

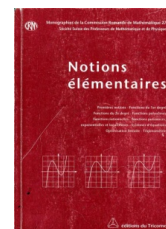
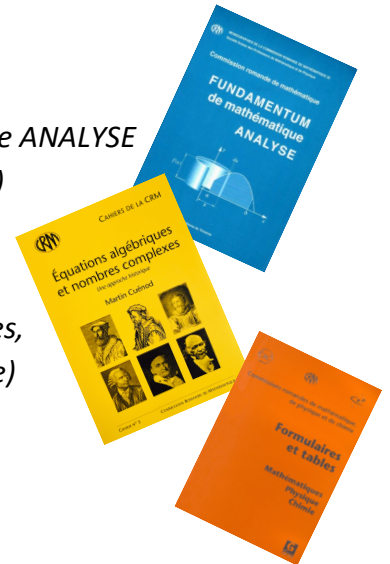
Analyse

Ce chapitre mêlera tout ce qui a été étudié jusqu'à présent : études de fonctions, calculs de limites, astuces algébriques, règles des puissances et retour aux exponentielles et logarithmes.

Matériel :

- Monographie CRM n°25 : *FUNDAMENTUM de mathématique ANALYSE* pour la théorie et les exercices **en cours**. (Au premier semestre)
- Cahiers de la CRM, *Equations algébriques et nombres complexes*, pour la théorie, le cours et les exercices. (Au deuxième semestre)
- *Formulaires et tables CRM*, pour **les épreuves** (et cours)
- Ce polycopié d'analyse et un autre sur les nombres complexes
- Des séries d'analyse distribuées en cours
- Le polycopié d'analyse et les séries d'exercices de 3e
- Une calculatrice non programmable (non « PRO »)
- Monographie CRM n°27: *Notions élémentaires*

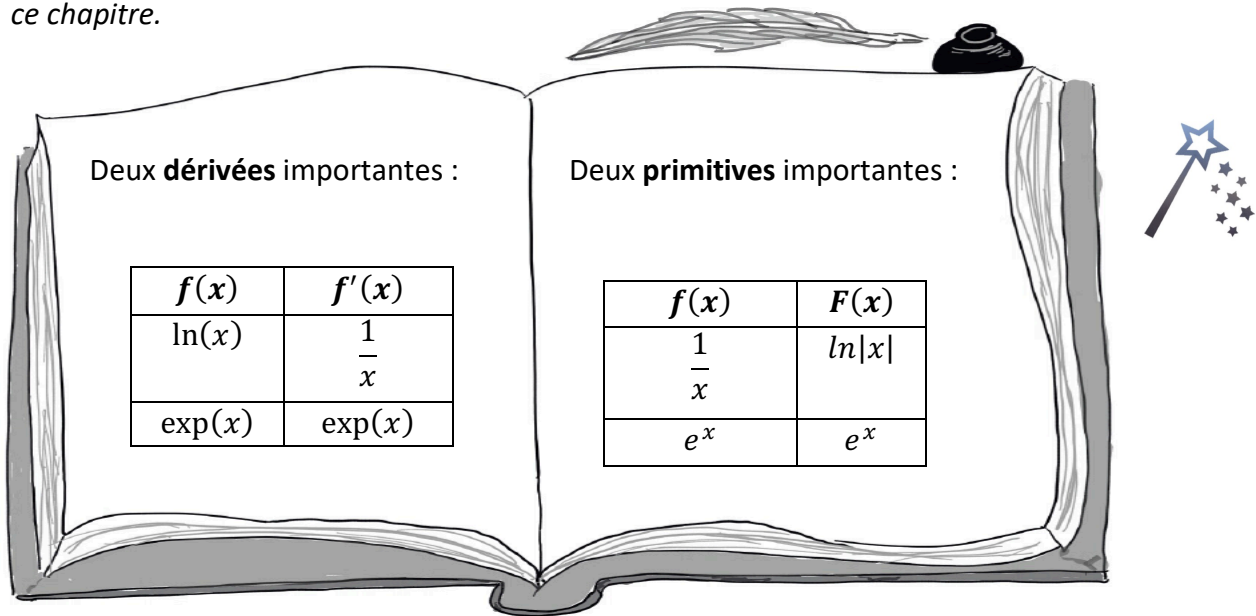
(pour les notions acquises en 1ere et 2eme)



1. Formules utiles pour les exercices

1.1 Dérivées et primitives

Remarque : les formules présentées dans ce paragraphe seront démontrées dans la suite de ce chapitre.



Exemples :

$$a) (\ln(x^2))' = \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

$$b) (e^{2x-1})' = e^{2x-1} \cdot (2x-1)' = 2e^{2x-1}$$

$$c) \left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)' =$$

$$d) (e^{x^2+x})' =$$

Exemples :

$$a) \int_1^e \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]_1^e = \frac{1}{2} (\ln(e) - \ln(1)) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

$$b) \int_0^{1/2} e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^{1/2} = \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e-1}{2}$$

$$c) \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx =$$

$$d) \int_2^3 e^{\frac{x}{2}} dx =$$

➤ *Analyse Série 1 exercices 1 à 4 & Monographie n°25 de la CRM, p.220-221 ex 6.1 à 6.3 et 6.5 et 6.8*

1.2 Théorème de l'Hospital

Pour étudier les asymptotes verticales et horizontales des fonctions logarithme et exponentielle, nous aurons besoin du théorème de l'Hospital.

But : Obtenir un critère permettant de calculer aisément des limites de quotients dans des cas indéterminés tels que « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1}{x - 1} =$

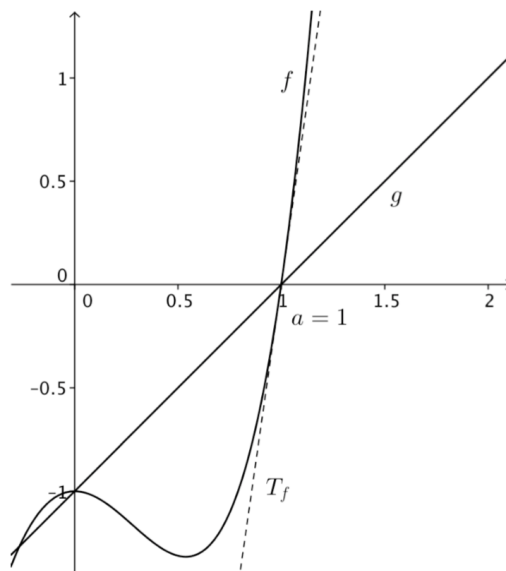
Méthode habituelle : Soit les fonctions $f(x) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 1$,

$$g(x) = x - 1 \text{ et le point } a = 1.$$

Pour calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}$ la méthode classique consiste à constater que $f(1) = g(1) = 0$ et

donc, par un théorème de 2^e, de factoriser chacun des polynômes par $x - 1$.

