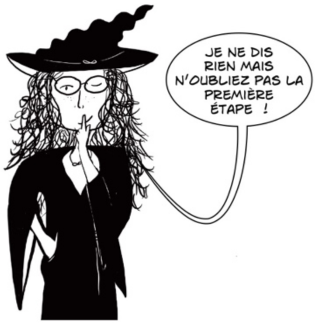
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) =$

Nous pouvons observer que les valeurs de $f(x)$ deviennent grandes lorsque x devient grand. Nous observons aussi que la fonction "au cube" augmente beaucoup plus vite que la fonction "au carré".

Définition limite infinie à l'infini

Soit une fonction f définie sur un intervalle $[a; +\infty[$
On écrit : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$
Si $f(x)$ est arbitrairement grand dès que x est suffisamment grand.
Cette expression est souvent lue comme suit : "la limite de $f(x)$ pour x tendant vers l'infini est l'infini".

D) Forme indéterminée $\infty - \infty$



Exemple : $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x)$

Idée : le terme de plus haut degré l'emporte sur l'autre, car x est supposé très grand.

Calcul :

1ère manière :

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x^2 \cdot \lim_{x \to \infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \infty \cdot 1 = \infty$$

2ème manière :

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x-1) = \lim_{x \to \infty} x \cdot \lim_{x \to \infty} (x-1) = \infty \cdot \infty = \infty$$

Exercices :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^8 - x^3 + 1) =$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^5 - x^4) =$

Remarque générale essentielle :

Les propriétés sur les limites de la p.13 sont subordonnées à l'existence de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Si l'une ou l'autre de ces deux limites n'existe pas, ces théorèmes ne peuvent pas être utilisés.

Exemple : Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x}$ de la manière suivante :

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - x) \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ est incorrect car la seconde limite n'existe pas.

Remarques pour limites à l'infini et les fonctions rationnelles :

- Si le degré du numérateur est plus grand que le degré du dénominateur, on obtient $\pm\infty$
- Si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, on obtient un nombre réel différent de zéro (le coefficient dominant du numérateur divisé par le coefficient dominant du dénominateur)
- Si le degré du numérateur est plus petit que le degré du dénominateur, on obtient 0.

➢ **Analyse Série 5 exercice 4 à 6**

2.7 Limite de $\frac{\sin(x)}{x}$ [Sujet d'oral]

On considère la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ (x est exprimé en radians)

Donner avec une précision de 6 décimales une valeur approchée de $f(x)$ aux abscisses données. Si cela est impossible, expliquer pourquoi ?

$f(-0{,}01) =$

$f(-0{,}001) =$

$f(0) =$

$f(0{,}01) =$

$f(0{,}001) =$

Conjecturer la valeur de la limite (si elle existe)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} =$$

Pour étudier cette limite, nous aurons besoin de deux théorèmes :

Théorème 1 :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ et si $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent, Alors $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

Théorème des deux gendarmes :

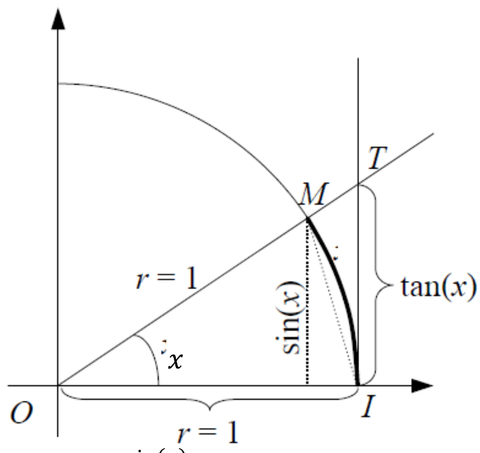
Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle ouvert I contenant a, sauf éventuellement en a. Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ Alors $\lim_{x \to a} h(x) = L$

Rappel de relations trigonométriques utiles dans la preuve qui va suivre et dans les exercices :

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

Montrons que :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad avec\ x\ exprimé\ en\ radians}$$



Preuve : <u>Premièrement :</u> Montrons que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Prenons $x > 0$, mesuré en radians, $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

Idée : Faire une comparaison d'aires

$$Aire\ \Delta OIM \leq Aire\ secteur\ OIM \leq Aire\ \Delta OIT$$

$$\frac{1\cdot\sin(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{1\cdot\tan(x)}{2}$$

$\Rightarrow \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ Multiplie par 2 et $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$ *Divise par* $\sin(x)$ *qui est* > 0

$\Rightarrow 1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x)$ *Inversion*

$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} 1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \geq \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \cos(x)}_{\cos(0)=1}$ *Car les fonctions* $x \mapsto 1$ *et* $x \mapsto \cos(x)$ *sont continues*

$$\Rightarrow 1 \geq \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} \geq 1$$

Selon le théorème des deux gendarmes, nous avons donc $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

<u>Deuxièmement :</u> Montrons que $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Il suffit de remarquer que la fonction est paire :

Si $x > 0$ alors $-x < 0$, donc : $\frac{\sin(-x)}{-x} = -\frac{\sin(x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$

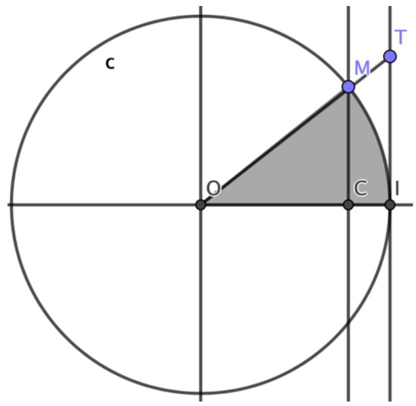
<u>Conclusion :</u> $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ car $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Rappel : Aire secteur d'angle x $[rad]$ est $\frac{x}{2}$ car :

$$\underbrace{\frac{Aire\ secteur}{\pi\cdot r^2}}_{comparaison\ d'aires} = \underbrace{\frac{x}{2\pi}}_{comparaison\ d'angles} \Rightarrow Aire\ secteur = \frac{x}{2\pi}\cdot\pi\cdot r^2, avec\ r = 1$$

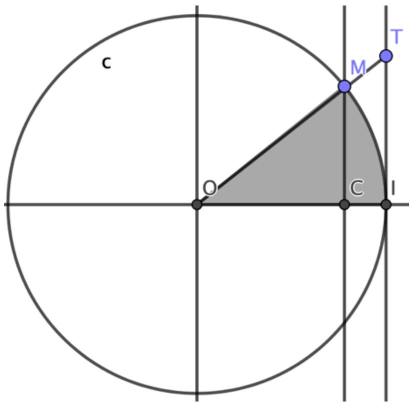
Montrons encore que : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \text{avec } x \text{ exprimé en radians}$

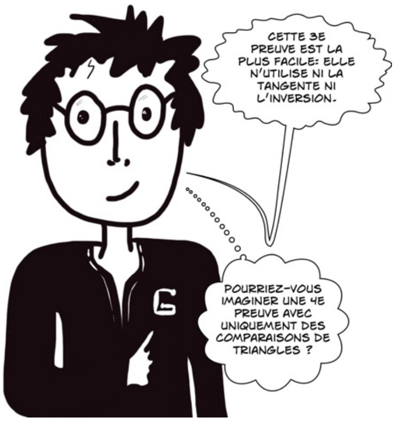
Preuve n°2 : Comparer les aires du triangle $\boldsymbol{OMC}$ avec l'aire du secteur $\boldsymbol{OIM}$ et l'aire du triangle $\boldsymbol{OIT}$. *(à faire en exercice)*



Montrons que : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$ $\quad$ $avec\ x\ exprimé\ en\ radians$

Preuve n°3 : Comparer les aires du secteur de rayon $\boldsymbol{OC}$ et angle $\boldsymbol{x}$ avec l'aire du triangle $\boldsymbol{OCM}$ et l'aire du secteur $\boldsymbol{OIM}$. *(à faire en exercice)* **:**





Exemples de calculs de limites trigonométriques

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x+\pi)}{x+\pi} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(6x)}{3x} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} =$

- ***Livre d'Analyse, CRM n°25, p.48-49 exercices 2.10 2.12***
- ***Série d'Analyse 5 exercices 7 & 8***

Résumé des méthodes de calculs

> Important :
> N'oubliez pas d'évaluer la limite avant toute application de méthode !
> Si vous oubliez cette étape, vous ne saurez pas quelle marche à suive effectuer !

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ ?$$

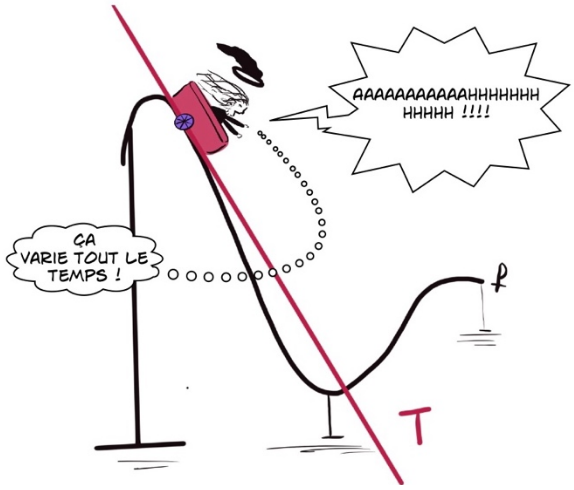
pas d'indéterminée

- $f(a)$
- $\frac{A}{0}$ → $\pm\infty$ *étudier le signe à gauche et droite*
- $\frac{A}{\infty}$ → 0 *théorie du gâteau*

forme indéterminée

- $\frac{0}{0}$
  - $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ → factoriser *simplifier*
  - *x est dans une racine* → *multiplier le numérateur et dénominateur par le conjugué*
  - *f contient une fonction trigonométrique* → *ramener à la forme* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\frac{\infty}{\infty}$
  - $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ → *mise en évidence forcée*
  - *x est dans une racine* → *multiplier le numérateur et dénominateur par le conjugué*
- $\infty - \infty$
  - $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ → *mise en évidence forcée*
  - *x est dans une racine* → *mise en évidence forcée et sortir de la racine*

3. Dérivées



Lorsqu'on utilise une fonction, il est souvent nécessaire de pouvoir **localement** (i.e. : pour des nombres x proches d'un nombre fixé) répondre à des questions telles que : quel est le signe de cette fonction ? Est-elle croissante, décroissante ? ...

Il n'est pas toujours simple d'obtenir la réponse à ces questions, particulièrement lorsque la fonction est compliquée à représenter. Le problème est donc :

Est-il possible de remplacer localement la fonction donnée par une fonction très simple pour laquelle la réponse à ces questions est presque évidente ?

On peut préciser le problème posé, de la manière suivante :

Étant donné une fonction f et un point $(a; f(a))$, quelle est la fonction simple qui "approche le mieux" f pour des nombres x proches de a ?

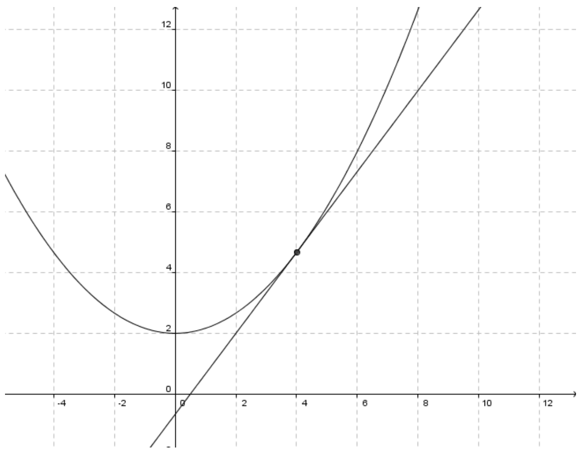
Il semble légitime de penser que la fonction simple cherchée doit satisfaire aux trois exigences suivantes :

1. Elle doit contenir le point $(a; f(a))$.
2. Elle doit être une fonction affine, car sa représentation graphique est une droite, et la droite est le plus simple des graphiques connus.
3. L'écart entre cette fonction et f doit être le plus petit possible pour des nombres x proches de a

Conclusion :

La fonction qui "approche le mieux" la fonction f au point $(a; f(a))$ est la fonction affine tangente à f au point $(a; f(a))$.

Illustration graphique : $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + 2;$ $a = 4;$ $T_{(4;f(4))}(x) = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

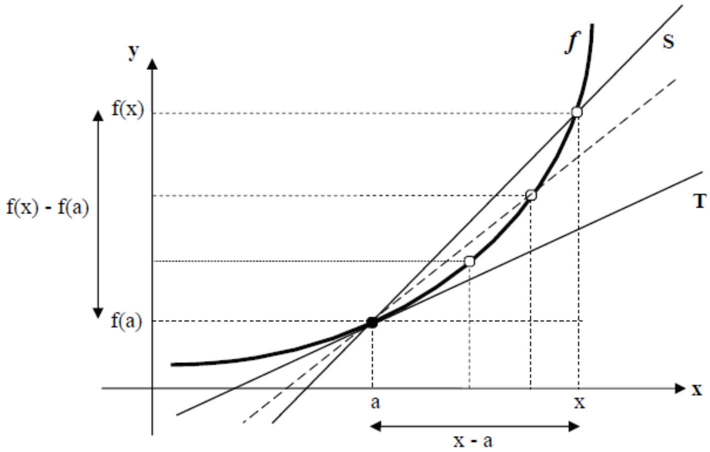


La question est : comment déterminer l'équation de la droite tangente en un point ?

3.1 Équation de la droite tangente[14] [Sujet d'oral]

But : établir l'équation de la droite T tangente à une fonction f en un point $(a; f(a))$.

Illustration : Soit f une fonction



Analyse :

1. Choisissons un point $(x; f(x))$ sur la courbe f avec $x \neq a$ (ici, $x > a$), et représentons la droite contenant les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$, elle s'appelle la droite sécante S.
2. Plus x se rapproche de a, plus la position de la droite contenant les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$ se rapproche de la position de la droite tangente T.

