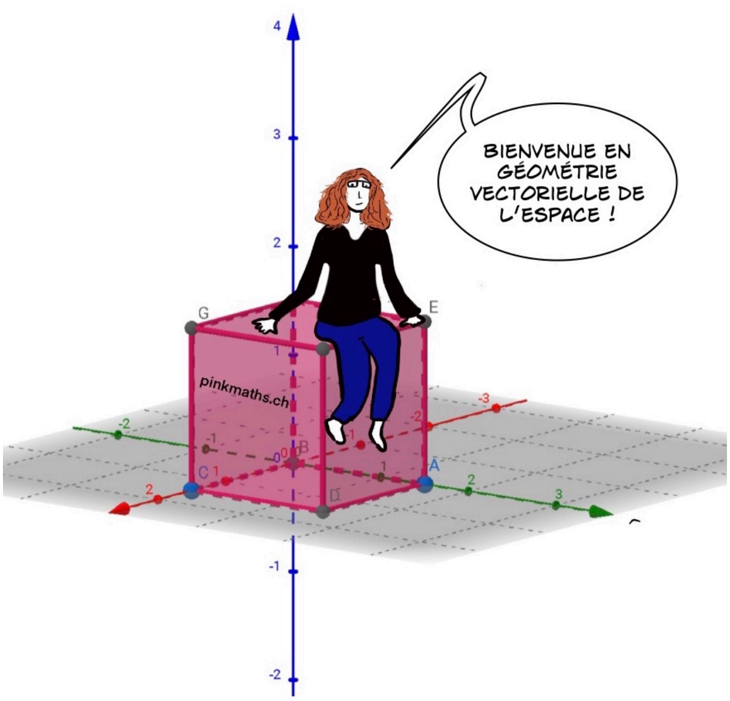
Géométrie vectorielle et analytique[1]

Motivations :

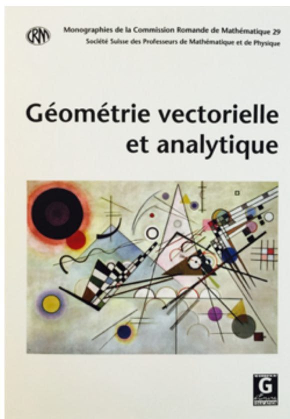
L'étude de la géométrie fit un grand pas en avant lorsqu'on constata que les points du plan ou de l'espace peuvent être représentés par des couples ou des triplets de nombres et que les figures géométriques peuvent être représentées par des équations algébriques. Cette idée fut initiée par le mathématicien français René Descartes (1596-1650) en 1637 dans l'appendice de son livre : *Discours de la méthode.* Cette utilisation de l'algèbre par la géométrie se nomme : la **géométrie analytique**.

L'idée de base de la géométrie analytique est que les études géométriques peuvent être réalisées au moyen de calculs algébriques. On peut dire pour simplifier que c'est de la géométrie sans dessin !

Puisque ce chapitre est au programme de 2ème année en dimension 2 (dans le plan), nous allons passer à la dimension 3 (dans l'espace) en rappelant ce qui a été étudié.



Matériel :



- CRM n°29, *Géométrie Vectorielle et Analytique de l'Espace*
  (pour références de ce cours, exercices supplémentaires)
- Règle, crayon, gomme, calculatrice.
- Ce polycopié
- Les séries distribuées en cours (*GVS1, GVS2, etc.)*

[1] Les références de ce cours sont du cours de C. Reverchon, le livre de la CRM, M. Picchione et B. Gisin.

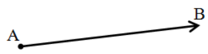
1. Rappels et notation :

1.1 Le vecteur

Des quantités telles que l'aire, le volume, la température ou le temps ne possèdent qu'une valeur quantitative et sont donc entièrement caractérisées par un simple nombre auquel on adjoint une unité. Une quantité de ce type est appelée ***quantité scalaire*** et le nombre réel correspondant un ***scalaire***. Par contre, une quantité telle que la vitesse, un champ électrique ou une force possède outre sa valeur quantitative, une direction et est souvent représentée par un segment orienté, c'est-à-dire un segment muni qu'un sens.