Il suffit alors de faire une division polynomiale et le tour est joué !



Or, une astuce consiste à faire intervenir la dérivée de f dans le calcul de la manière suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{g(x) - g(1)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = 7$$

qui est bien défini car $g'(1) \neq 0$.

D'une manière générale on a le résultat :

Théorème de l'Hospital (« light ») :

Si

- f et g sont dérivables en a
- $f(a) = g(a) = 0$
- $g'(a) \neq 0$

alors
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$



Preuve :
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}, \text{ puisque } g'(a) \neq 0$$

Exemples :

a)
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x^2-x-6} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+5}{2x-1} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{1-\sqrt{x+1}} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1} = 2$$

Exercice :

a)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5-1}{x^7-1} =$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(\sin(x))}{\sin(x)} =$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x)-1}{x^2+\sin^2(x)} =$$

En revanche, le théorème ne permet pas de déterminer la dérivée en $a = 0$ de la fonction

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Pour ce faire, il est nécessaire de disposer d'un théorème moins contraignant, énoncé ci-dessous :

Théorème de l'Hospital (standard)

Si

- 1) f et g sont dérivables sur $]a; b]$
- 2) f et g sont continues sur $[a; b]$
- 3) $f(a) = g(a) = 0$,
- 4) $g'(x) \neq 0$ sur $]a; b]$
- 5) $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$



Preuve : Posons $h(x) := f(x)g(b) - g(x)f(b)$

On a :

- h continue sur $[a; b]$
- h dérivable sur $]a; b[$
- $h(a) = h(b) = 0$
car : $h(a) = \underbrace{f(a)}_{=0}g(b) - \underbrace{g(a)}_{=0}f(b) = 0$
et : $h(b) = f(b)g(b) - g(b)f(b) = 0$

Par le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $h'(c) = 0$, c'est-à-dire :

$$h'(x) = (f(x)g(b) - g(x)f(b))' = f'(x)g(b) - g'(x)f(b)$$

donc $h'(c) = \underbrace{f'(c)g(b) - g'(c)f(b)} = 0$

$$\Leftrightarrow f'(c)g(b) = g'(c)f(b) \Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)}{g(b)}$$

Si $b \rightarrow a+$, alors $c \rightarrow a+$ et $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(b)}{g(b)} = \lim_{c \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lambda$.

CQFD

Remarque :

Le théorème reste valable si on remplace $a+$ par $b-$, ou si $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$

Exemples :

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\sim} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} \stackrel{\frac{1}{\infty}}{\sim} 0$$

Attention : Que la dérivée de g ne s'annule pas sur un certain ouvert $]a; b[$ est essentiel.

Reprenons l'exemple de la fonction $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$:

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

Chacune des fonctions au numérateur et au dénominateur s'annule en $a = 0$ et sont \mathcal{C}^∞ (la fonction f est n fois continument dérivable, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Si l'on applique le théorème de l'Hospital (standard), on obtient :

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = (*)$$

et donc un doute subsiste encore sur l'existence de la limite.

Cependant, l'on peut à nouveau appliquer le théorème de l'Hospital (« light ») sur le nouveau quotient pour voir apparaître :

$$(*) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0$$

et donc toutes les limites qui précèdent existent aussi (récursivement) !

➤ **Livre d'Analyse p.129 ex 4.1- 4.3**

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

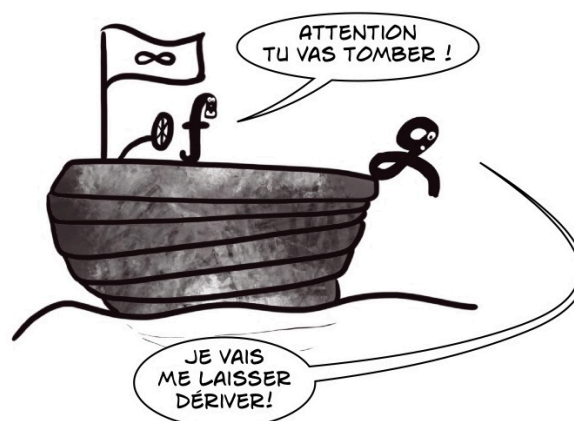
Théorème de L'Hospital

On note a un nombre réel, f et g deux fonctions dérivables dans un intervalle ouvert contenant a et telles que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ou si $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty$, alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Cette règle s'applique également aux calculs de limites lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

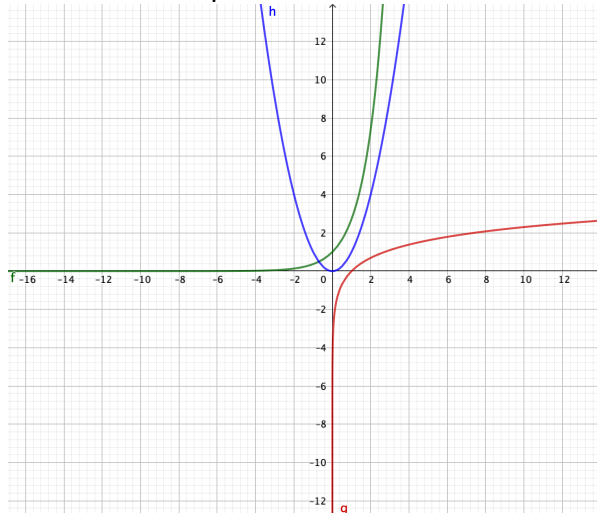
➤ **Analyse Série 1 exercice 5 & Monographie n°25 de la CRM, p.222-223 ex 6.14**





1.3 La course à l'infini : la règle du podium

Les fonctions $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln(x)$ et $h(x) = x^2$ font la course jusqu'à l'infini. Qui gagnera à tous les coups ?



Cette question est importante à maîtriser pour les études de fonctions. La course à l'infini représente la recherche d'une asymptote horizontale. Les fonctions à étudier sont souvent des multiplications de fonctions polynômiales avec des fonctions exponentielles ou logarithmes.