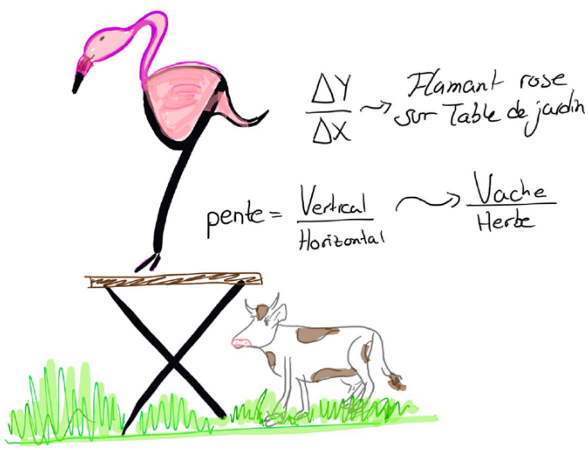
Conclusion :

La position de la droite T est la position limite, lorsque x tend vers a, de la droite contenant les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$.

Équation de T :

Rappel : l'équation d'une droite : $\boxed{d(x) = mx + h}$ *avec* $m = la\ pente = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *et* $h = l'ordonnée\ à\ l'origine$

On connait un point de T: $(a; f(a))$, il faut donc calculer la pente de T pour pouvoir établir l'équation de T.



[14] CRM n° 25, p. 69-70

Or, la pente de T est la pente limite, lorsque x tend vers a, de la pente de la droite sécante contenant les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$.

La pente de la droite contenant les points $(a; f(a))$ et $(x; f(x))$est le nombre réel :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Donc la pente de T est le nombre :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

On peut donc écrire :

$$T(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot x+h \qquad (*)$$

Il faut alors déterminer l'ordonnée à l'origine, à l'aide du point $(a; f(a))$:

$$T(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot a+h=f(a)$$

On isole ensuite h :

$$h=f(a)-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot a$$

On insère ensuite cette expression à la place de h dans l'expression (*):

$$T(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot x+f(a)-\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot a=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

On écrit alors :

$$T_a(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a) \quad \text{ou} \quad y=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)+f(a)$$

Reprenons l'exemple de la page … :

Soit la fonction $f(x)=\frac{1}{6}x^2+2$
Déterminons l'équation de la droite tangente en $a=4$:

$f(4)=\frac{1}{6}\cdot 4^2+2=\frac{14}{3}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{6}x^2+2-\frac{14}{3}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{6}x^2-\frac{8}{3}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}\right)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{6}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

Donc : $T_4(x)=\frac{4}{3}(x-4)+\frac{14}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}+\frac{14}{3}=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$

- **Ex 3.30 à 3.35, p.86-87 CRM n°25**

3.2 Nombre dérivé

Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$

- On dit que **f est dérivable en a** si $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est un nombre réel.
- Si f est dérivable en a, le nombre réel $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé **nombre dérivé de f en a** ou **dérivée de f en a** et est noté $\boldsymbol{f'(a)}$.

Remarques :

1. Le nombre dérivé $f'(a)$ est une notion locale, attachée au point $\big(a; f(a)\big)$.

2. La signification "géométrique" de la dérivée de f en a:
   $f'(a)$ représente la **pente de la droite tangente à f au point $\big(a; f(a)\big)$.**

3. Avec cette nouvelle notation, **l'équation de la droite tangente à f au point $\big(a; f(a)\big)$** devient :
   $$\boxed{\boldsymbol{y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)}}$$

4. Graphiquement, une fonction dérivable en a est une fonction qui admet une droite tangente au point $\big(a; f(a)\big)$.

5. Notation équivalente: en posant $x = a + h$ avec $h \in \mathbb{R}$; on obtient: $x - a = h$
   (h représente donc l'écart entre a et x)

   De plus: "$x \to a$" équivaut à "$(x-a) \to 0$", donc à "$h \to 0$"

   On peut donc définir $f'(a)$ par $\boldsymbol{f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$

Exemples :

1) $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto c \end{cases}$ où $c \in \mathbb{R}$ (fonction constante)

   <u>analyse:</u> la représentation graphique de f est une droite (de pente 0); donc la droite tangente à f en un point $\big(a; f(a)\big)$ est f elle-même. Comme $f'(a)$ représente la pente de la tangente à f en $\big(a; f(a)\big)$, $f'(a)$ vaut la pente de f, d'où: $f'(a) = 0$

   <u>calcul:</u>
   $f'(a) =$

   <u>conclusion:</u> si f est une fonction constante, alors $f'(a) = 0$ pour tout nombre a de $\mathbb{R}$.

2) $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x \end{cases}$ (fonction identité)

analyse: la représentation graphique de f est une droite (de pente 1). Par le même raisonnement qu'à l'exemple 1), on a $f'(a) = 1$.

calcul:
$f'(a) =$

conclusion: si $f(x) = x$ alors $f'(a) = 1$ pour tout nombre a de $\mathbb{R}$.

3) $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$ (fonction quadratique)

analyse: f n'étant pas une droite, la droite tangente ne sera pas la même en chaque point. Par conséquent, la valeur de la pente de la tangente variera en fonction du point choisi.

calculs: calculons la pente, puis l'équation de la tangente à f en deux points arbitrairement choisis: $\big(1; f(1)\big)$ et $\big(-2; f(-2)\big)$:

a) $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$

l'équation de la tangente à f au point $\big(1; f(1)\big)$ est: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$
i.e.:

b) $f'(-2) =$

l'équation de la tangente à f au point $\big(-2; f(-2)\big)$ est: $y = f'(-2)\big(x-(-2)\big) + f(-2)$
i.e.:

généralisation: calculons la pente, puis l'équation de la droite tangente à f en un point $\big(a; f(a)\big)$:

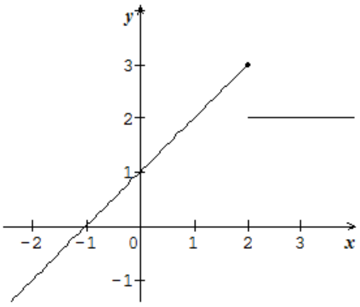
$f'(a) =$

l'équation de la droite tangente à f en un point $\big(a; f(a)\big)$ est: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
i.e.:

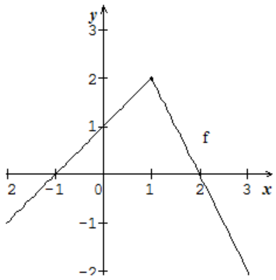
➢ ***CRM n°25, p.81-83, ex3.9, 3.10, 3.13, 3.16, 3.17 & Analyse Série 6***

Exemples graphiques de fonctions non dérivables en a:

1) $f(x) = \begin{cases} x+1; si\ x \leq 2 \\ 2; si\ x > 2 \end{cases}$ est discontinue en $a = 2$

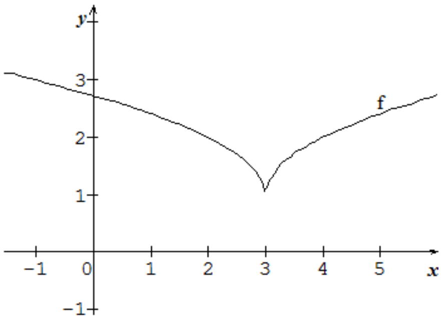


car: $f'(2^-) = 1$
et: $f'(2^+) = -\infty$



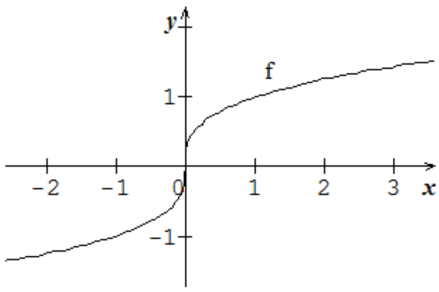
2) $f(x) = \begin{cases} x+1; si\ x \leq 1 \\ -2x+4; si\ x > 1 \end{cases}$ est anguleuse en $a = 1$
car: $f'(1^-) = 1$
et: $f'(1^+) = -2$

3) $f(x) = \sqrt{|x-3|} + 1$ admet un point de rebroussement en $a = 3$



car: $f'(3^-) = -\infty$
et: $f'(3^+) = +\infty$

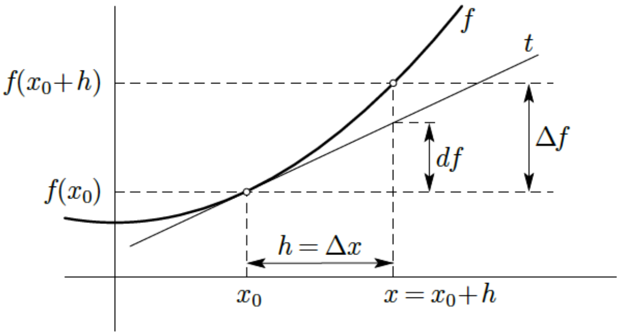
4) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ La tangente est verticale en $a = 0$
$f'(0^-) = f'(0^+) = +\infty$
f n'est pas dérivable en 0 car la limite est infinie, n'appartient pas à $\mathbb{R}$.



Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Calcul différentiel

Dérivée d'une fonction



Dérivée de f en x_0

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Le nombre $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe en $\big(x_0\,;f(x_0)\big)$

Autres formes :

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Autres notations :

Si $y=f(x)$, alors $f'(x)=\dfrac{df}{dx}=\dfrac{dy}{dx}=y'$

Différentielle de f en x_0 $\quad df=f'(x_0)\,\Delta x$

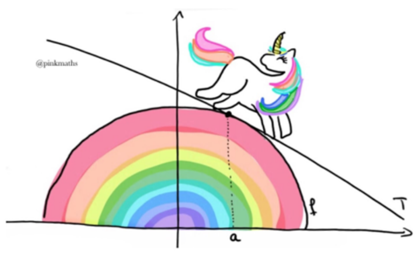
Tangente t en x_0 $\quad y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Fonction dérivée $\quad f'\colon x\mapsto f'(x)$

Dérivée seconde $\quad f''=(f')'$

Autres notations :

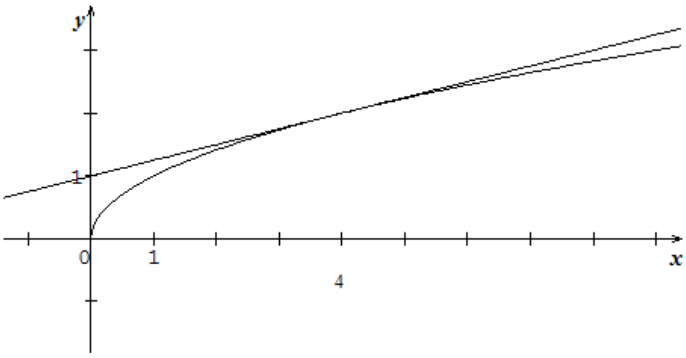
Si $y=f(x)$, alors $f''(x)=\dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{d^2y}{dx^2}=y''$



3.3 Approximation d'ordre 1[15]

Dans le but de simplifier certains calculs, il est parfois utile de remplacer une fonction donnée par une droite. Il faut bien évidemment choisir une droite qui soit une approximation de la fonction !

Par exemple, pour calculer la valeur de $\sqrt{4{,}1}$, nous allons approcher la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ par la droite $d(x) = \frac{1}{4}x + 1$



Les images de 4,1 par f et par g sont environ égales.

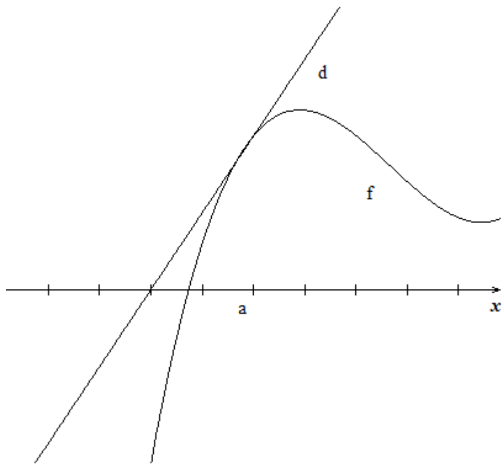
$\sqrt{4{,}1} \cong d(4{,}1) = \frac{1}{4} \cdot 4{,}1 + 1 = 2{,}025$

L'avantage de cette approximation est qu'elle permet de calculer une racine carrée à l'aide des quatre opérations uniquement.

Pour comparaison, la valeur de $\sqrt{4{,}1}$ indiquée par la calculatrice est: $\sqrt{4{,}1} \cong 2{,}0248456$ ...
(Cette dernière valeur est elle aussi une approximation !)

La droite d est une approximation d'ordre 1 de la fonction f au voisinage de 4. *(Pour une approximation d'ordre 2, on approche la fonction f à l'aide d'une parabole.)*

Problème : *comment calculer l'équation de la droite d?*



Considérons une fonction f dérivable en un point a.

Pour que la droite d soit une bonne approximation de la fonction f au voisinage de a, nous allons imposer deux conditions :

1.	$d(a) = f(a)$	*ce qui semble logique*
2.	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - d(x)}{x - a} = 0$	

la seconde condition signifie que, lorsque x tend vers a, l'écart entre f et d tend vers 0 *beaucoup plus vite que* $x - a$

A partir de ces deux conditions, nous allons calculer la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite d.

Notons $d(x) = mx + h$

La première condition nous donne: $m \cdot a + h = f(x) \text{ donc } h = f(a) - ma$

La deuxième condition nous donne: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - mx - h}{x - a} = 0$

[15] CRM n° 25, p.70

par substitution:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - mx - f(a) + ma}{x - a} = 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \frac{mx - ma}{x - a} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - m \right) = 0$$

$$\underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{f'(a)} = m$$

Donc

$$f'(a) = m$$

Finalement, l'équation de la droite d est: $d(x) = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$

Remarque : La droite d est donc la tangente à f en a.