Définition : Un ***bipoint*** est un couple ordonné de points $(A; B)$. Le point A est son ***origine*** et le point B est son ***extrémité***.

Illustration :



Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ ont la même ***direction*** si la droite passant par A et B est parallèle à la droite passant par C et D.

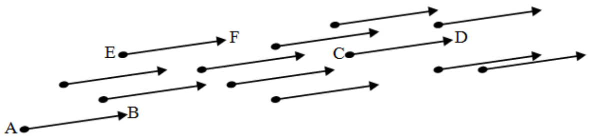
Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ de même direction peuvent avoir le même sens ou des ***sens*** opposés.

La l***ongueur*** d'un bipoint $(A; B)$ est la distance entre A et B, notée $\delta(A; B)$.

Définition : Deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$sont ***équipollents*** si et seulement s'ils sont de même direction, de même sens et de même longueur.

On note : $(A; B) \sim (C; D)$ deux bipoints équipollents.

Illustration :



Définition : L'ensemble des bipoints équipollents au bipoint $(A; B)$ est la classe d'équivalence du bipoint $(A; B)$, appelée ***vecteur*** et noté $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \{(P; Q) | (P; Q) \sim (A; B)\}$$

Remarques :

- Un bipoint est donc considéré comme un "vecteur lié" qui a une origine et une extrémité.
- On parlera de "vecteur libre" ou plus simplement de vecteur l'ensemble des "vecteurs liés" d'une même classe d'équivalence. La flèche d'un vecteur n'a donc pas de position dans le plan ou dans l'espace. Elle peut être déplacée à condition que ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur n'en soient modifiés.
- Un vecteur, se note par une lettre minuscule affublée d'une flèche : $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}$
- L'espace vectorielle noté V^3 est l'ensemble des vecteurs de l'espace.

1.2 Le repère

Définition : On appelle ***repère*** de l'espace E^3 tout quadruplet de points $(O; E_1; E_2; E_3)$ dont trois forment un repère dans un plan et dont le troisième n'est pas contenu dans ce plan.

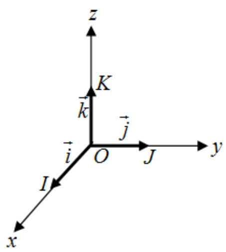
Si $R = (O; E_1; E_2; E_3)$ est un repère de E^3, on peut construire trois vecteurs : $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{OE_2}$ et $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{OE_3}$ qui déterminent une base de E^3.

$B(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la base associée au repère R de l'espace vectorielle V^3.

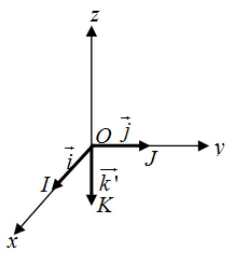
Définition : Un ***repère orthonormé*** de $\mathbb{R}^3$ est un repère (O, I, J, K) ou $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ si
1) $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et 2) $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \perp \vec{k}$, $\vec{\jmath} \perp \vec{k}$

Remarques :