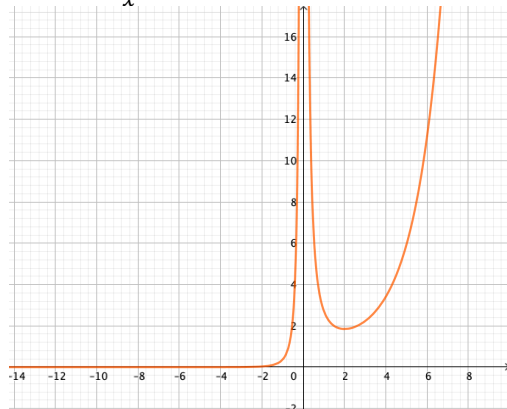
Exemples : $f_1(x) = \frac{e^x}{x^2}$ ou $f_2(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Ces deux fonctions amènent une indétermination de type ∞/∞ lors du calcul de limite avec x qui tend vers l'infini.

Le théorème de l'Hospital nous permettra de faire « disparaître » le polynôme et c'est donc l'exponentielle qui gagnera la course face à n'importe quel polynôme. C'est la règle du podium.

On a donc :

$f_1(x) = \frac{e^x}{x^2}$ pas d'A.H vers $+\infty$



et $f_2(x) = \frac{x^2}{e^x}$ avec une A.H. en $y = 0$ vers $+\infty$



1.4 Les autres bases

L'exponentielle de base e est la plus courante.

Mais que se passe-t-il pour les autres bases ?

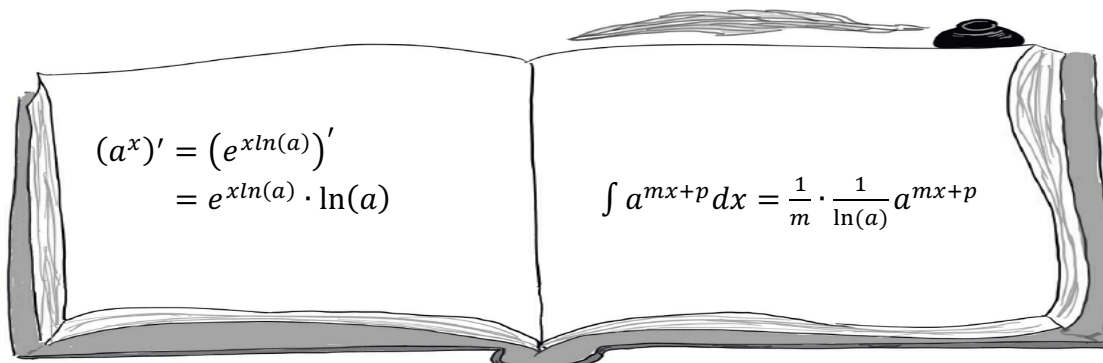


Il faut se rappeler d'une formule :

$$a^x = e^{x \ln(a)}$$

Avec cette formule et les règles de dérivations, il est possible de retrouver la règle.

On obtient donc les pages suivantes du grimoire :



2. Rappels de deuxième année :

2.1 Propriétés de puissances et fonction exponentielle :

En *deuxième année*, nous avons étudié les fonctions exponentielles et logarithme.

Nous avons défini la fonction $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x \mapsto a^x \end{cases}$ qui est bijective si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Nous avons ensuite défini la fonction $\log_a : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ comme la réciproque de \exp_a .

En *algèbre*, il a été possible de donner une définition de a^x , pour autant que a soit un nombre réel positif et x un nombre rationnel.

Rappelons la démarche qui a conduit à cette définition en considérant la fonction

$$f: x \mapsto 10^x$$

Dans un premier temps, 10^x est défini pour les nombres entiers positifs :

$$10^x = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{x \text{ fois}}$$

C'est une notation très utile, en particulier pour multiplier les grands nombres puisqu'on a la propriété :

$$10^n \cdot 10^m = 10^{n+m}$$

L'extension de la définition de 10^x à des nombres x rationnels se justifie par le maintien de cette propriété.

L'équation : $10^0 \cdot 10^n = 10^{0+n} = 10^n$ nous force à poser que $10^0 = 1$.

L'équation suivante : $10^{-n} \cdot 10^n = 10^0 = 1$ nous oblige à poser : $10^{-n} = 1/10^n$

Puisqu'on souhaite que l'équation : $10^{\frac{1}{n}} \cdot 10^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot 10^{\frac{1}{n}} = 10^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = 10^1 = 10$

soit vraie, il faut définir : $10^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{10}$

Et puisque l'on souhaite que l'équation : $\underbrace{10^{\frac{1}{n}} \cdot 10^{\frac{1}{n}} \cdot \dots \cdot 10^{\frac{1}{n}}}_{m \text{ fois}} = 10^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} = 10^{\frac{m}{n}}$ soit vraie,

il faut définir : $10^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{10})^m$

Malheureusement, l'algèbre ne nous permet pas d'aller plus loin et de définir 10^x pour x rationnel. L'analyse nous donnera toutefois le moyen de franchir ce pas, comme nous le verrons plus loin.

Pour le moment, contentons-nous de rappeler les propriétés et l'allure de l'exponentielle, puis du logarithme. On supposera simplement qu'il est possible de définir 10^x ou a^x ($a > 0$) pour $x \in \mathbb{R}$.

Théorème (puissances) : Si $m, n \in \mathbb{R}$ et $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad 1^n = 1,$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \quad a^0 = 1$$

Définition (exponentielle) :

Une **fonction exponentielle** est une fonction de la forme :

$$f: x \mapsto a^x$$

où a est un réel strictement positif et $a \neq 1$.

Le domaine de f est \mathbb{R} .

Propriétés (de la fonction exponentielle) :

1. $a \neq 1$ et $a > 0$
2. L'image de \mathbb{R} par f est \mathbb{R}_+^* ; c'est une fonction strictement croissante ou décroissante selon la valeur de a .
3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est donc bijective.
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$; pour $a > 1$, Lorsque $x \rightarrow -\infty$, l'axe des x est une asymptote horizontale et lorsque $x \rightarrow \infty$, la fonction croît très rapidement (de manière exponentielle, justement)
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$; pour $0 < a < 1$, lorsque $x \rightarrow \infty$, l'axe des x est une asymptote horizontale et lorsque $x \rightarrow -\infty$, la fonction croît très rapidement (de manière exponentielle, justement).