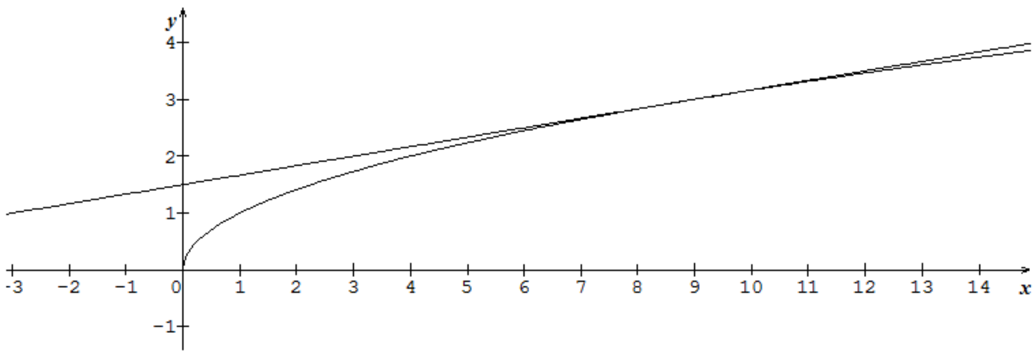
Conclusion :

La droite qui approche le mieux la fonction f au voisinage du point a est la tangente à f en a.
T_a est donc l'approximation d'ordre 1 de f au voisinage de a.

Exemple :

Cherchons à calculer $\sqrt{8{,}8}$ à l'aide d'une approximation d'ordre 1

Nous allons donc considérer la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ et calculer la tangente à f en 9.



$$f'(9) = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6}$$

$$T_9(x) = f'(9) = (x - 9) + f(9) = \frac{1}{6}(x - 9) + 3$$

Finalement : $\sqrt{8{,}8} \cong T_9(8{,}8) = 2{,}9\overline{6}$ (valeur de la calculatrice: 2,966479...)

3.4 Fonction dérivée

Nous avons vu que si une fonction f est dérivable en un point a, nous pouvons calculer le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$.

Nous pouvons établir la correspondance suivante :

$$\begin{matrix} nombre \\ a \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} nombre\ dérivé \\ f'(a) \end{matrix}$$

Ainsi, lorsqu'une fonction f est dérivable en chaque point d'un intervalle, il est possible de définir la fonction dérivée f: la fonction qui, pour chaque point x de l'intervalle, donne la pente de la tangente à f en ce point.

Définition :

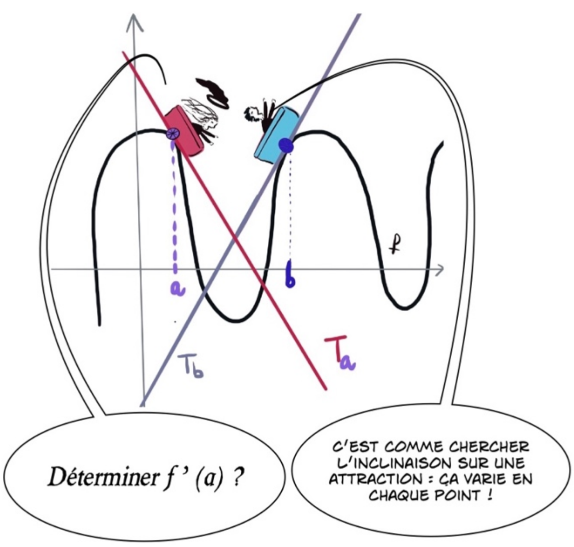
Si une fonction est dérivable en tout point d'un intervalle ouvert $I =]c; d[$, on dit que **f est dérivable sur $I =]c; d[$**

Notation : Si f est dérivable sur I, la fonction dérivée de f est $\boldsymbol{f'}$: $\begin{matrix} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{matrix}$

Remarque : La fonction dérivée fait correspondre à tout élément a de I la valeur de la pente de la droite tangente à f au point $(a; f(a))$

Exemples :

$f(x)$	$f'(x)$	I	Notation abrégée
c	0	$\mathbb{R}$	$(c)' = 0$
x	1	$\mathbb{R}$	$(x)' = 1$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$(x^2)' = 2x$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$(x^3)' = 3x^2$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



Développons deux cas :

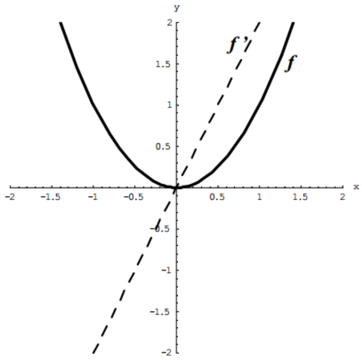
a) $\boldsymbol{f}$: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \mapsto x^2 = f(x)} \end{cases}$

Calcul de $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = \lim\limits_{x \to a} (x + a) = 2a$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$; le domaine de définition de f' est $\mathbb{R}$.

La fonction dérivée de f est :

$$f' : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x = f'(x) \end{cases}$$

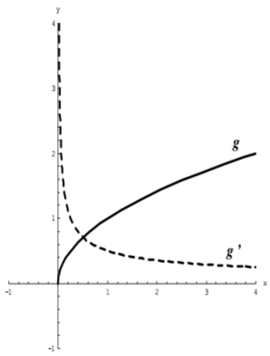


b) $\boldsymbol{g}$: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{x \mapsto \sqrt{x} = g(x)} \end{cases}$

Calcul de $g'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; le domaine de définition de g' est $\mathbb{R}_+^*$. La fonction dérivée de g est :

g': $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} = f'(x) \end{cases}$



Remarque :

Les six exemples du tableau de la page précédente vérifient la relation suivante : $\boxed{(x^m)' = m \cdot x^{m-1}, m \in \mathbb{Q}}$
Nous démontrerons cette relation plus tard dans le cours.

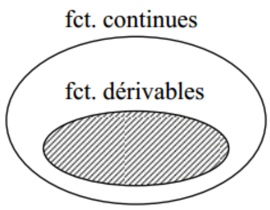
➢ **Analyse Série 7 exercices 1 à 4**

3.5 Lien entre continuité et dérivabilité [Sujet d'oral]

Exemples :

a) La fonction $f(x) = x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = 2x$, $D_{f'} = \mathbb{R}$. f est alors continue sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction $g(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$. f est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.



> **Théorème :** Soit f une fonction définie au voisinage de a
> Si f est dérivable en a alors f est continue en a

Démonstration : *A voir :* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Idée : Partir d'une égalité vraie et évidente : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Transformons cette égalité avant d'y appliquer des limites : $f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)$

Appliquons la limite de chaque côté de l'égalité :

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)\right) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{\boldsymbol{x-a}} \cdot (\boldsymbol{x-a}) + f(a)\right)$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{=f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a}(x-a)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x \to a} f(a)}_{=f(a)}$$

Propriétés des limites

f dérivable en a par hypothèse

$x - a$ est continue car un polynôme

La limite d'une constante est la constante elle-même.

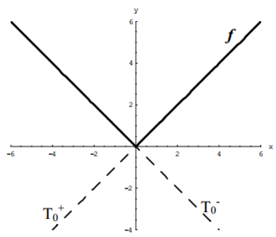
$$= f'(a) \cdot 0 + f(a) = f(a)$$

Finalement : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ Ce qui montre donc que la fonction f est continue en a.

Remarque importante : La réciproque de ce théorème, c'est-à-dire : "Si f est continue en a alors f est dérivable en a" n'est pas toujours vraie ! Voici un contre-exemple :

Considérons la fonction valeur absolue : $f(x) = |x| = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$

Cette fonction est **continue en $\boldsymbol{a = 0}$**, par contre, elle n'est **pas dérivable en $\boldsymbol{a = 0}$**. En effet :



- f est continue en zéro, car:
  $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

- f n'est pas dérivable en zéro, car:
  $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$ Comme la limite à gauche est différente de la limite à droite, la limite n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en $a = 0$.

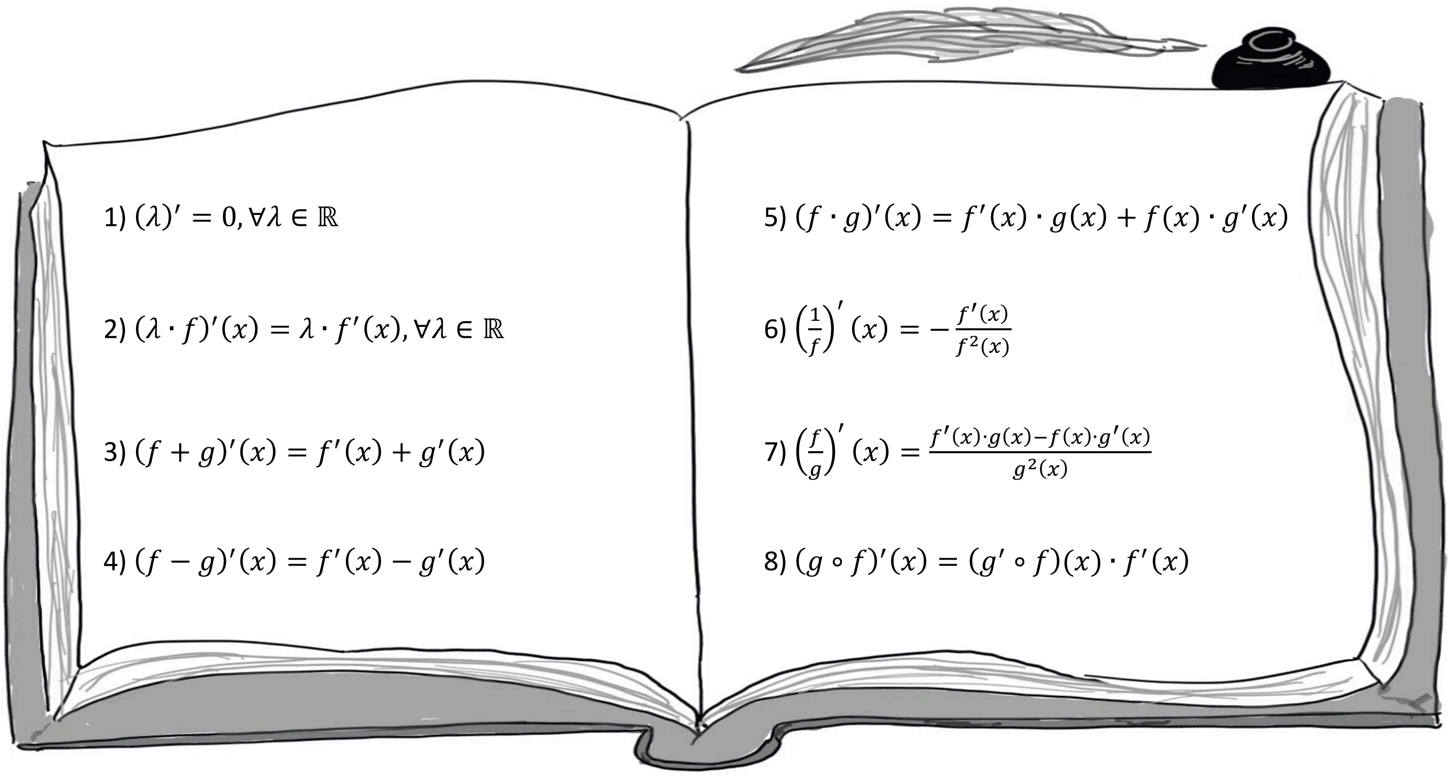
Graphiquement, cela correspond à deux tangentes possibles au point $(0; f(0))$ de pente 1 et -1.

- **Analyse Série 7 exercices 5 et 6**

4. Étude de fonctions

4.1 Règles de dérivation (Formules magiques)

Le but de ce paragraphe est d'énoncer et de démontrer des formules qui vont nous permettre d'obtenir rapidement la dérivée de nombreuses fonctions sans passer par un calcul de limite.



1) $(\lambda)' = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) $(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda \cdot f'(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

4) $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

5) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6) $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$

7) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

8) $(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$

Nous allons énoncer précisément *(= donner les conditions pour qu'elles puissent être appliquées)* et démontrer ces formules.

Nous apprendrons à utiliser toutes ces formules en même temps que nous commencerons à les démontrer. Tant qu'elles ne sont pas démontrées, il faudra les accepter comme vraies.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Règles de dérivation

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x),\ \lambda \in \mathbb{R}$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$	$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$({}^r f)'(x) = \frac{1}{f'({}^r f(x))}$

1) Dérivée d'une fonction constante

Définition : Une ***fonction constante*** est une fonction de la forme $f(x) = \lambda,\ \forall x \in \mathbb{R}\ et\ \lambda \in \mathbb{R}$

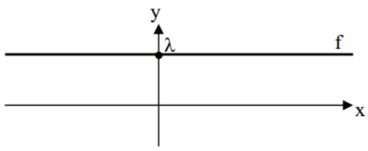
Énoncé : Si $f(x) = \lambda$ est une fonction constante alors $(\lambda)' = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Démonstration : A l'aide de la définition de la dérivée :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\lambda - \lambda}{x - a} = \lim_{x \to a} 0 = 0$$

Remarque :

Comme le graphique d'une fonction constante est une droite horizontale, il est évident graphiquement qu'une tangente en un point de cette droite (qui se confond avec elle) est de pente nulle !