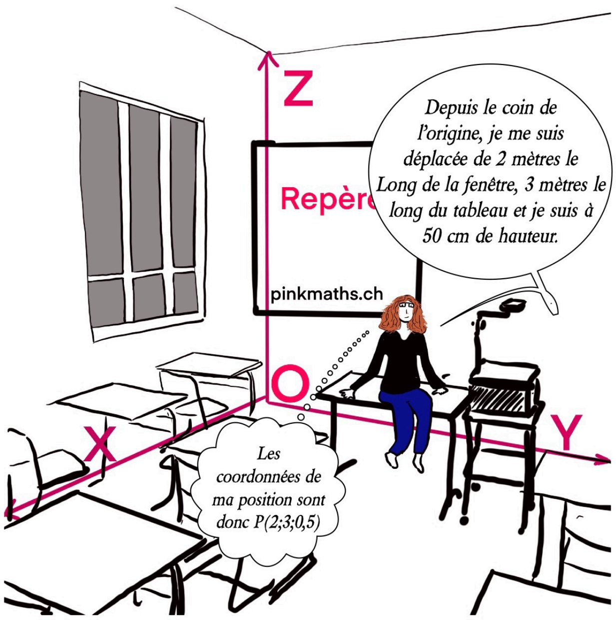
- L'espace $\mathbb{R}^3$ est divisé en 8 quadrants. Nous appellerons "partie visible" le 1er quadrant, c'est-à-dire les points dont les coordonnées sont toutes positives $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$
- Par convention, on prend une base directe ou orienté positivement.

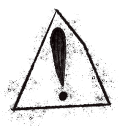


La base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est une ***base directe*** ou ***orienté positivement***.



La base $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}')$ est une ***base rétrograde*** ou ***orientée négativement***.





Dans tout ce qui suit, on suppose l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Vocabulaire : Soit $A = (a_1; a_2; a_3)$, un **point** de l'espace.

On appelle la première coordonnées l'***abscisse***, la deuxième l'***ordonnée*** et la troisième la ***cote***.

Notation :

- Un **vecteur** se notera ainsi $\overrightarrow{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ relativement à la base : $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Un **point** de l'espace : $A = (a_1; a_2; a_3)$. Son nom sera noté avec une lettre majuscule.
- Un **scalaire** (*nombre réel)* se notera avec une lettre grecque : $\alpha, \beta, \gamma, etc.$

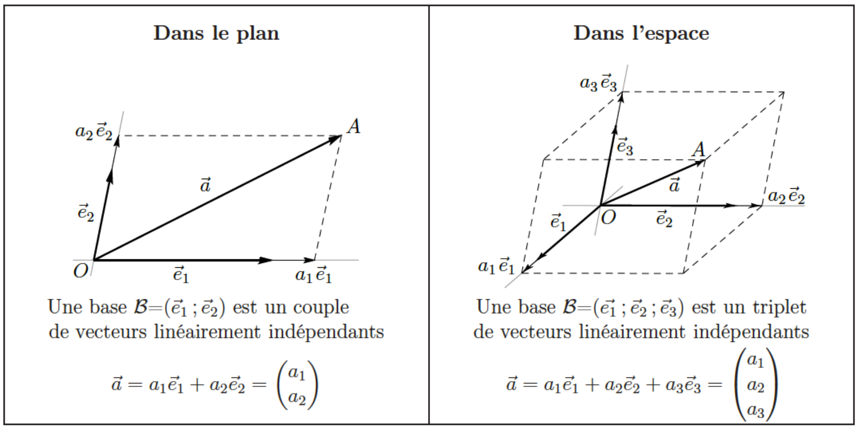
Exemple :

Le point $A(1; 2; 3)$ donne le vecteur :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a} = 1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

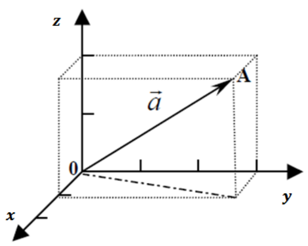
Que peut-on trouver dans la table CRM ?