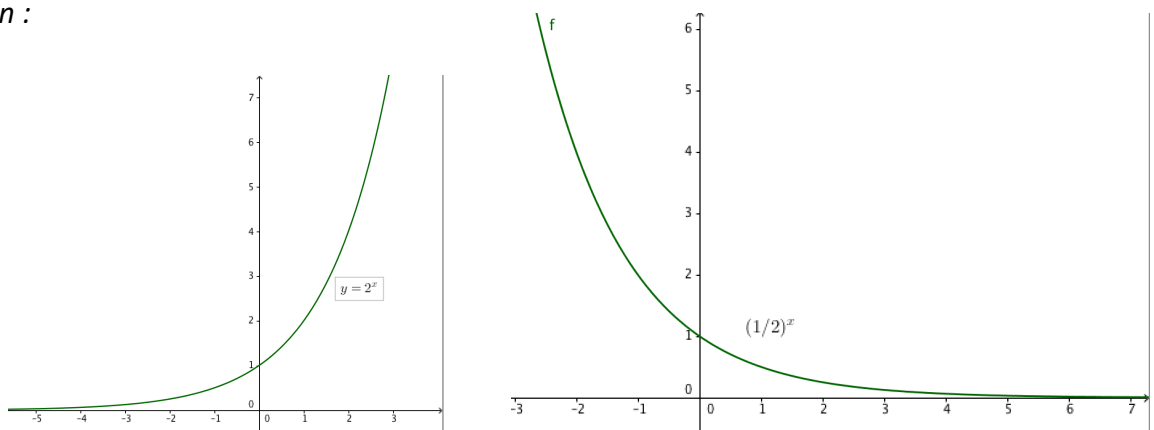
Remarques par rapport à la propriété 1 :

Si $a = 1$, alors on a $f(x) = 1^x = 1$, donc une fonction constante.

Si $a < 0$, alors la fonction n'est pas définie avec $x = \frac{1}{2}$,

$$\text{exemple : } (-3)^{1/2} = \sqrt{-3}$$

Illustration :



Beaucoup de situations apparaissant dans le monde naturel peuvent être symbolisées par une fonction exponentielle dont la base est un nombre irrationnel très particulier symbolisé par la lettre e : $f: x \mapsto e^x$. Ce nombre e a une valeur approximative de 2,71828 ...

2.2 La fonction logarithme :

Une fonction bijective $f: x \mapsto y$ a une réciproque $f^{-1}: x \mapsto y$ qui est définie (implicitement) par l'équation $x = f(y)$. En particulier, l'exponentielle $y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$, est bijective et a donc une réciproque définie implicitement par l'équation

$$x = a^y, a > 0, a \neq 1$$

Cette réciproque est suffisamment importante pour mériter un nom, c'est la fonction logarithme.

Définition (fonction logarithme) :

La **fonction logarithme de base a** , avec $a > 0, a \neq 1$ est une fonction de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} désignée par

$$\log_a: x \mapsto y$$

et est définie par

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y$$

Si la base du logarithme est e , il s'agit du **logarithme népérien** noté **ln(x)**

Si la base du logarithme est 10, la fonction logarithme est simplement notée **log(x)**.

Exemples :

1. Si $y = \log_3(x)$ alors $x = 3^y$.

Ainsi $\log_3(9) = 2$ car $9 = 3^2$.

2. $\log(1000) = 3$, car $1000 = 10^3$.

Exemple de transformation d'expressions exponentielles en expressions logarithmiques.

a) $2,5^3 = m$ on a donc $3 = \log_{2,5}(m)$

b) $e^b = 9$ on a donc $b = \ln(9)$

Exercice de recherche de la valeur exacte de certains logarithmes :

a) $\log_2(8) =$

b) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right) =$

c) $\log_5(25) =$

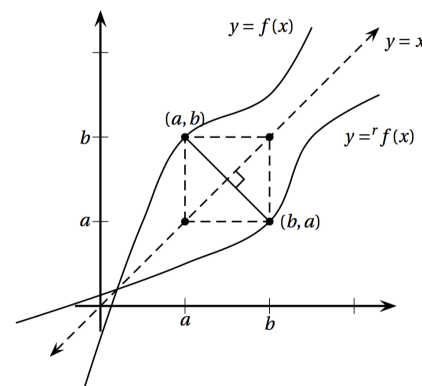
Rappel sur la représentation d'une fonction et de sa réciproque¹ :

Soit un point (a, b) appartenant à la représentation graphique d'une fonction bijective f donnée. On a alors $b = f(a)$. On a aussi immédiatement $a = {}^r f(b)$.

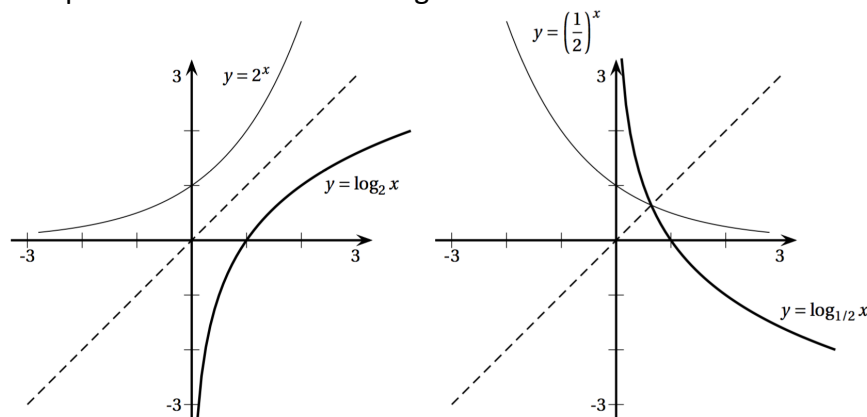
Ainsi (b, a) est un point du graphe de la fonction réciproque ${}^r f$. On note aussi que la ligne joignant les points (a, b) et (b, a) est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$ et que celle-ci la coupe en son milieu. La droite $y = x$ est donc un axe de symétrie pour les courbes représentant les fonctions f et ${}^r f$.

Concernant les ensembles de départ et d'arrivée d'une fonction et de sa réciproque, on a aussi les identités :

$$\begin{aligned} \text{Image}(f) &= \text{Domaine } {}^r f \\ \text{Domaine } f &= \text{Image } ({}^r f) \end{aligned}$$

Représentation graphique du logarithme² :

Comme le logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle, il suffit de connaître le graphe de celle-ci pour en déduire celui du logarithme.



Remarques :

- Pour tout $a > 0$, l'intersection avec l'axe des x est en 1, c'est-à-dire que $\log_a(1) = 0$ car $a^0 = 1$.
- L'axe Oy est une asymptote verticale du graphe.
- Le logarithme est une fonction strictement croissante si $a > 0$, et strictement décroissante si $0 < a < 1$.
- Le graphe est lisse et continu, sans point anguleux ni saut.