Exemple : $(5)' =$

2) Dérivée du produit d'un nombre réel et d'une fonction

Définition : Le produit d'un nombre réel λ et d'une fonction f est une nouvelle fonction notée $\lambda \cdot f$ définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Énoncé : Si f est dérivable en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$,
alors la fonction $\lambda \cdot f$ est aussi dérivable en a et $(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$

Démonstration : $(\lambda \cdot f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(\lambda \cdot f)(x) - (\lambda \cdot f)(a)}{x - a}$ *définition de la dérivée de $\lambda \cdot f$*

$= \lim_{x \to a} \frac{\lambda \cdot f(x) - \lambda \cdot f(a)}{x - a}$ *définition de la fonction $\lambda \cdot f$*

$= \lim_{x \to a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *algèbre (mise en évidence)*

$= \lambda \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *Propriété des limites*

$= \lambda \cdot f'(a)$ *la limite existe car f est dérivable en a par hypothèse*

Exemple : $(5x^2)' =$

3) Dérivée de la somme de deux fonctions

Définition : La somme de deux fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f+g$ définie par $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Énoncé : Si f et g sont deux fonctions dérivables en a
alors la fonction $f+g$ est aussi dérivable en a et $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

Démonstration : $(f+g)'(a) = \lim\limits_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a}$ — *définition de la dérivée de $f+g$*

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$ — *définition de la fonction $f+g$*

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)+g(x)-g(a)}{x-a}$ — *algèbre*

$= \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}+\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$ — *algèbre*

$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$ — *propriétés des limites*

$= f'(a)+g'(a)$ — *les deux limites existes car f et g sont dérivables en a par hypothèse*

Exemple : $(5x^2+7x)'=$

4) Dérivée de la différence de deux fonctions

Définition : La différence de deux fonctions f et g est une nouvelle fonction notée $f-g$ définie par $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Énoncé : Si f et g sont deux fonctions dérivables en a
alors la fonction $f-g$ est aussi dérivable en a et $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

Démonstration :

Exemple : $(4x^2-6x)'=$

5) Dérivée du produit de deux fonctions [Sujet d'oral]

Définition :

Le ***produit de deux fonctions f et g*** est une nouvelle fonction notée $f \cdot g$ définie par $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Énoncé : Si f et g sont deux fonctions dérivables en a,
alors la fonction $f \cdot g$ est aussi dérivable en a et $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

Démonstration :

$$(f \cdot g)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x-a}$$
Définition de la dérivée de $f \cdot g$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$$
Définition de la fonction $f \cdot g$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) \cdot g(x) \overbrace{- \boldsymbol{f(a) \cdot g(x)} + \boldsymbol{f(a) \cdot g(x)}}^{=0} - f(a) \cdot g(a)}{x-a}$$
Astuce algébrique

$$= \lim_{x \to a} \frac{\big(f(x) - f(a)\big) \cdot g(x) + f(a) \cdot \big(g(x) - g(a)\big)}{x-a}$$
Algèbre

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$
Algèbre

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}}_{=f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} g(x)}_{=g(a)} + \underbrace{\lim_{x \to a} f(a)}_{=f(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a}}_{=g'(a)}$$
Propriétés des limites

par hyp, f est dérivable en a

la limite d'une constante est la constante

par hyp g est dérivable en a

comme g est dérivable en a par hyp, cela implique que g est continue donc la limite d'une fonction continue est l'image de ce point

donc $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

Remarque : la dérivée d'un produit de fonctions **n'est pas** le produit des dérivées des fonctions !

Exemple : $\left(x^2(x+1)\right)' =$

➢ ***Analyse Série 8 exercices 1 à 4***

6) Dérivée de l'inverse d'une fonction [Sujet d'oral]

Définition : La fonction $\frac{1}{f}$ est définie par $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$ et est appelée l'***inverse*** de f.

Énoncé : Si f est dérivable en a et si $f(a) \neq 0$,
alors la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$

Démonstration :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a}$$ *définition de la dérivée de $\frac{1}{f}$*

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{f(a)}}{x-a}$$ *définition de la fonction $\frac{1}{f}$*

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{f(a)}{f(a)}-\frac{1}{f(a)}\cdot\frac{f(x)}{f(x)}}{x-a}$$ *Algèbre (dénominateur commun)*

$$= \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(x)\cdot f(a)}}{x-a}$$ *Algèbre*

$$= \lim_{x\to a} \left(\frac{-(f(x)-f(a))}{x-a}\cdot\frac{1}{f(x)\cdot f(a)}\right)$$ *algèbre*

$$= -\underbrace{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{=f'(a)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)\cdot f(a)}}_{=\frac{1}{f^2(a)}}$$ *Propriétés des limites*

f dérivable par hypothèse

f dérivable par hypothèse
donc f continue
et la limite d'une fonction continue en un point est l'image de la fonction au point

donc $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$

Remarque : La dérivée de l'inverse d'une fonction **n'est pas** l'inverse de la dérivée de f.

7) Dérivée du quotient de deux fonctions [Sujet d'oral]

Le quotient de f et g est une nouvelle fonction notée $\frac{f}{g}$ définie par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Énoncé : Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si $g(a) \neq 0$
alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$

Démonstration : Idée : dériver la fonction $f\cdot\frac{1}{g}$ en utilisant les formules démontrées précédemment

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)} + f(a)\cdot\frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$
$$= \frac{f'(a)}{g(a)}\cdot\frac{g(a)}{g(a)} - \frac{f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)} = \frac{f'(a)\cdot g(a)-f(a)\cdot g'(a)}{g^2(a)}$$

Remarque : La dérivée d'un quotient de fonctions **n'est pas** le quotient des dérivées des fonctions !

8) Dérivée de la composition de deux fonctions [Sujet d'oral]

Définition : La fonction $g \circ f$ est la fonction ***composée*** des deux fonctions f et g et définie par $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$

Énoncé : Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) \cdot f'(a)$

Démonstration : **Cas 1 : $f(x) \neq f(a)$ dans un voisinage de a**

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \quad \textit{Définition de la dérivée de } g \circ f$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} \quad \textit{Définition de la fonction } g \circ f$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} \cdot \frac{\boldsymbol{f(x) - f(a)}}{\boldsymbol{f(x) - f(a)}} \right) \quad \textit{astuce algébrique } \textbf{\textit{si}}\ \boldsymbol{f(x) \neq f(a)}$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) \quad \textit{Algèbre}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{= f'(a)} \quad \textit{Propriétés des limites}$$

f Dérivable par hypothèse

f dérivable par hyp donc continue ($x \to a \Rightarrow f(x) \to f(a)$)

$$= \underbrace{\lim_{f(x) \to f(a)} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{f(x) - f(a)}}_{= g'(f(a))} \cdot f'(a) = g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)$$

Cas 2 : $\boldsymbol{f(x) = f(a)}$: Est-ce que $\underbrace{(g \circ f)'(a)}_{(1)} = \underbrace{(g' \circ f)(a) \cdot f'(a)}_{(2)}$?

$$(1)\quad \boldsymbol{(g \circ f)'(a)} = \lim_{x \to a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \quad \textit{Définition de la dérivée de } g \circ f$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} \quad \textit{Définition de la fonction } g \circ f$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g\big(f(a)\big) - g\big(f(a)\big)}{x - a} \quad \text{car } f(x) = f(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{0}{x - a} = \boldsymbol{0}$$

$$(2)\quad \underbrace{\boldsymbol{(g' \circ f)(a)}}_{\textbf{\textit{existe par hyp}}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{f'(a)}}_{\boldsymbol{=0}}$$

car $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(a)}{x - a} = 0$

$\underbrace{(g \circ f)'(a)}_{=0} = \underbrace{(g' \circ f)(a) \cdot \underbrace{f'(a)}_{=0}}_{=0}$ donc $0 = 0$ donc l'égalité est vraie.

CQFD

4.2 Dérivée de x^n [Sujet d'oral]

Nous allons étudier la dérivée de la fonction $\boldsymbol{f(x) = x^n}$

Nous avons vu que :

$f(x)$	$f'(x)$	n	**Page de théorie ou série**
1	0	0	p.
x	1	1	p.
x^2	$2x$	2	p.
x^3	$3x^2$	3	AS6 ex 1
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	p. , AS6 ex1
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2} = -1 \cdot x^{-2}$	-1	AS6 ex 1

On remarque donc une régularité et on aimerait ainsi prédire que $\boldsymbol{f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

Nous allons montrer ce résultat en 4 étapes :

- lorsque $n = 0$ (déjà fait à la p. …)
- lorsque n est un entier positif ($n \in \mathbb{N}^*$)
- lorsque n est un entier négatif ($n \in \mathbb{Z}^*$)
- lorsque n est un entier rationnel ($n \in \mathbb{Q}^*$)

Il est possible de démontrer que cette formule reste vraie lorsque l'exposant est un nombre irrationnel, mais nous ne le ferons pas dans ce cours.

La démonstration avec $n \in \mathbb{N}^*$ se fait par récurrence.

Définition : ***Le principe de récurrence***
Considérons une affirmation (une formule par exemple) qui dépend d'un entier positif n

Si nous parvenons à démontrer que

1) l'affirmation est vraie pour $n = 1$
2) si l'affirmation est vraie pour un certain entier (n) alors elle l'est aussi pour l'entier suivant $(n + 1)$

Alors cette affirmation est forcément vraie pour chaque nombre entier positif.

En effet, comme elle est vraie pour $n = 1$ et pour l'entier suivant, elle est vraie pour $n = 2$. Comme elle est vraie pour $n = 2$ et pour l'entier suivant, elle est vraie pour $n = 3$, etc.

Une image pour mieux comprendre le principe : les dominos placés debout pour être prêts à tomber en cascade :

(1) **Initialisation** : le domino 1 tombe.
(2) **Hérédité** : La chute du domino n entraine la chute du domino $n + 1$.
(3) **Conclusion** : Tous les dominos tombent.

Énoncé : Si $f(x) = x^n$ alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration : *(par récurrence) A* voir : 1) la formule est vraie pour $n = 1$ (déjà fait à la p. ….)
2) si la formule est vraie pour n, alors elle l'est aussi pour $n + 1$.

Supposons donc la formule vraie pour n, c'est-à-dire : $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (\boldsymbol{x})' \cdot x^n + x \cdot (\boldsymbol{x^n})' = \mathbf{1} \cdot x^n + x \cdot n \cdot \boldsymbol{x^{n-1}} = x^n + n \cdot x^n = x^n \cdot (1+n) = (n+1) \cdot x^n$$

Algèbre *dérivée de f · g* *formule valable pour n et* 1 *algèbre*

la formule est vraie pour $n + 1$ donc pour tout entier positif.

donc $(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Autre démonstration : (à l'aide de la définition du nombre dérivé)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x - a}$$
$$= \lim_{x \to a} x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} = \underbrace{a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1}}_{n\ fois}$$
$$= na^{n-1}$$

Exemples : On peut maintenant donner les dérivées de plusieurs fonctions facilement :

a) $f(x) = x^5$ $\Rightarrow f'(x) =$ b) $f(x) = x^{19}$ $\Rightarrow f'(x) =$ c) $f(x) = 3x^4 + 5x^9 - 2x$ $\Rightarrow f'(x) =$

Énoncé : Si $f(x) = x^n$ alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*$

Remarques :

- Lorsque l'exposant est un entier négatif, le domaine de f est $\mathbb{R}^*$
  exemple : $(x^{-3})' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = -3 \cdot x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$
- La démonstration se fera en utilisant la dérivée de l'inverse et la formule pour $n \in \mathbb{N}$

Démonstration : Puisque $n \in \mathbb{Z}_-^*$, cela implique que $-n \in \mathbb{N}^*$

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{-(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} = \frac{-(-n \cdot x^{-n-1})}{x^{-2n}} = n \cdot x^{-n-1} \cdot x^{2n} = n \cdot x^{-n-1+2n} = n \cdot x^{n-1}$$

algèbre dérivée de $\frac{1}{f}$ $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, car - n \in \mathbb{N}^*$ algèbre

donc $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{Z}_-^*$

Remarque : Avec l'énoncé pour $n = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $n \in \mathbb{Z}_-^*$, on a maintenant la formule démontrée pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$.

Énoncé : <u>Si</u> $f(x) = x^n$ <u>alors</u> $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{Q}$

Remarques :

- Lorsque l'exposant est rationnel, le domaine de f est $\mathbb{R}_+^*$
  exemple : $\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$
- La démonstration se fait en utilisant la dérivée de la composition de fonctions et la formule pour $n \in \mathbb{Z}$.