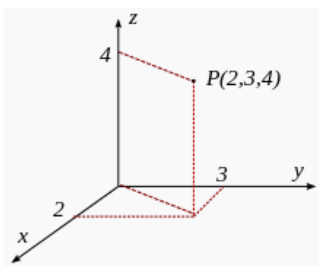
Composantes d'un vecteur relativement à une base



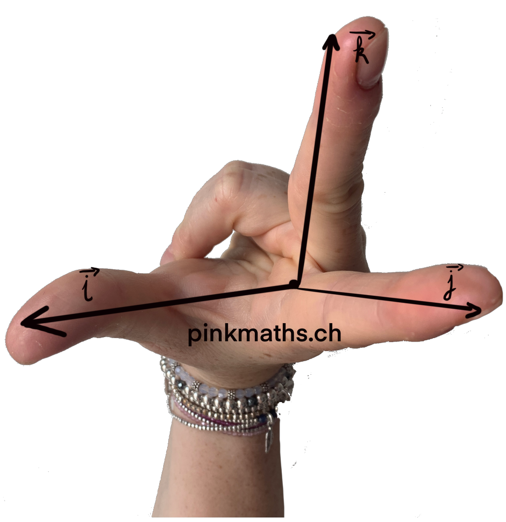
Dans le plan	Dans l'espace
Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants	Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$ est un triplet de vecteurs linéairement indépendants
$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Illustrations :

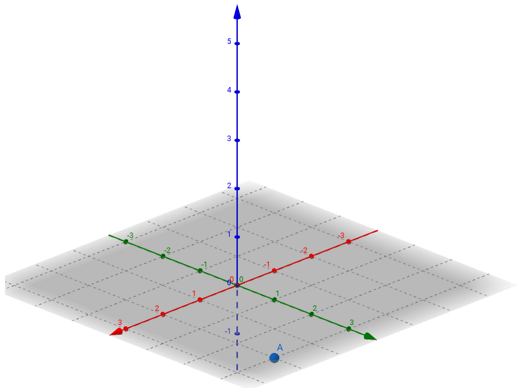




On associe les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}.\vec{k}$ aux axes Ox, Oy, Oz formé par les trois doigts de la main droite :