Propriétés des logarithmes :

Propriétés des logarithmes :

Soient a, t, s des nombres positifs, $a \neq 1$ et x un réel quelconque.

1. $\log_a(1) = 0$ et $\log_a(a) = 1$

2. $a^{\log_a(t)} = t$ et $\log_a(a^r) = r$

Preuve de 2. : Soit $x = \log_a(t)$. On a par définition du logarithme l'expression correspondante de l'exponentielle $a^x = t$ mais $x = \log_a(t)$ donc $a^{\log_a(t)} = t$.

¹ Tiré du cours de Jan Weiss du Collège Calvin.

² <http://icp.ge.ch/po/calvin/espace-pedagogique/math/cours-de-j.-weiss/documents-pour-le-cours-de-3e-et-4e-maths-niveau-2>

Exemples :

a) $2^{\log_2(8)} =$

c) $e^{\ln(5)} =$

b) $2^{\log_2(\pi)} =$

d) $\ln(e^x) =$

3. $\log_a(t \cdot s) = \log_a(t) + \log_a(s)$ le log d'un produit est égal à la somme des logs

4. $\log_a\left(\frac{t}{s}\right) = \log_a(t) - \log_a(s)$ le log d'un quotient est égal à la différence des logs.

5. $\log_a\left(\frac{1}{t}\right) = -\log_a(t)$

6. $\log_a(t^r) = r \cdot \log_a(t)$

Exemples :

a) $\log_a(x\sqrt{x^2+1}) = \log_a(x) + \log_a(\sqrt{x^2+1}) = \log_a(x) + \frac{1}{2}\log(x^2+1)$

b) $\log_a\left(\frac{x^2}{(x-1)^3}\right) =$

c) $\log_a\left(\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^4}\right) =$

Formule de changement de base :

Si $a \neq 1, b \neq 1$ et t sont des nombres réels positifs, alors

$$\log_a(t) = \frac{\log_b(t)}{\log_b(a)}$$

Preuve : Posons $y = \log_a(t)$.

On a que :

$$a^y = t$$

Donc

$$\log_b(a^y) = \log_b(t)$$

Par la propriété 6, nous avons :

$$y \log_b(a) = \log_b(t)$$

Isolons y :

$$y = \frac{\log_b(t)}{\log_b(a)}$$

Finalement :

$$\log_a(t) = \frac{\log_b(t)}{\log_b(a)}$$

Exemples :

a) $\log_5(89) = ?$ pas de touche à la calculatrice ! On utilise la formule de changement de base :

$$\log_5(89) = \frac{\log(89)}{\log(5)} \cong 2,7889$$

b) $\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{5}) =$

3. La fonction logarithme

3.1 Définition

Soit $f: x \mapsto x^n$ de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} et $n \in \mathbb{R}$.

f est continue sur \mathbb{R}_+^* , elle admet donc des primitives.

- Si $n \neq -1$: on sait que les primitives de f sont de la forme :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ vers } \mathbb{R} \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$
- Si $n = -1$: que se passe-t-il ?

La primitive $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ n'est pas valable car la division par zéro est interdite.

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx \neq \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + c = \frac{x^0}{0} + c$$

Nous savons que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur \mathbb{R}^* et que toute fonction continue sur un intervalle fermé est intégrable. Donc il existe un intervalle (attention, \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle !) sur lequel f est intégrable.

Et comme l'intégrale définit une primitive de f (d'après le théorème fondamental du calcul intégral), on sait que la fonction $x \mapsto \int_a^x \frac{1}{t} dt$ de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} , est la primitive de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en $x = a$.

Parmi ces primitives, celle qui associe 1 à 0 ($1 \mapsto 0$) fait l'objet de la définition suivante :

Définition : On appelle **fonction logarithme naturel** la fonction (notée \ln):

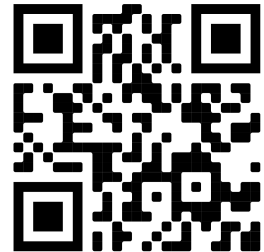
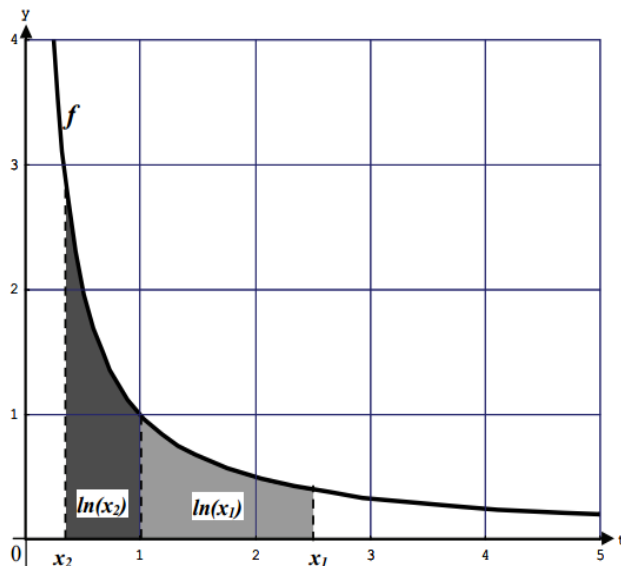
$$\ln: x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ vers } \mathbb{R}$$



3.2 Propriétés de la fonction \ln

Interprétation géométrique :

Nous pouvons "visualiser" cette fonction \ln , puisque si $x \in \mathbb{R}_+^*$, le réel $\ln(x)$ est l'aire du domaine délimité par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, l'axe horizontal et les verticales passant par $(1; 0)$ et $(x; 0)$:

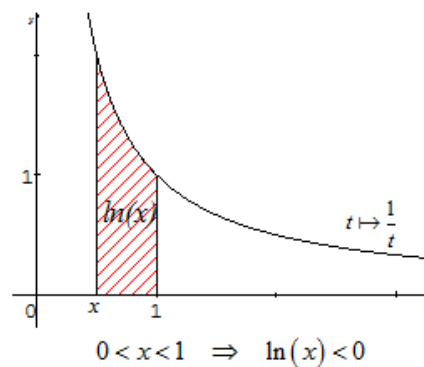
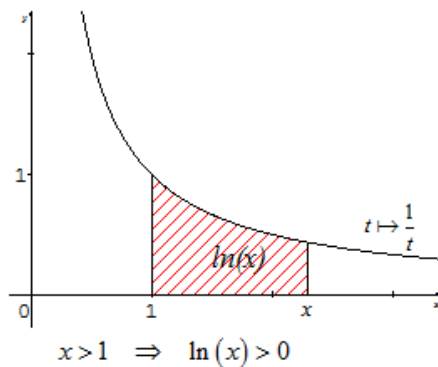


Cette démonstration
peut être revue en
vidéo.