<u>Démonstration :</u>

Si n est un nombre rationnel, il peut s'écrire sous forme d'une fraction. Posons $n = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

A voir : $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ Idée : dériver la fonction $x^p = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q$

$$\underbrace{(x^p)'}_{=\boldsymbol{p\cdot x^{p-1}}} = \underbrace{\left(\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^q\right)'}_{=\boldsymbol{q}\cdot\left(\boldsymbol{x^{\frac{p}{q}}}\right)^{\boldsymbol{q-1}}\cdot\left(\boldsymbol{x^{\frac{p}{q}}}\right)'}$$

$(x^p)' = px^{p-1}, p \in \mathbb{N}^*$
formule montrée p.51

algèbre

dérivée de $g \circ f$ et $(x^q)' = qx^{q-1}, q \in \mathbb{Z}^*$
formule montrée p.51

En comparant les deux expressions obtenues, nous obtenons une équation qui contient l'expression $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)'$:

$$q \cdot \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1} \cdot \left(\boldsymbol{x^{\frac{p}{q}}}\right)' = p \cdot x^{p-1}$$ *isolons* $\left(x^{\frac{p}{q}}\right)'$

$$\Leftrightarrow \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p\cdot x^{p-1}}{q\cdot\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}$$ il faut maintenant réduire l'expression obtenue

$$\Leftrightarrow \left(x^{\frac{p}{q}}\right)' = \frac{p\cdot x^{p-1}\cdot\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{-q+1}}{q} = \frac{p}{q}\cdot x^{p-1}\cdot x^{\frac{p(1-q)}{q}} = \frac{p}{q}\cdot x^{p-1+\frac{p}{q}-p} = \frac{p}{q}\cdot x^{\frac{p}{q}-1}$$

Ainsi, on a $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{Q}$

CQFD

Remarque : La formule reste vraie lorsque l'exposant est irrationnel

Exemple : $(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1}$

➢ **Analyse Série 8 exercices 5 à 15**

4.3 Dérivées de fonction trigonométriques [Sujet d'oral]

Dans ce paragraphe, nous allons montrer les égalités suivantes :

1) $sin'(x) = \cos(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$
2) $cos'(x) = -\sin(x)\,, \forall x \in \mathbb{R}$
3) $tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tan^2(x), si\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Démonstration de 1) : *(dérivée du sinus)*

$$sin'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x-a}$$ *Définition de la dérivée*

$$= \lim_{x \to a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$ $rappel: sin(\alpha) - sin(\beta) = 2\,cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$= \lim_{x \to a} \frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{2 \cdot \frac{x-a}{2}}$$ *Algèbre*

$$= \lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$ *Algèbre*

$$= \underbrace{\lim_{x \to a} \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}_{=\cos\left(\frac{2a}{2}\right)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}$$ *Les deux limites existent*

cosinus Continue en a donc la limite est l'image

$$= \cos(a) \cdot \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{\sin(y)}{y}}_{=1}$$ *substitution* $y = \frac{x-a}{2}$ *et* $y \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$ *(Prouvé p. …)*

$$= \cos(a)$$

Donc, $sin'(x) = \cos(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

Démonstration 2) : *(dérivée du cosinus)*

Idée : nous allons dériver la relation $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$(\sin^2(x) + \cos^2(x))' = (1)'$$

$$(\sin^2(x))' + (\cos^2(x))' = 0$$

$$(\cos^2(x))' = -(\sin^2(x))'$$

$$2 \cdot \cos(x) \cdot (\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}))' = -2 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x))'$$ *dérivée de* $g \circ f$

$$(\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}))' = \frac{-2 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x))'}{2 \cdot \cos(x)} = \frac{-\sin(x) \cdot \cos(x)}{\cos(x)} = -\sin(x)$$ *algèbre et dérivée du sinus*

Donc : $cos'(x) = -\sin(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Démonstration 3) :</u> (dérivée de la tangente)

Cette démonstration se fait à l'aide des deux résultats précédents ainsi que de la dérivée du quotient et de la formule : $tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$\left(tan(x)\right)' =$

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Dérivée de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	
a	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
x	1	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	
x^n	nx^{n-1}	$\lvert x\rvert$	$\operatorname{sgn}(x)$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln(a)$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

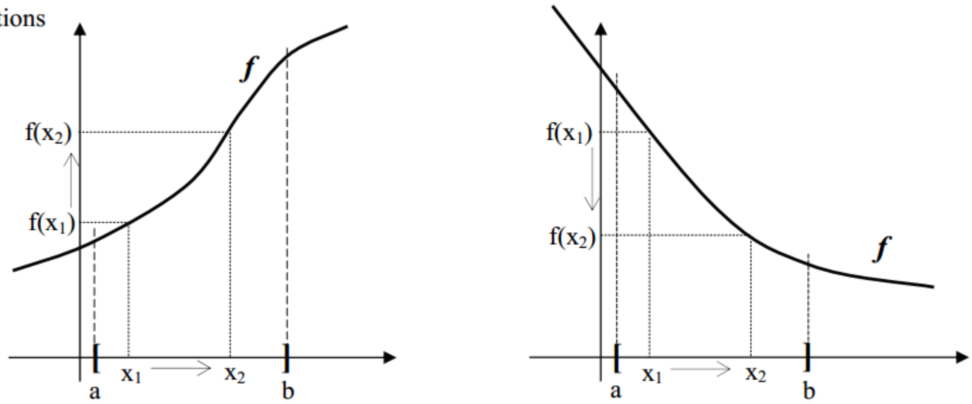
➢ **Analyse Série 8 Ex 16 à 25**

4.4 Lien entre croissance et dérivée [Sujet d'oral]

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- f est ***croissante*** sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$
- f est ***décroissante*** sur I si $\forall x_1, x_2 \in I$ avec $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$

Illustrations



f est croissante sur I =[a;b] *f* est décroissante sur I = [a;b]

Remarques :

- Les fonctions constantes vérifient les deux définitions. Elles sont donc simultanément croissantes et décroissantes
- La définition d'une fonction ***strictement croissante*** s'obtient en remplaçant $f(x_1) \leq f(x_2)$ par $f(x_1) < f(x_2)$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Croissance

On note I une partie de l'ensemble de définition de la fonction f.

La fonction f est ...	si pour tout $x_1, x_2 \in I$:
croissante sur I	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
strictement croissante sur I	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
décroissante sur I	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
strictement décroissante sur I	$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Une *fonction monotone sur* I est une fonction qui est soit croissante sur I soit décroissante sur I.

Dérivée première et croissance

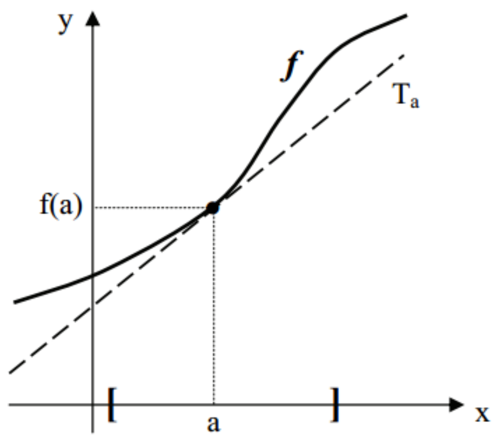
On note f une fonction dérivable sur un intervalle I.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f \text{ croissante sur } I & \Leftrightarrow & f'(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I \\ f \text{ décroissante sur } I & \Leftrightarrow & f'(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } I \end{array}}$$

Théorème :
Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I

1) Si f est croissante sur I alors $f'(a) \geq 0, \forall a \in I$ " $\boldsymbol{f \nearrow \Rightarrow f' \geq 0}$ "
2) Si f est décroissante sur I alors $f'(a) \leq 0, \forall a \in I$ " $\boldsymbol{f \searrow \Rightarrow f' \leq 0}$ "

Illustration :
Lorsque la fonction est croissante,
les tangentes à f sont toutes de pentes positives
Cela signifie que $f'(a) \geq 0 \ \forall a \in I$



Démonstration pour 1) : A voir : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0 \ \forall a \in I$

Soit a un nombre quelconque de l'intervalle I.
Considérons la fraction : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où $x \in I$.

- Si $x < a$, alors $x - a < 0$ *(algèbre)*
  et $f(x) \leq f(a)$ *(car f croissante)*
  et donc $f(x) - f(a) \leq 0$ *(algèbre)*
  Dans ce cas, la fraction est donc positive ou nulle : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$
- Si $x > a$, alors $x - a > 0$ *(algèbre)*
  et $f(x) \geq f(a)$ *(car f croissante)* et donc $f(x) - f(a) \geq 0$ *(algèbre)*
  Dans ce cas, la fraction est aussi positive ou nulle : $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$

En résumé, la fraction $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positive ou nulle $\forall x \in I \setminus \{a\}$

Comme f est dérivable par hypothèse, cette fraction admet une limite en a. Cette limite est aussi positive ou nulle (voir propriétés des limites).

Nous pouvons donc écrire : $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \geq 0$

Ce raisonnement étant valable pour chaque point a de I, nous avons finalement $f'(a) \geq 0 \ \forall a \in I$.

Démonstration pour 2) :

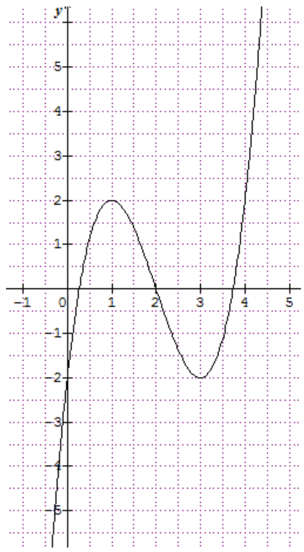
Se fait de manière analogue à 1).

Remarque : Dans la table CRM, on voit que le résultat fonctionne dans les deux sens (⇔). Nous avons montré que " $\boldsymbol{f \nearrow \Rightarrow f' \geq 0}$ " Plus loin, nous démontrerons la réciproque (inversion entre hypothèse et conclusion) de ce théorème *: Si la dérivée est positive alors la fonction est croissante* " $\boldsymbol{f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow}$ " (même raisonnement avec f décroissante)

Exemple d'utilisation de la réciproque[16] :

Soit la fonction $f'(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Sa dérivée est : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$



Étudions les signes de f' pour connaitre la croissance de f :

x		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	Max local : $(1;2)$	↘	Min local : $(3;-2)$	↗

Il est ensuite possible, à partir du tableau ci-dessus, d'esquisser le graphe de la fonction f. Même approximative, cette esquisse permet de dégager quelques propriétés fondamentales de cette fonction.

Exercice : Étudier les variations de la fonction $f(x) = \frac{x^2-1}{x-3}$ et esquisser sa représentation graphique.

[16] Savez-vous énoncer la réciproque ?

4.5 Lien entre extremum et dérivée [Sujet d'oral]

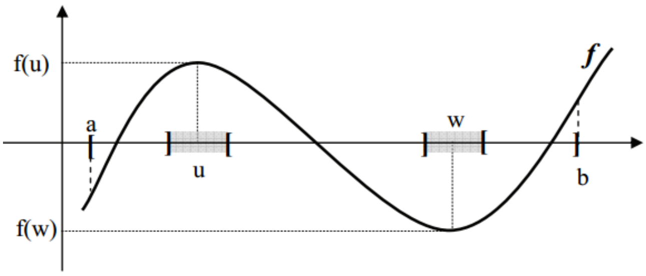
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que f admet un ***maximum local*** en $x = u$
s'il existe un voisinage V de u où $f(x) \leq f(u) \forall x \in V$
On dit alors que $f(u)$ est un maximum local de f sur V
- On dit que f admet un **minimum local** en $x = w$
s'il existe un voisinage V de a où $f(x) \geq f(w)\ \forall x \in V$
On dit alors que $f(w)$ est un minimum local de f sur V.
- On appelle ***extremum local*** de f sur V
un maximum local de f sur V ou un minimum local de f sur V.

Illustration :

Dans cette illustration,

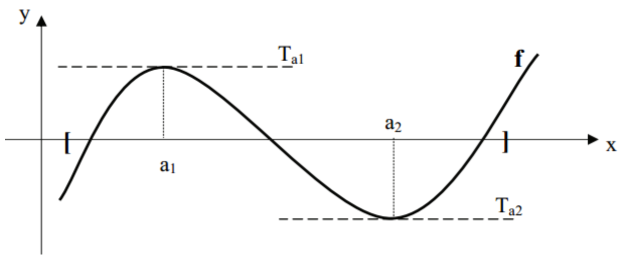
- *f admet un maximum local en $x = u$ et $f(u)$ est le maximum local de f dans un voisinage de u.*
- *f admet un minimum local en $x = w$ et $f(w)$ est le minimum local de f dans un voisinage de w.*
- *$f(u)$ et $f(w)$ sont deux extremums locaux de f.*



Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$
Si f admet un extremum local en $x = a$ alors $f'(a) = 0$

Illustration : Lorsque la fonction admet un maximum en a_1 ou un minimum en a_2 les tangentes à f en a_1 et en a_2 sont de pentes nulles. Cela signifie que $f'(a_1) = f'(a_2) = 0$



Démonstration :

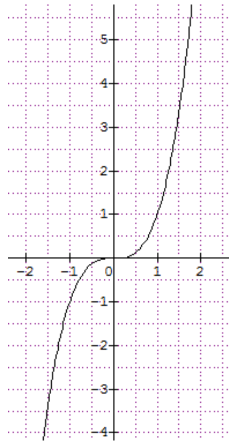
Nous démontrerons ce théorème dans le cas où f admet un maximum local en a. *(Dans le cas d'un minimum, la démonstration est analogue)*

Comme f admet un maximum en a, il existe un voisinage V de a tel que :
$$f(x) \leq f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \leq 0\ \forall x \in V \cap I$$

Considérons la fraction $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ où $x \in\ V \cap I$.

- Si $x < a \ \Leftrightarrow x - a < 0$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ donc $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^-) \geq 0$
- Si $x > a \Leftrightarrow x - a > 0$, $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ donc $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a^+) \leq 0$
- Comme f est dérivable en a, $f'(a^-) = f'(a^+) = f'(a)$ et ce nombre est forcément nul.

Donc : $f'(a) = 0$ *CQFD*



Remarque : La réciproque est fausse.

Cela signifie que si $f'(a) = 0$, f n'admet pas forcément un extremum en a

Exemple : $f(x) = x^3$ n'a pas d'extremum en 0 mais $f'(x) = 3x^2$ et $f'(0) = 0$
Le point $(0; 0)$ n'est pas un extremum

Un point celui de l'exemple est appelé point d'inflexion ou palier de f.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Extremums

Le nombre $f(a)$ est un *maximum local* de la fonction f s'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que, pour tout $x \in I \cap D_f$, on a $f(x) \leq f(a)$.
Le nombre $f(a)$ est le *maximum absolu* de la fonction f si, pour tout $x \in D_f$, on a $f(x) \leq f(a)$
On définit de manière analogue un *minimum local* et le *minimum absolu* de f.

Les deux derniers théorèmes vont permettre de déterminer la croissance, la décroissance d'une fonction ainsi que leurs extremums locaux en déterminant les signes et les zéros de sa dérivée

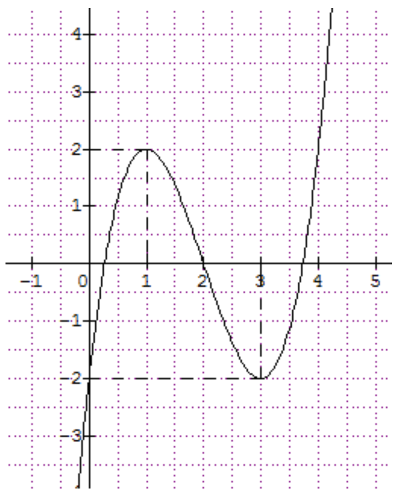
Exemple : Considérons la fonction polynômiale : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

Calculons sa dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

Cherchons les zéros : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \; et \; x = 3$

Cherchons les signes de f' pour connaître la croissance, décroissance de f :

x		1		3	
$3(x-1)$					
$x-3$					
$f'(x)$					
$f(x)$					



- f est décroissante sur
- f est croissante sur
- f admet un maximum local en $x =$ et $f(\quad) =$ est le maximum local de f dans un voisinage de 1.
- f admet un mimimum local en $x =$ et $f(\quad) =$ est le mimimum local de f dans un voisinage de 3.