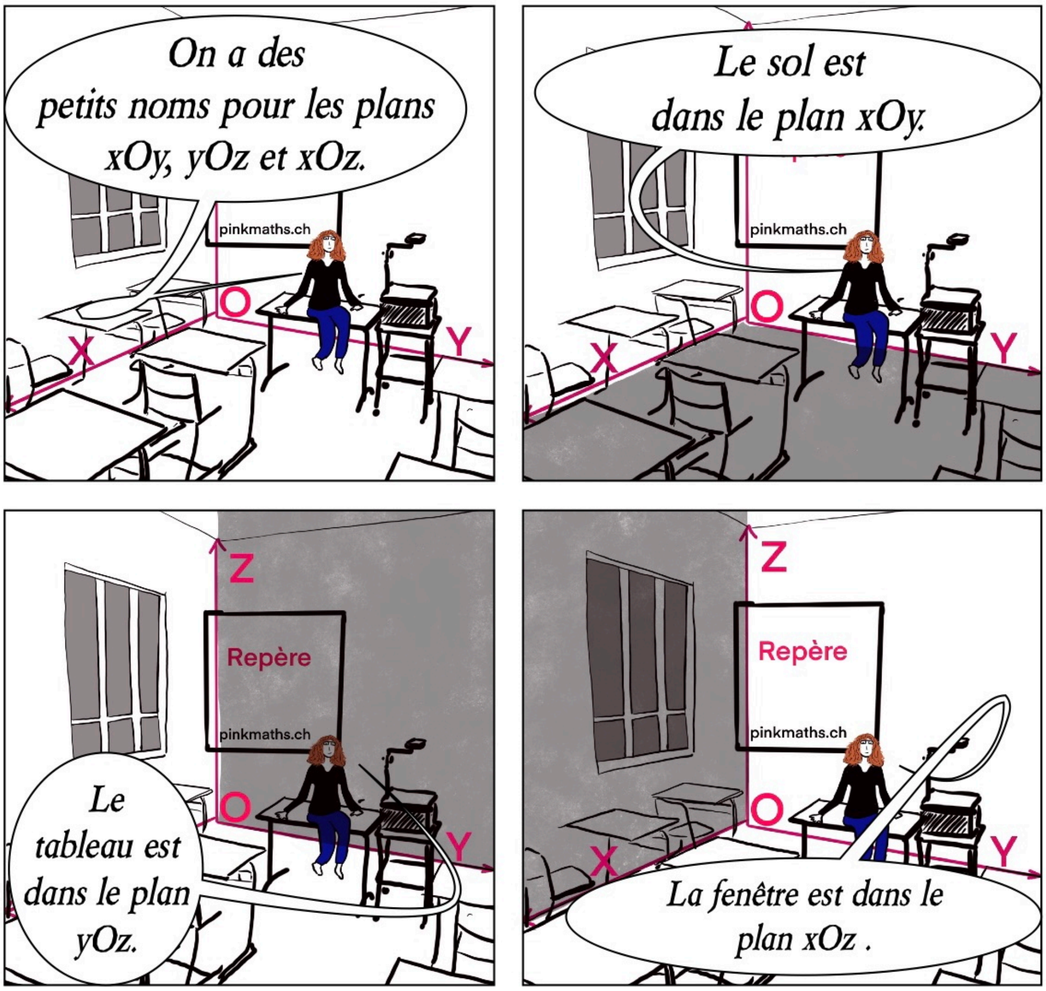


Définition :
Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ est appelé le ***plan horizontal*** noté $\boldsymbol{xOy}$.
Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\jmath}$ et k est appelé le ***plan frontal*** noté $\boldsymbol{yOz}$.
Le plan engendré par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{k}$ est appelé le ***plan de profil*** noté $\boldsymbol{xOz}$.



Exemple : Le point $A(2; 3; 0)$appartient au plan xOy.

Exercice : Donnez un point qui appartient au plan yOz.



1.3 Opérations avec les composantes :

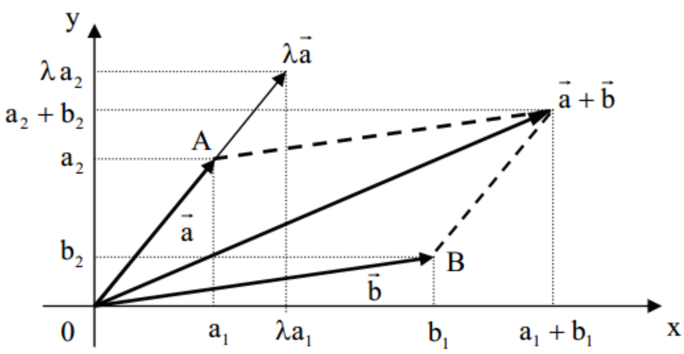
Soient trois points $A(a_1; a_2; a_3)$; $B(b_1; b_2; b_3)$ et $C(c_1; c_2; c_3)$

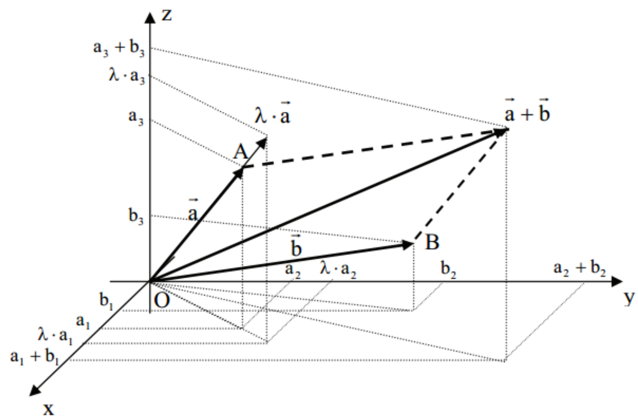
On a : Un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Multiplication avec un scalaire : $\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$

Addition de deux vecteurs : $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

Illustration dans le plan et l'espace :





La relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

Exemple : *On donne les points $A(-2; 10; 5)$ et $B(8; 4; -10)$*

Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Opérations avec les composantes