On remarque :

- Si $0 < x < 1$ alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \underbrace{\int_x^1 \frac{1}{t} dt}_{>0} < 0$
- Si $x > 1$ alors $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0$



A partir de la définition, nous obtenons les propriétés suivantes pour la fonction \ln :

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}_+^*$

Le domaine de définition exclut donc zéro et toutes les valeurs de $x < 0$. De ce fait, il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

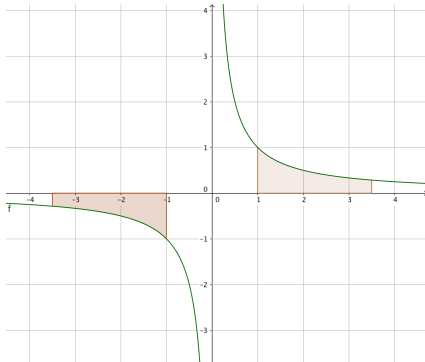
Propriété 2 : $\ln(1) = 0$

Par définition de l'intégrale : $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$.

La fonction \ln admet un zéro en $x = 1$

Propriété 3 : $(\ln(x))' = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

D'après le théorème fondamental, $\ln(x)$ est une primitive de $f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$



Remarquons que la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ est définie sur \mathbb{R}^* et qu'elle est continue aussi bien sur $]0; \infty[$ que $]-\infty; 0[$.

Nous pourrions calculer l'aire sous f du côté négatif grâce à une symétrie :

Ainsi :

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, c \in \mathbb{R}$$

Exemple :

$$\int_{-3,5}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_{-3,5}^{-1} = - \int_1^{3,5} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^{3,5}$$

Propriété 4 : \ln est une fonction continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^*

Preuve :

Comme \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , elle est continue sur \mathbb{R}_+^* .

Sa dérivée $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

ce qui implique que $\ln(x)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Remarque :

Comme $\ln(x)$ est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , $\ln(x)$ est négative si $0 < x < 1$ et positive si $x > 1$.

On peut donc construire le tableau de signes suivant :

x		0		1	
$\ln(x)$	/	/	-	0	+

Propriété 5 : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve :

Si $y \in \mathbb{R}_+^*$ (une constante), les fonctions $F: x \mapsto \ln(x)$ et $G: x \mapsto \ln(xy)$ de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} ont la même fonction dérivée, car :

$$F(x) = \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \ln(xy) = F(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt$$

Donc

$$F'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad G'(x) = \frac{1}{x}$$

Comme F et G sont primitives de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors F et G ne diffèrent que par une constante :

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(xy) = \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Pour déterminer la constante c , on pose $x = 1$ dans la dernière égalité.

On obtient :

$$\ln(1y) = \underbrace{\ln(1)}_0 + c \Leftrightarrow \ln(y) = c$$

Conclusion : $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

Exemple : $\ln(3) + \ln(5) = \ln(15)$

Propriété 6 : $\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) \forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall p \in \mathbb{R}$

Preuve : $(\ln(x^p))' =$

prop 3 + $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x^p} (x^p)' \\ &= \frac{1}{x^p} \cdot p \cdot x^{p-1} \stackrel{\text{algèbre}}{=} p \cdot \frac{1}{x} \stackrel{\text{prop 3}}{=} (p \cdot \ln(x))' \end{aligned}$$

Comme $(\ln(x^p))' = (p \cdot \ln(x))'$, cela signifie que $\ln(x^p)$ et $p \cdot \ln(x)$ ne diffèrent que d'une constante :

$$\ln(x^p) = p \cdot \ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

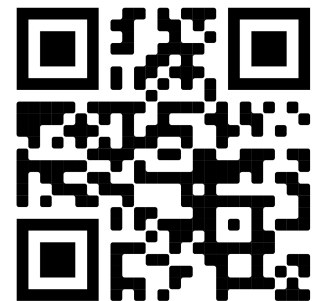
Pour déterminer la constante, posons $x = 1$.

On obtient :

$$\begin{aligned} \ln(1^p) &= p \cdot \ln(1) + c \\ \Leftrightarrow 0 &= p \cdot 0 + c \\ \Leftrightarrow c &= 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \ln(x^p) &= p \cdot \ln(x) + 0 \\ \Leftrightarrow \ln(x^p) &= p \cdot \ln(x) \end{aligned}$$



Cette démonstration peut être revue en vidéo.



Propriété 7 : $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve : Posons $\frac{y}{y} = y \cdot \frac{1}{y} = 1$

$$\Leftrightarrow \ln\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = \underbrace{\ln(1)}_{\text{prop 2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\ln(y)}_{\text{prop 5}} + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

Propriété 8 : $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

Preuve : Posons $\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$

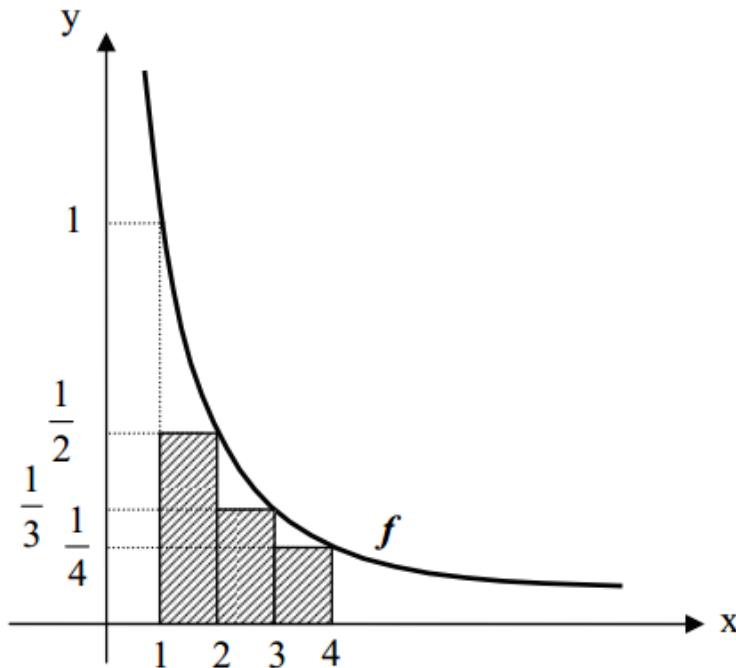
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{prop 5}}{=} \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) \stackrel{\text{prop 7}}{=} \ln(x) - \ln(y)$$



Propriété 9 : $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Preuve :

Nous allons raisonner à l'aide d'un dessin :



Nous savons que $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ représente l'aire définie entre 1 et x par la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ et cette aire est supérieure à celle définie par les rectangles dessinés sous la courbe, dont la base vaut toujours 1 et la hauteur $\frac{1}{n}$.