Il est ensuite possible, à partir du tableau de signes, appelé tableau de signes de f' et variations de f, d'esquisser le graphique de la fonction f.

Conclusion : L'étude de la croissance, décroissance de f se trouve à l'étude du signe de sa dérivée f' et la recherche des extremums locaux de f se ramène à l'étude de l'équation $f'(x) = 0$

4.6 Théorème de Rolle, des accroissements finis et corollaires [Sujet d'oral]

Théorème de Rolle :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; b]$

<u>Si</u> 1) f est continue sur $[a; b]$
2) f est dérivable sur $]a; b[$
3) $f(a) = f(b) = une\ constante$

<u>alors</u> il existe au moins un nombre $c \in\ ]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$

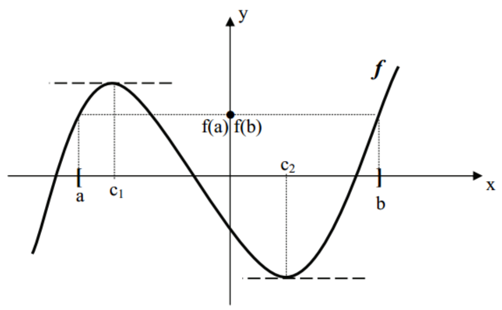


Illustration : Dans cette illustration, il y a deux points c en qui la fonction a une tangente horizontale.

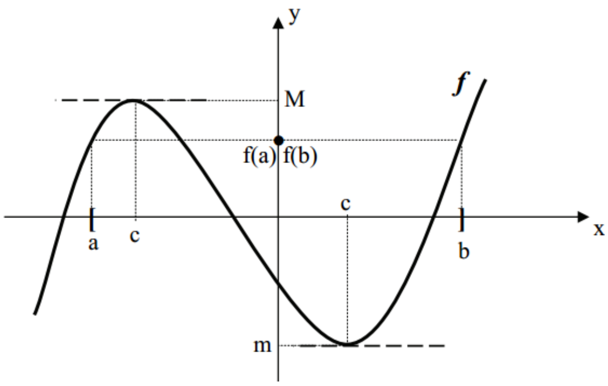
<u>Démonstration :</u>

<u>Cas 1: $(m = M)$</u> f est constante : $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in\ ]a; b[$ *(constante)*

donc $f'(x) = 0, \forall x \in\ ]a; b[$

ainsi: $\forall c \in\ ]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$

<u>Cas 2 : $(m < M)$</u> Supposons f pas constante *(voir illustration)*



On sait, par le *théorème de la valeur intermédiaire* que si $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ est continue, il existe deux nombres m et M tels que $f([a; b]) = [m; M]$.

Comme f n'est pas constante, l'un au moins des nombres m et M est différent de $f(a)$.

Supposons, par exemple[17], que $f(a) \neq M$ donc $f(a) < M$.

Notons c la (ou une) préimage de M. Cette préimage de M se trouve forcément dans l'intervalle ouvert $]a; b[$ car $f(b) = f(a) < M = f(c)$

De plus, $f(x) \leq f(c)\ \forall x \in [a; b]$, et le point $(c; f(c))$ est donc un maximum.

Comme f est dérivable sur $]a; b[$, donc en c, nous savons par le théorème précédent[18] que $f'(c) = 0$

CQFD

---

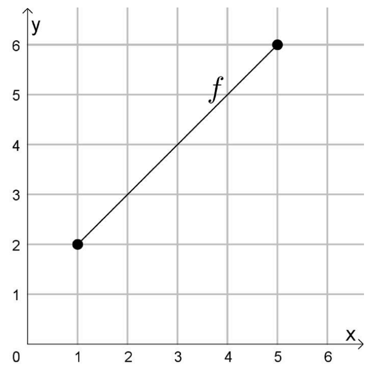
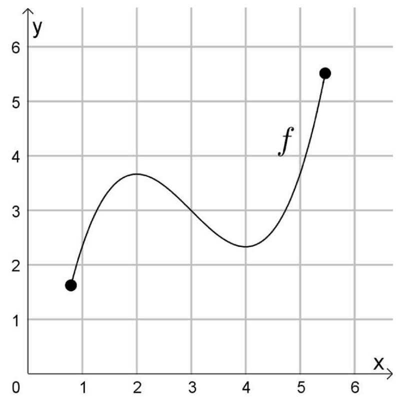
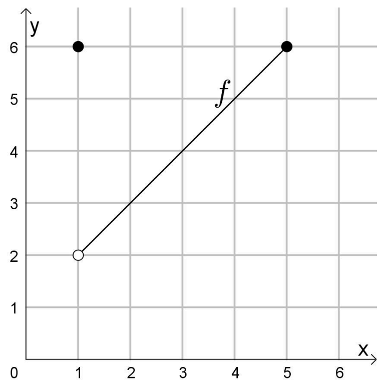
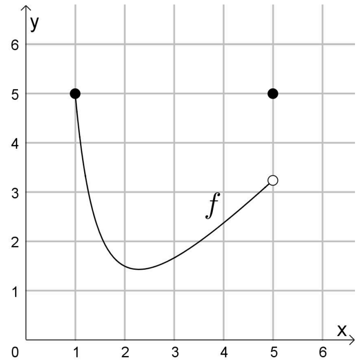
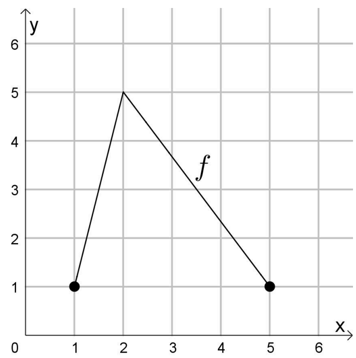
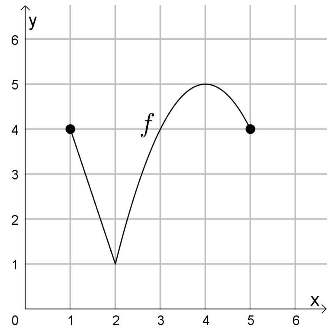
[17] Dans le cas où $M = f(a)$, nous aurons forcément $m < f(a)$ et nous définirons c comme une préimage de m. Le point $(c; f(c))$ sera alors un minimum.

[18] **Théorème :**

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$
<u>Si</u> f admet un extremum local en $x = a$ <u>alors</u> $f'(a) = 0$

Discussion :

Que se passe-t-il si on décide de ne prendre que deux hypothèses sur trois ?

Hypothèses	Conclusion FAUSSE	Conclusion VRAIE
1) f continue sur $[a;b]$ 2) f dérivable sur $]a;b[$ ~~3) $f(a)=f(b)$~~		
~~1) f continue sur $[a;b]$~~ 2) f dérivable sur $]a;b[$ 3) $f(a)=f(b)$		
1) f continue sur $[a;b]$ ~~2) f dérivable sur $]a;b[$~~ 3) $f(a)=f(b)$		

Conclusion : Quand les trois hypothèses sont réunies, la conclusion du théorème est vraie.

Quand on emploie seulement deux hypothèses au lieu de trois,

il se peut que cela soit vrai aussi, mais pas toujours !

Théorème de Lagrange (Théorème des Accroissements Finis : TAF)

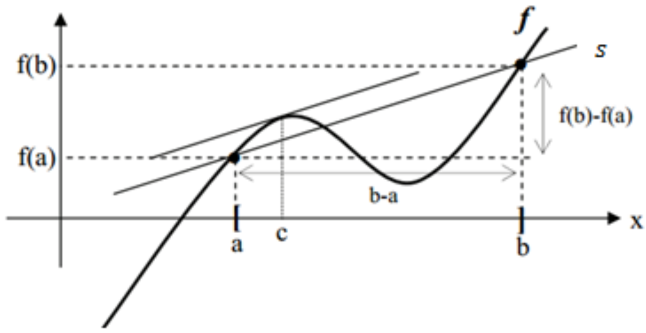
Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$

Si 1) f est continue sur $[a;b]$
2) f est dérivable sur $]a;b[$

alors il existe au moins un nombre $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Illustration & signification :

la fraction $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ correspond à la pente de la droite s qui est la droite sécante passant par $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$. Cela signifie qu'il existe un point c dans l'intervalle $]a;b[$ dont la tangente est parallèle à la droite sécante s.(Sur cette illustration, il y a deux points c)



Remarque : Le théorème de Lagrange est une généralisation du théorème de Rolle.

Démonstration : *Idée : Nous allons déterminer la pente de la droite sécante s, déterminer une fonction auxiliaire qui satisfera les hypothèses du théorème de Rolle et nous pourrons ainsi bénéficier de sa conclusion.*

a) L'équation de la droite sécante est de la forme : $s(x) = mx + h$ où sa pente: $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Remarquons que la dérivée de la fonction s correspond à sa pente: $s'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

b) Déterminons une fonction auxiliaire $\boldsymbol{d(x) = f(x) - s(x)}$ qui correspond à la différence entre la fonction f et la fonction s. Elle donne la distance (écart) entre les deux fonctions.

c) Vérifions que la fonction d satisfait les trois hypothèses du théorème de Rolle :

1) d est continue sur $[a;b]$ car f est continue sur $[a;b]$ par hypothèse et s est une droite. La différence de fonctions continues est une fonction continue (propriété des fonctions continues).
2) d est dérivable sur $]a;b[$ car f est dérivable sur $]a;b[$ par hypothèse est s est une droite. La différence de deux fonctions dérivables est une fonction dérivable (propriété des fonctions dérivables).
3) $d(a) = d(b)$ car $d(a) = f(a) - s(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $d(b) = f(b) - s(b) = f(b) - f(b) = 0$

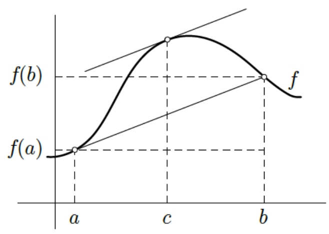
d) Comme la fonction d satisfait les hypothèses du théorème de Rolle, il existe donc un $c \in]a;b[$ tel que $d'(c) = 0$ c'est-à-dire $\left(f(c) - s(c)\right)' = 0$ donc $\boldsymbol{f'(c)} = s'(c) = \boldsymbol{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ donc: $\boldsymbol{f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$

CQFD

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a;b[$, alors il existe au moins un nombre c dans $]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Corollaire 1 du TAF : " $f' \geq 0 \Rightarrow f \nearrow$ " et " $f' \leq 0 \Rightarrow f \searrow$ "

Soit $f: [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ **et** dérivable sur $]a; b[$,
(f satisfait aux hypothèses du théorème de Lagrange)

Alors : 1) <u>Si</u> $f'(x) \geq 0, \forall x \in]a; b[$ <u>alors</u> f est croissante sur $[a; b]$
2) <u>Si</u> $f'(x) \leq 0, \forall x \in]a; b[$ <u>alors</u> f est décroissante sur $[a; b]$

<u>Démonstration de 1) :</u> *A voir : f croissante, c'est-à-dire: Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$*

Choisissons arbitrairement $x_1, x_2 \in]a; b[$ avec $x_1 < x_2$

Donc : $0 < x_2 - x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0 \quad (*)$

Appliquons le TAF à la fonction f dans $[x_1; x_2]$:

$$\exists c \in]x_1; x_2[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\text{C'est-à-dire: } \underbrace{f'(c)}_{\geq 0}\left(\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}\right) = f(x_2) - f(x_1)$$

par hypothèse $\quad (*)$

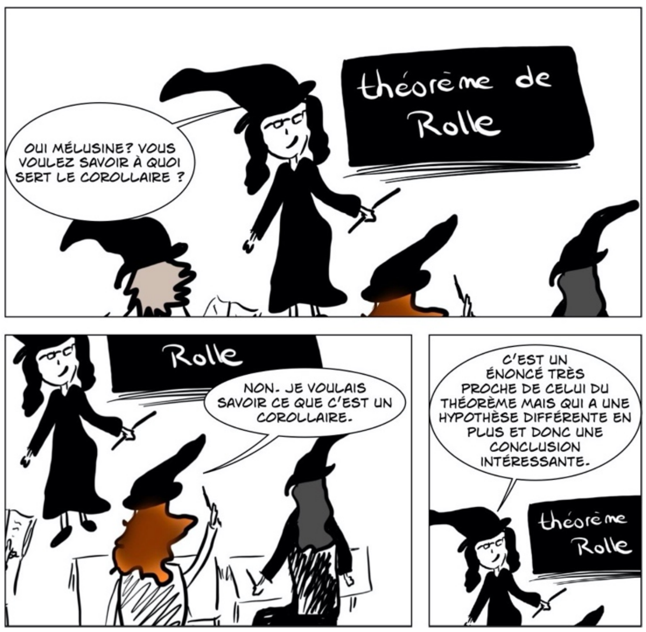
donc : $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

c'est-à-dire: $f(x_2) \geq f(x_1)$

En conclusion : $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ce qui signifie que f est croissante sur $[a; b]$.