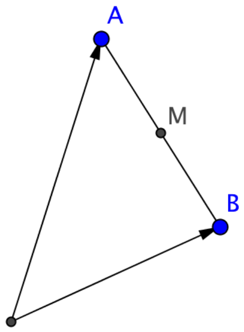
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$
$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$	$\lambda \vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Avec ces opérations, on peut calculer le point milieu, M, entre deux points A et B :

Le **milieu** M d'un segment $[AB]$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \Leftrightarrow M\left(\frac{a_1 + b_1}{2}; \frac{a_2 + b_2}{2}; \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Illustration :

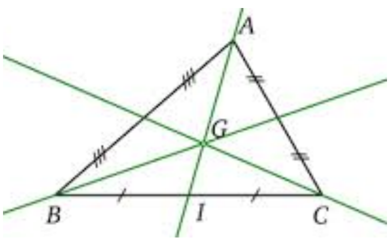


Exemple : On donne les points $A(-2; 10; 5)$ et $B(8; 4; -10)$
Calculer les coordonnées M du point milieu du segment $[AB]$

Ne pas confondre les formules :
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$: la relation de Chasles
- $\boldsymbol{\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\overrightarrow{OA}} + \boldsymbol{\overrightarrow{OB}}\right)$: il y a une addition, on obtient un vecteur
- $\boldsymbol{M}\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$: il y a une addition, on obtient un point.

Le **centre de gravité** G d'un triangle ABC: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) \Leftrightarrow G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}; \frac{a_2+b_2+c_2}{3}; \frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$

Illustration :



Exemple : On donne les points $A(-1; 8; 2), B(4; 5; -1)$ et $C(2; 7; 1)$
Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC

1.4 La norme :

Soit un vecteur $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

La ***norme*** de $\vec{a}$, notée $\|\vec{a}\|$, est la longueur du vecteur $\vec{a}$.

On a : $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Exemple : Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec les points $A(3; 2; 1)$ et $B(4; 6; 3)$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21} \cong 4{,}58$$

Propriétés de la norme :

Si $\vec{a}$ est un vecteur du plan ou de l'espace et k est un nombre réel, alors :

1) $\|\vec{a}\| \geq 0$ 2) $\|\vec{a}\| = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ 3) $\|k \cdot \vec{a}\| = |k| \cdot \|\vec{a}\|$

Définition : Soient deux points $P_1(x_1; y_1; z_1)$ et $P_2(x_2; y_2; z_2)$,

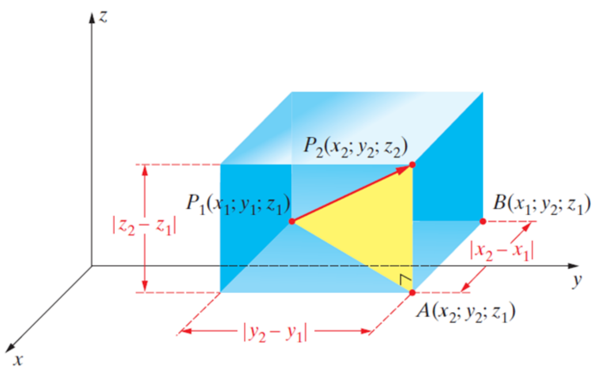
La **norme** du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ correspond à la **distance** entre le point P_1 et le point P_2.