Par exemple :

Pour calculer cette dernière somme, nous allons faire la comparaison entre cette somme et une autre somme qui est plus petite, car on y a remplacé certaines fractions par d'autres plus petites

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots > \\ & \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{32}\right) + \dots \end{aligned}$$

Et dans chacune des parenthèses on remarque que l'on obtient chaque fois $\frac{1}{2}$, et l'on pourra obtenir autant de fois $\frac{1}{2}$ que l'on veut, car notre somme contient une infinité de termes.

Donc notre somme est plus grande que celle qui correspond à une infinité de $\frac{1}{2}$ et qui tend donc vers l'infini.

Remarque : la fonction \ln ne possède donc pas d'asymptote horizontale.

Propriété 10 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

Preuve : Posons $x = \frac{1}{y}$ donc $x \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{y}\right) \\
 &\stackrel{\text{prop 7}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} (-\ln(y)) \\
 &\stackrel{\text{prop des limites}}{=} - \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y) \\
 &\stackrel{\text{prop 9}}{=} -\infty
 \end{aligned}$$

Remarque : la fonction \ln possède une asymptote verticale en $x = 0$

Propriété 11 : $\ln(e) = 1$

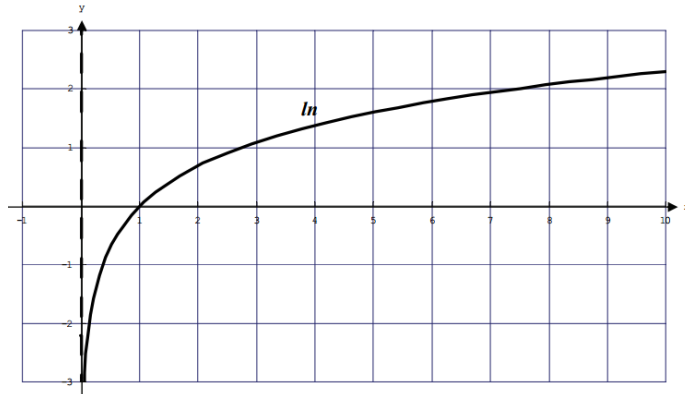
Des propriétés 4), 9) et 10), on peut déduire que \ln est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . Cela signifie que chaque $y \in \mathbb{R}$ possède une unique préimage, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

En particulier, il existe un unique nombre réel, noté e , tel que $\ln(e) = 1$.
 e est la préimage de 1 par \ln , c'est-à-dire: $\ln(e) = 1$ ou $\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$

e est un nombre irrationnel et $e \approx 2,71828 \dots$, c'est le **nombre d'Euler**

3.3 Représentation graphique de la fonction \ln :

A part $\ln(1)$, nous ne pouvons pour le moment calculer aucune image ! Mais, en connaissant les 2 limites, en sachant que la fonction est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et en utilisant le fait que la pente de la tangente est donnée par $\frac{1}{x}$ (donc la courbe "s'aplatit rapidement"), nous pouvons esquisser la représentation graphique de la fonction \ln :



4. La fonction Exponentielle

4.1 Définition :

Nous voulons considérer la réciproque³ de la fonction \ln . Pour cela, il faut tout d'abord montrer que cette réciproque existe, donc que \ln est une fonction bijective de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

- La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^*
- Nous savons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$.
Comme \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* , chaque élément de \mathbb{R} a **au moins** une préimage par \ln dans \mathbb{R}_+^* (surjectivité)
- Chaque préimage est **unique (injectivité)**.
Dans le cas contraire, il existerait deux nombres x_1 et x_2 distincts ayant la même image ; on aurait, par exemple, $x_1 < x_2$ et $\ln(x_1) = \ln(x_2)$. Mais ceci n'est pas possible, car nous savons que \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , par conséquent : $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln(x_1) < \ln(x_2)$

En conclusion : La fonction \ln est bijective de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

Nous pouvons donc définir une fonction réciproque de \ln , que nous noterons **exp** :

Définition : La fonction **exp** est la réciproque de la fonction \ln

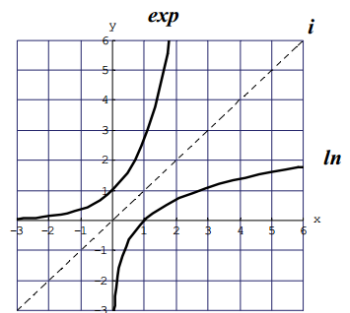
Autrement dit : $y = \ln(x) \Leftrightarrow x = \exp(y) \forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}$

On peut aussi écrire: $\ln(\exp(y)) = y \text{ et } \exp(\ln(x)) = x \forall x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall y \in \mathbb{R}$

Représentation graphique :

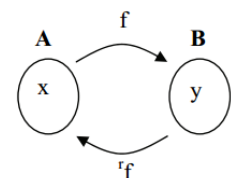
A partir de cette définition, nous pouvons donner une représentation graphique de la fonction \exp :

Remarque : La fonction \exp est une fonction bijective de \mathbb{R} vers \mathbb{R}_+^* car elle est la réciproque de la fonction bijective \ln de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .



³ Rappels :

- Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction
 f est bijective $\Leftrightarrow \forall y \in B \exists$ un unique $x \in A$ tel que $y = f(x)$
- Soit $f: A \rightarrow B$ une fonction bijective
 ${}^r f: B \rightarrow A$ est telle que ${}^r f(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \forall x \in A \text{ et } \forall y \in B$
 ${}^r f$ est appelée la fonction réciproque de la fonction f
- f admet une fonction réciproque de B vers $A \Leftrightarrow f$ est une fonction bijective de A vers B .
La fonction réciproque d'une bijection est aussi bijective.
Dans un repère orthonormé, les graphiques d'une fonction f et de sa réciproque ${}^r f$ présentent une symétrie par rapport à la droite $i(x) = x$



4.2 Propriétés de la fonction *exp*

A partir de cette définition, nous pouvons obtenir les propriétés suivantes de la fonction *exp* :

Propriété 1 : $D_f = \mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$

Preuve :

car *exp* est la réciproque de la fonction *ln* qui est bijective de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

La fonction *exp* n'admet pas de zéro.