<u>Démonstration de 2) :</u> analogue à 1)

Remarque : La réciproque de ce théorème a été démontrée au paragraphe 4.4



Corollaire 2 du TAF : " $\boldsymbol{f' = 0 \Rightarrow f = cte}$ "

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ **et** dérivable sur $]a; b[$,
(f satisfait aux hypothèses du théorème de Lagrange)

Si $f'(x) = 0, \forall x \in]a; b[$ alors f est constante sur $[a; b]$

Démonstration : Montrons que $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a; b]$ *(signifie que f est constante sur $[a; b]$)*

Nous allons appliquer le théorème des accroissements finis (TAF) à la fonction f sur l'intervalle $[a; x]$.

Considérons un nombre $x \in]a; b]$

Par hypothèses du corollaire, la fonction f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a; x]$

Selon le TAF, il existe au moins un $c \in]a; x[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$

Comme $f'(c) = 0$ (par hypothèse du corollaire) donc $f(x) - f(a) = 0$

Ainsi : $f(x) = f(a)$

Ce raisonnement est valable pour tout $x \in]a; b]$

Donc $f(x) = f(a)\ \forall x \in]a; b]$

Comme $f(a) = f(a)$ on a donc $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a; b]$

Donc : f est constante sur $[a; b]$.

Il découle de ce théorème que :

Corollaire 3 du TAF :

Si deux fonctions f et g ont la même dérivée, alors $(f - g)(x) = constante$

En effet, pour autant que les hypothèses du corollaire soient respectées, si $f'(x) = g'(x)$,

alors $(f - g)'(x) = 0$ et donc $(f - g)(x) = constante$

Exemple : $f(x) = \sin^2(x)$ et $g(x) = -\cos^2(x)$ ont la même dérivée. *(à vérifier)*

Nous pouvons en déduire que la fonction $(f - g)(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$ est une constante.
(Nous retrouvons ici le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique).

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Dérivée première et croissance

On note f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f croissante sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$ pour tout x de I
f décroissante sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$ pour tout x de I

Exemple :

Considérons la fonction $f(x) = \frac{5}{x^2-6x+10}$

$D_f =$

$Z_f =$

Nous pouvons déterminer la croissance de f à partir des signes de sa dérivée.

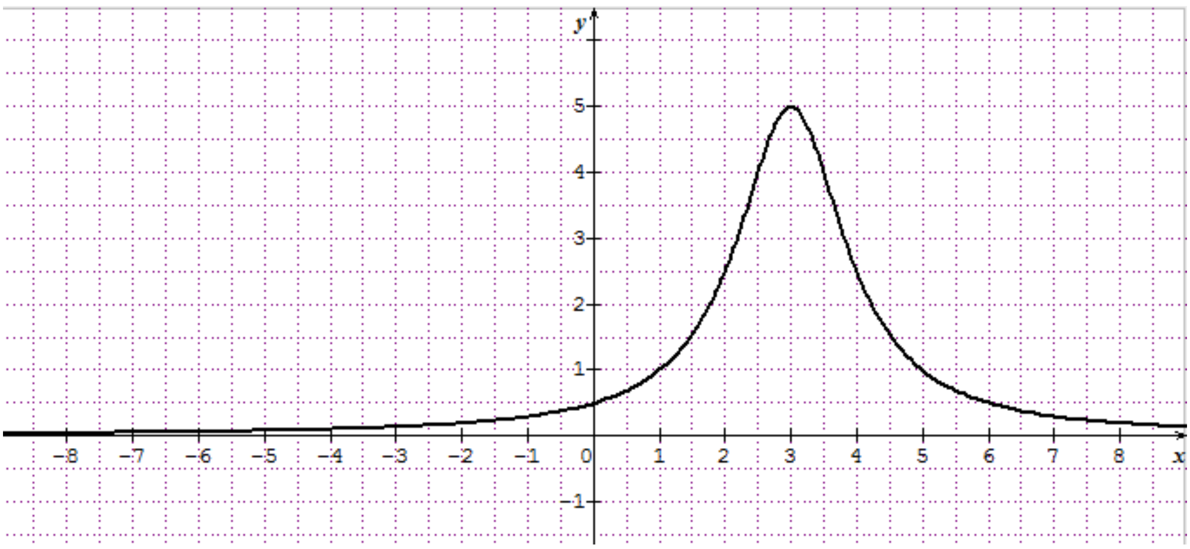
Vérifions que sa dérivée est :

$f'(x) = \frac{-10(x-3)}{(x^2-6x+10)^2}$

Indiquons les signes de f' ainsi que la croissance de f dans un tableau :

		3	
$-10(x-3)$	+	0	-
$(x^2-6x+10)^2$	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	5	↘

Les résultats obtenus nous permettent d'esquisser le graphe de la fonction f.
f est continue sur $\mathbb{R}$ et n'a pas de zéro



4.7 Tableau des variations

Le tableau utilisé à la page précédente est appelé tableau des variations (ou tableau de monotonie) de la fonction f

Dans un tel tableau figurent :

- Le domaine et les zéros de f
- Le domaine et les zéros de f'
- Les signes de f'
- La croissance et décroissance de f
- Les éventuels extremums de f

Exemple : Étudions la fonction $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$ en rajoutant le tableau de variation :

Domaine : $D_f =$

Ordonnée à l'origine :

Zéros : $Z_f =$

Tableau de signes de f :

x^3							
x^2-4							
$f(x)$							

Asymptotes :

AV ?

- En $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

  Comportement : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$

- En $x = -2$: $\lim\limits_{x\to -2} f(x) =$

  Comportement : $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) =$

AO ? $d(x) = mx + h$

- $m = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x} =$

- $h = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) =$

donc $d(x) =$

Comportement de f autour de l'AO :

$\delta(x) = f(x) - d(x) =$

Tableau de signes de δ:

x^2-4							
$\delta(x)$							
$f(x)$							

<u>Dérivée de f:</u>

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)' = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(3x^2-12-2x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

<u>Tableau des variations de f:</u>

		$-\sqrt{12}$		-2		0		2		$\sqrt{12}$	
x^2											
x^2-12											
$(x^2-4)^2$											
$f'(x)$											
$f(x)$	↗	−5,20 Max	↘	AV	↘	0 P.C.	↘	AV	↘	5,20 min	↗

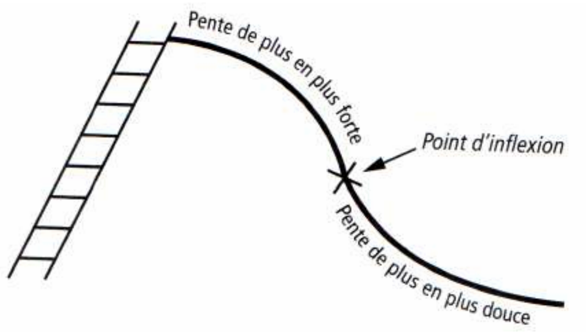
Remarques :

- Les images de $\pm\sqrt{12}$ sont calculées pour placer ces points particuliers sur le graphique

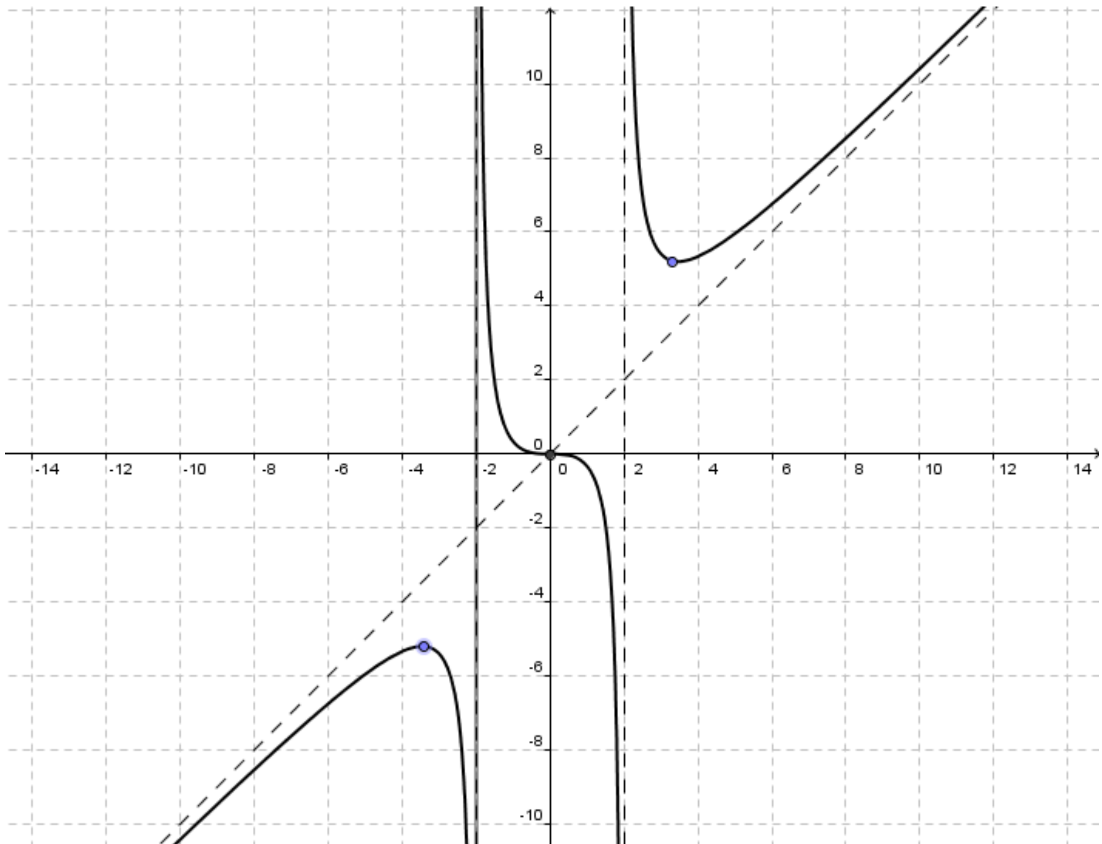
- f N'admet pas d'extremum en 0 bien qu'il y ait une tangente horizontale en ce point. Un tel point est appelé palier ou ***point critique***. *(à indiquer dans le tableau)*

- Si $f''(x)$ s'annule et change de signe en a, alors $(a; f(a))$ est un ***point d'inflexion*** du graphe de f *(voir prochain paragraphe)*

  Illustration :



<u>Nous pouvons maintenant tracer la représentation graphique :</u>



➢ ***Analyse Série 9 exercices 1 à 7 & Monographie n°25 de la CRM p.135-136 ex 4.38***

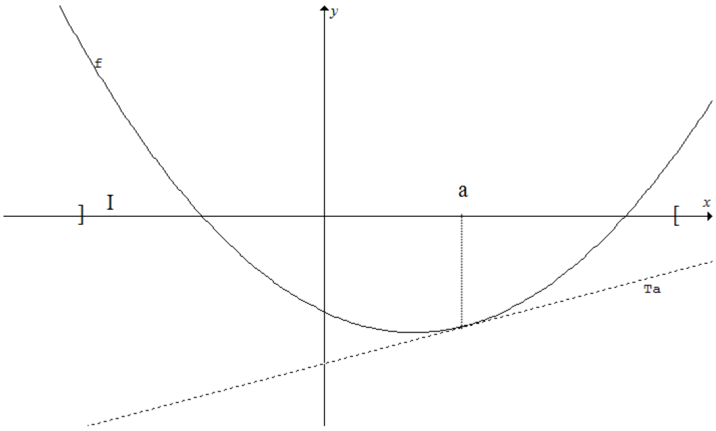
4.8 Convexité et concavité des fonctions dérivables

Considérons une fonction f dérivable sur un intervalle I

Définition : La fonction f est dite ***convexe*** sur I si, pour chaque point a de I, le graphe de f est situé au-dessus de la droite T_a sur tout l'intervalle I

Formellement : $\forall x \in I$ et $\forall a \in I$ on a $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$

Illustration :



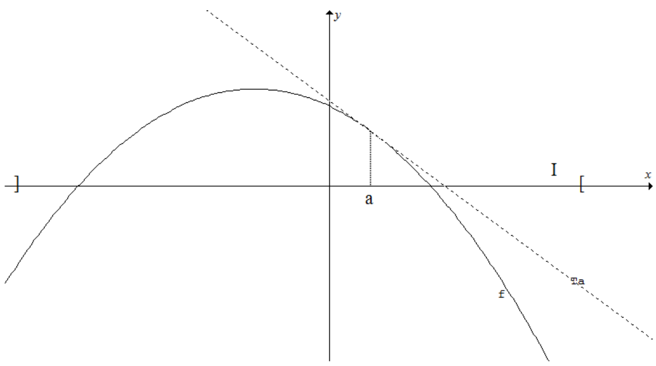
Sur l'illustration ci-dessus, le graphe de f est au-dessus de celui de T_a sur tout l'intervalle I et cette propriété reste vérifiée pour n'importe quel autre point a de I. La fonction f est donc convexe sur I.

Remarque : La convexité est une notion qui existe aussi pour des fonctions non dérivables. La définition donnée ci-dessus ne concerne cependant que les fonctions dérivables.

Définition : La fonction est dite ***concave*** sur I, si, pour chaque point a de I, le graphe de f est au dessous de la droite T_a sur tout l'intervalle I.

Formellement : $\forall x \in I$ et $\forall a \in I$ on a $f(x) \leq f'(a)(x-a)+f(a)$

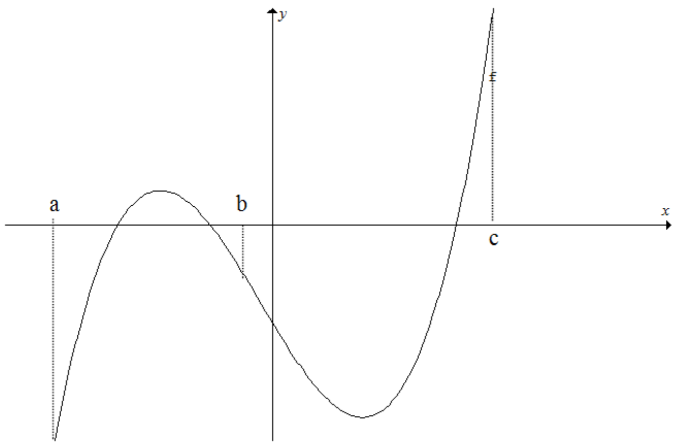
Illustration :



Sur l'illustration ci-dessus, le graphe de f est au-dessous de celui de T_a sur tout l'intervalle I. Comme cette propriété reste vraie pour chaque point a de I, la fonction f est concave sur I.