Il s'agit d'une double application du théorème de Pythagore :

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{P_1A}\|^2 + \|\overrightarrow{AP_2}\|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Exercice :

Calculer la distance entre $C(-1; -3; 1)$ et $D(3; 4; -2)$



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Norme d'un vecteur

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

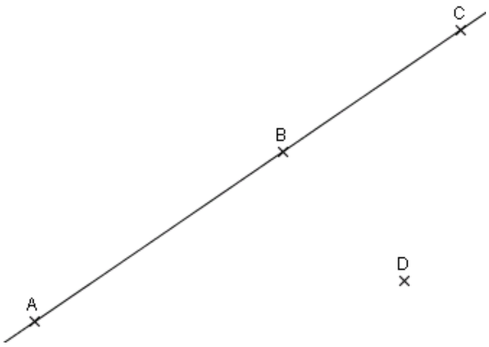
Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, alors $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$

$\|\lambda\vec{a}\| = \|\lambda\| \, \|\vec{a}\|$	$\|\vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|$
$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2)$

1.5 Linéairement indépendants, coplanaire, alignés

Définition : On dit que trois points A, B et C sont ***alignés*** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont ***colinéaires*** : $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$, où $\lambda \epsilon \mathbb{R}$

Illustration :



Exemple : *Est-ce que les points $A(3;2;1)$; $B(-1;-2;1)$ et $C(5;3;7)$ sont alignés ?*

$$\text{Non, car } \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ car: } \begin{cases} \gamma = -2 \\ \gamma = -4 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Exercice : *Est-ce que les points $A(2;4;2)$, $B(1;-2;5)$ et $C(9;-2;-4)$ sont alignés ?*

Définition : On appelle ***combinaison linéaire*** des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ de coefficients respectifs α, β, γ le vecteur $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

Exemple : On donne les vecteurs $\vec{a} = \vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\vec{c} = 3\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$

Réduire en combinaison linéaire de $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ le vecteur $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$

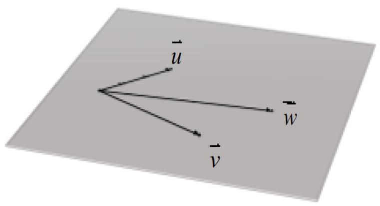
Définitions : <u>Des vecteurs</u> sont ***linéairement dépendants*** si l'un d'eux au moins est combinaison linéaire des autres : $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$ Dans le cas contraire, ils sont dits ***linéairement indépendants***.
<u>Trois vecteurs</u> $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont ***linéairement indépendants*** si et seulement si $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Définition :

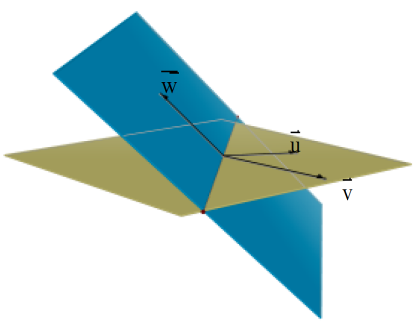
On dit que quatre points distincts A, B, C et D sont ***coplanaires*** si seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont ***coplanaires*** :
Il existe $(\alpha; \beta; \gamma) \neq (0; 0; 0)$ tels que $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Signifie géométriquement que les vecteurs sont coplanaires si et seulement s'ils sont parallèles à un même plan. Donc ramenés à une origine commune, des vecteurs coplanaires sont dans un même plan.

Illustration :

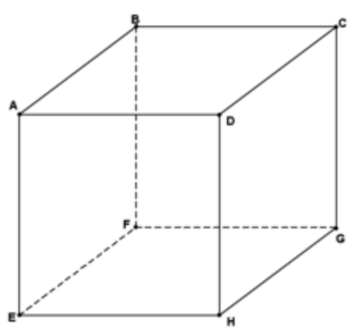


$\vec{w}$ Appartient au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



$\vec{w}$ N'appartient pas au plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{w}$ ne peut pas s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

Illustration : Dans ce cube, les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CD}$ sont coplanaires



Conséquence de la définition :

A, B, C et Dsont **coplanaires** si et seulement si il existe δ et ε tels que $\delta\overrightarrow{AB} + \varepsilon\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

C'est-à-dire que trois vecteurs sont coplanaires si l'un d'eux au moins est une combinaison linéaire des deux autres.