Propriété 2 : $\exp(0) = 1$ (ordonnée à l'origine)

Preuve :

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = 1$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(1)}_{=0}\right) = 1$

Propriété 3 : $\exp(1) = e$

Preuve :

On a $\exp(\ln(x)) = x$ donc en posant $x = e$ on a: $\exp\left(\underbrace{\ln(e)}_{=1}\right) = e$

Propriété 4 : La fonction *exp* est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$

Preuve : On a : $\ln(\exp(x)) = x$

Dérivons l'égalité (puisque deux fonctions égales ont la même dérivée) :

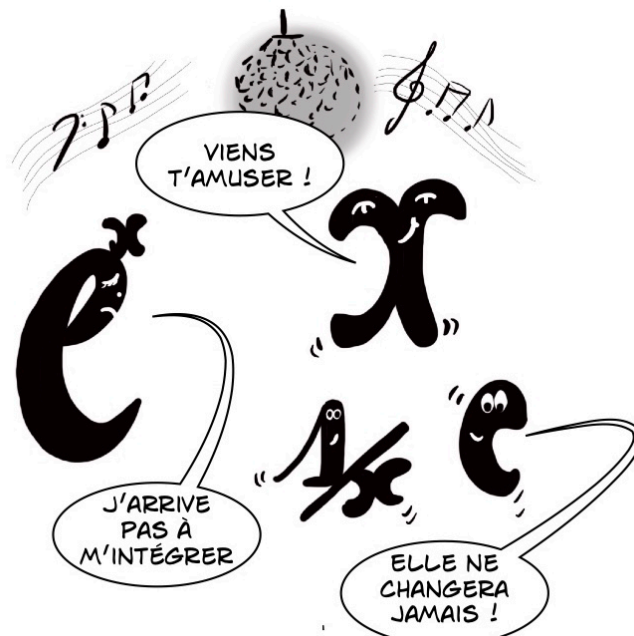
$$(\ln(\exp(x)))' = (x)'$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)} (\exp(x))' = 1$$

Dérivée d'une fonction composée

$$\Leftrightarrow (\exp(x))' = \exp(x)$$

Remarque : Puisque $\forall x \in \mathbb{R}, (\exp(x))' = \exp(x)$, la fonction *exp* est primitive d'elle-même sur \mathbb{R} .



Propriété 5 : La fonction \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R}

Preuve :

\exp est continue sur \mathbb{R} car dérivable sur \mathbb{R}
 Elle est strictement croissante sur \mathbb{R} car sa dérivée $(\exp(x))' = \exp(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Remarque : Comme \exp est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} , \exp est $\begin{cases} < 1, \text{ si } x < 0 \\ > 1, \text{ si } x > 0 \end{cases}$

Propriété 6 : $\exp(x_1) \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Preuve :

$$\begin{aligned} \ln(\exp(x_1) \exp(x_2)) & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{prop } \ln}}{\equiv} & \ln(\exp(x_1)) + \ln(\exp(x_2)) \\ & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{déf réciproque}}}{\equiv} & x_1 + x_2 \\ & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{déf réciproque}}}{\equiv} & \ln(\exp(x_1 + x_2)) \end{aligned}$$

Donc :

$$\ln(\exp(x_1) \exp(x_2)) = \ln(\exp(x_1 + x_2))$$

Comme \ln bijective donc $\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$

$$\Leftrightarrow \exp(x_1) \exp(x_2) = \exp(x_1 + x_2)$$

Propriété 7 : $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right) & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{prop } \ln}}{\equiv} & -\ln(\exp(x)) \\ & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{déf réciproque}}}{\equiv} & -x \\ & \\ \stackrel{\substack{= \\ \text{déf réciproque}}}{\equiv} & \ln(\exp(-x)) \end{aligned}$$

Donc : $\ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right) = \ln(\exp(-x))$

Comme \ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$$

$$\text{Propriété 8 : } \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} = \exp(x_1 - x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve : } \frac{\exp(x_1)}{\exp(x_2)} &= \exp(x_1) \cdot \frac{1}{\exp(x_2)} \\ &\stackrel{\text{prop 7}}{=} \exp(x_1) \cdot \exp(-x_2) \\ &\stackrel{\text{prop 6}}{=} \exp(x_1 + (-x_2)) \\ &= \exp(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

$$\text{Propriété 9 : } (\exp(x))^n = \exp(nx) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{R}$$

Preuve :

$$\ln([\exp(x)]^n) \stackrel{\text{prop ln}}{=} n \cdot \ln(\exp(x)) \stackrel{\text{déf réciproque}}{=} nx \stackrel{\text{déf réciproque}}{=} \ln(\exp(nx))$$

Donc

$$\ln([\exp(x)]^n) = \ln(\exp(nx))$$

Comme \ln bijective ($\ln(x) = \ln(y) \Rightarrow x = y$) :

$$\Leftrightarrow [\exp(x)]^n = \exp(nx)$$

$$\text{Propriété 10 : } \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$$\text{Propriété 11 : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\text{Propriété 12 : } \exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a vu que $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\exp(n) = \exp(n \cdot 1) = [\exp(1)]^n = e^n$

Soit $n \in \mathbb{Z}_-$, on a : $\exp(n) \stackrel{\text{prop 8}}{=} \exp(-p) = \frac{1}{\exp(p)} = \frac{1}{e^p} = e^{-p} = e^n$

Pour $x \in \mathbb{R}$, on admettra sans démonstration que : $\exp(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

➤ **Analyse Série 1 exercices 6 à 9 & Analyse Série 7 & Monographie n°25 de CRM p.223 ex 6.16 et 6.17**

Table des matières

Matériel :	1
1. Formules utiles pour les exercices	2
1.1 Dérivées et primitives.....	2
1.2 Théorème de l'Hospital	3
1.3 La course à l'infini : la règle du podium	7
1.4 Les autres bases	8
2. Rappels de deuxième année :	9
2.1 Propriétés de puissances et fonction exponentielle :	9
2.2 La fonction logarithme :	11
Rappel sur la représentation d'une fonction et de sa réciproque :	12
Représentation graphique du logarithme :	12
Propriétés des logarithmes :	12
3. La fonction logarithme	14
3.1 Définition	14
3.2 Propriétés de la fonction \ln	15
3.3 Représentation graphique de la fonction \ln :	20
4. La fonction Exponentielle	21
4.1 Définition :	21
4.2 Propriétés de la fonction exp	22