Remarque : Si f est un polynôme de degré ≤ 1 (une droite), alors f vérifie les deux définitions. Dans ce cas, la fonction f est donc convexe et concave.

Exemple :



f est concave sur $]a; b]$

et convexe sur $[b; c[$.

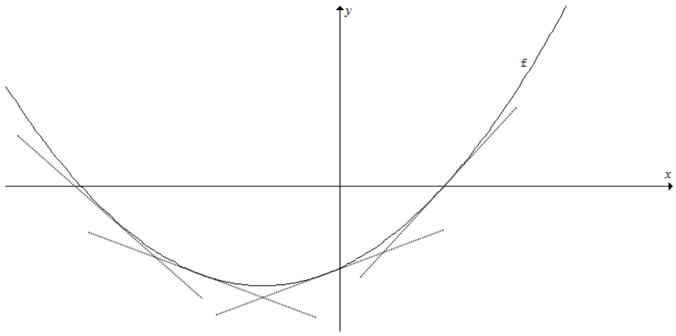
Le point b est aussi appelé point d'inflexion de f

C'est en b que la courbure de f change.

Définition : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I contenant a. Si $f''(x)$ s'annule et change de signe en a, alors $(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** du graphe de f

Remarque : Si f est une fonction conevexe sur I, alors f' est une fonction croissante sur I (Les pentes des tangentes augmentent.) Cela signifie que:

si f' est dérivable, alors $(f')'$ est positive.



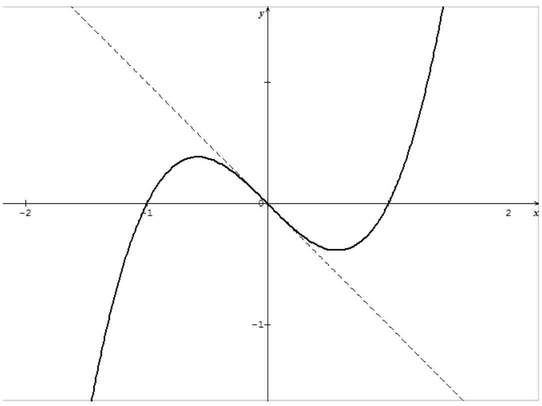
Définition : Une fonction dérivable dont la dérivée est elle-même dérivable est une fonction dite deux fois dérivables. $(f')'$ se note f'' et est appelée dérivée seconde de f.

Exemple : soit $f(x) = x(x-1)(x+1) = x^3 - x$

On a : $f'(x) = 3x^2 - 1$ et donc $f''(x) = 6x$

On résout : $f''(x) = 0$ et on obtient : $x = 0$

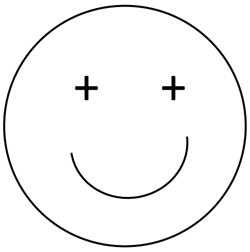
On voit sur le graphique ci-contre que f passe d'une forme concave à convexe.

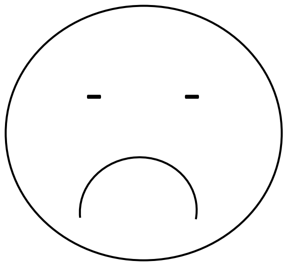


Théorème :
<u>Si</u> f est deux fois dérivable sur I,
<u>alors :</u>
(1) f est convexe sur $I \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \; \forall x \in I$
(2) f est concave sur $I \Leftrightarrow f''(x) \leq 0 \; \forall x \in I$

La démonstration de ce théorème ne sera pas exposée dans ce cours.

Truc pour s'en rappeler : Les yeux donnent le signe de la dérivée seconde et la courbure se lit sur le sourire





Remarques :

- Convexité et concavité déterminent la courbure de f
- La convexité sera notée ∪ et la concavité ∩.
- Il est possible d'ajouter une ligne au tableau des variations pour y faire figurer la courbure de la fonction mais il est en général plus simple d'élaborer un autre tableau pour cette nouvelle notion.

Exemple : Déterminons la courbure du polynôme $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x+2)(x-1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$

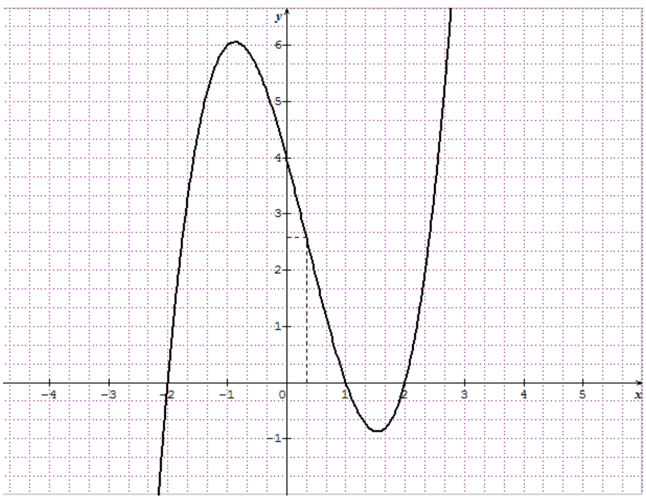
$f''(x) = 6x - 2 \qquad Z_{f''} = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

x		$\frac{1}{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	∩	2,59 PI	∪

Dans une étude de fonction, ce tableau vient compléter le tableau des variations.

La courbure de f change en $\frac{1}{3}$.

Nous n'appellerons aussi point d'inflexion un tel point.



➢ ***Analyse Série 9 exercices 8 à 10***

5. Application du calcul différentiel à l'optimisation

Beaucoup de problèmes pratiques conduisent à la détermination des valeurs maximales ou minimales prises par une quantité variable. Ces valeurs, qui sont les plus favorables dans un contexte donné, sont parfois appelées valeurs optimales. Déterminer ces valeurs constitue un problème d'optimisation.

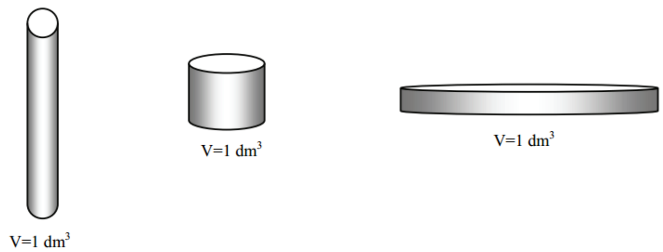
La résolution d'un problème d'optimisation passe par une lecture attentive de la donnée souvent accompagnée d'un dessin, une définition de toutes les variables nécessaires et la recherche des extremums d'une fonction[19].

Méthode de résolution :

(1) Bien lire le problème (et plusieurs fois!)
(2) Identifier les variables, en particulier, celle à optimiser (faire un croquis ?)
(3) Traduire les données en termes mathématiques
(4) Trouver le lien entre les variables
(5) Exprimer la variable à optimiser à l'aide d'une seule autre variable (domaine ?)
(6) Trouver l'extremum (Max ou min) à l'aide de la dérivée (tableau des signes de f', variations de f)
(7) Répondre à la question posée (phrase en français).
Il est utile de contrôler que le résultat est plausible et correspond bien à la solution du problème

Exemple : *On désire fabriquer une boîte cylindrique fermée en aluminium d'une contenance de 1 litre ($1\ dm^3$ de volume). Quelles doivent être les dimensions (en dm) de ce cylindre pour que sa fabrication nécessite un minimum d'aluminium ?*

Illustration :

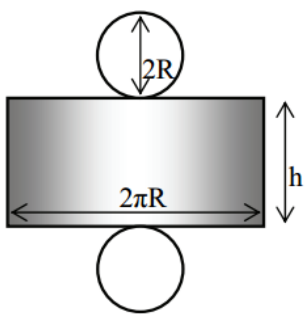


Pour optimiser la fabrication de cette boîte, il faut rendre minimale l'aire latérale A du cylindre.

Plan de construction de la boite :

- Notons R le rayon du cylindre

  et h sa hauteur



[19] En première année, nous résolvions déjà des problèmes d'optimisation en cherchant le sommet de paraboles décrivant une situation. Maintenant nous allons chercher des extremums de fonctions qui sont parfois plus compliquées que des polynômes du second degré.

- Exprimons l'aire A en fonction de R et h:
  $A(R;h) = 2\pi Rh + 2\pi R^2$

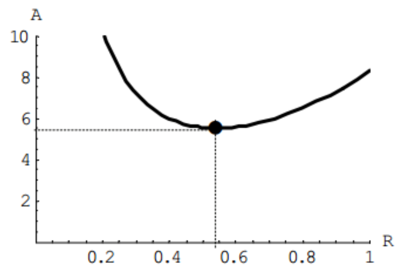
- Exprimons l'aire A en fonction de R uniquement :

  Pour avoir un volume de 1 $litre$: $V = \pi R^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi R^2}$ $[dm]$

  Donc $A(R) = 2\pi R\left(\frac{1}{\pi R^2}\right) + 2\pi R^2 = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$

- Il s'agit maintenant de calculer le minimum de cette fonction $A(R)$.

  Pour cela, il faut étudier (partiellement) cette fonction.



  Si $A(R) = \frac{2}{R} + 2\pi R^2$ alors $A'(R) = -\frac{2}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2}{R^2}$

  et $A'(R) = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{2}{4\pi} \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \cong 0{,}54\ dm$

- Vérifions que le rayon obtenu correspond bien à un minimum :

R		0,54	
$A'(R)$	$-$	0	+
$A(R)$	↘	min	↗

  Remarque : la nature même du problème nous interdit de penser qu'il s'agit d'un maximum !

- Calculons maintenant la hauteur du cylindre : $h = \frac{1}{\pi R^2} \cong \frac{1}{\pi(0{,}54)^2} \cong 1{,}09\ dm$

- Et pour finir, calculons l'aire minimale : $A(R;h) = 2\pi Rh + 2\pi R^2 \cong 5{,}53\ dm^3$

Réponse finale : Pour utiliser un minimum d'aluminium, il faut choisir un cylindre de $0{,}54\ dm$ de rayon et d'une hauteur de $1{,}09\ dm$. Il convient donc de fabriquer un cylindre dont la hauteur est égale à son diamètre. L'aire minimale de cette boîte cylindrique fermée est alors de $5{,}53\ dm^3$

➢ **Analyse Série 10 & Monographie n°25 de la CRM, p. 136-140 ex 4.39 à 4.63**

Table des matières

Matériel : 1

0. Introduction 1

1. Rappels sur les fonctions 2

1.1 Fonctions réelles, propriétés 2

1.2 Caractéristiques 4

1.3 Opérations 7

1.4 Réciproque 9

2. Limites 10

2.1 Définition 10

2.1.1 Exemple numérique : 10

2.1.2 Exemples de détermination à l'aide d'un graphique 11

2.2 Limites latérales 14

2.3 Propriétés 16

Méthodes de calcul permettant de déterminer une limite 18

2.4 Continuité 23

2.5 Extensions de la notion de limite 27

2.5.1 Les limites infinies et asymptotes verticales 27

2.5.2 Limites infinies 28

2.6 Formes indéterminées et asymptotes affines 30

2.6.1 Limites en l'infini 30

2.6.2 Méthode de calcul pour les limites en l'infini 31

2.6.3 Asymptote horizontale 33

2.6.4 Asymptote oblique 37

2.6.5 Autres formes indéterminées : 38

2.7 Limite de $\sin xx$ [Sujet d'oral] 40

Résumé des méthodes de calculs 45

3. Dérivées 46

3.1 Équation de la droite tangente [Sujet d'oral] 47

3.2 Nombre dérivé 49

3.3 Approximation d'ordre 1 53

3.4 Fonction dérivée 55

3.5 Lien entre continuité et dérivabilité [Sujet d'oral] 57

4. Étude de fonctions 58

4.1 Règles de dérivation (Formules magiques) 58

1) Dérivée d'une fonction constante 59

2) Dérivée du produit d'un nombre réel et d'une fonction 59

3) Dérivée de la somme de deux fonctions 60

4) Dérivée de la différence de deux fonctions 60

5) Dérivée du produit de deux fonctions [Sujet d'oral] 61

6) Dérivée de l'inverse d'une fonction [Sujet d'oral] 62

7) Dérivée du quotient de deux fonctions [Sujet d'oral] 62

8) Dérivée de la composition de deux fonctions [Sujet d'oral] 63

4.2 Dérivée de xn [Sujet d'oral] 64

4.3 Dérivées de fonction trigonométriques [Sujet d'oral] 67

4.4 Lien entre croissance et dérivée [Sujet d'oral] 69

4.5 Lien entre extremum et dérivée [Sujet d'oral] 72

4.6 Théorème de Rolle, des accroissements finis et corollaires [Sujet d'oral] 74

4.7 Tableau des variations 80

4.8 Convexité et concavité des fonctions dérivables 83

5. Application du calcul différentiel à l'optimisation 86

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ p. 42	
	Équation de la droite tangente p.47-48
Lien entre dérivabilité et continuité d'une fonction p.57	
	Dérivée du produit de deux fonctions p.61
Dérivée de l'inverse d'une fonction Dérivée du quotient de deux fonctions p.62	
	Dérivée de la composition de deux fonctions p. 63
Dérivée de x à la puissance n p.64-66	

	Dérivée de sinus et cosinus p.67
Lien entre dérivée positive et croissance p.70-71	
	Lien entre extremum et dérivée nulle p.72-73
Théorème de Rolle p.74	
	Corollaire 1 du TAF p.77
Corollaire 2 du TAF p.78	
	Corollaire 3 du TAF p.78