En effet :

$$\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} = -\gamma\overrightarrow{AD}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{-\gamma}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\beta}{-\gamma}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{\alpha}{-\gamma}\right)}_{\delta}\overrightarrow{AB} + \underbrace{\left(\frac{\beta}{-\gamma}\right)}_{\varepsilon}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

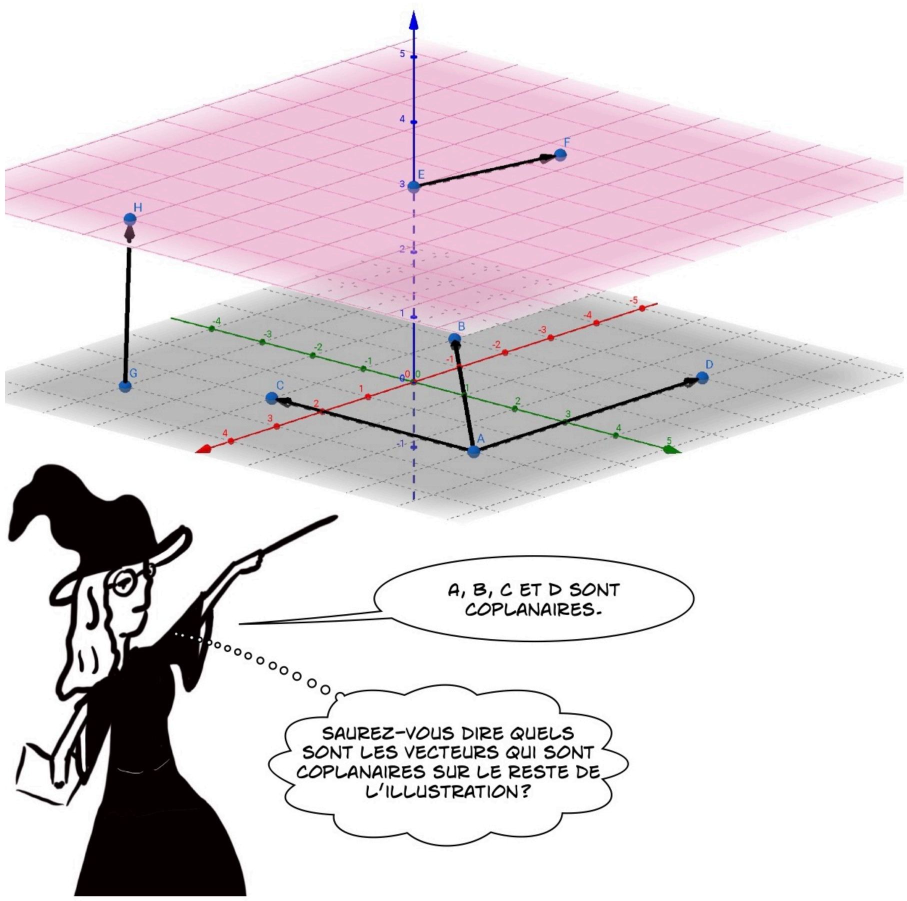
Remarques :

- Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si et seulement s'ils sont **linéairement dépendants.**
- Trois vecteurs sont **coplanaires** si et seulement s'ils sont **linéairement dépendants**.
- Le vecteur nul et deux vecteurs quelconques sont toujours coplanaires
- Trois vecteurs sont coplanaires s'ils sont dans un même plan.

Exemples : Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont-ils linéairement indépendants ou linéairement dépendants ?

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}, \vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}$



2. Equations de droites

Considérons un point A d'une droite d et $\vec{d}$, un vecteur directeur de cette droite.

Quelle condition doit vérifier un point quelconque P pour appartenir à la droite d ?

2.1 Rappels dans le plan

Pour tout point $P(x; y)$ de la droite d, les vecteurs $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires. Il existe donc un multiple k vérifiant $\overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{d}$, $k \in \mathbb{R}$.

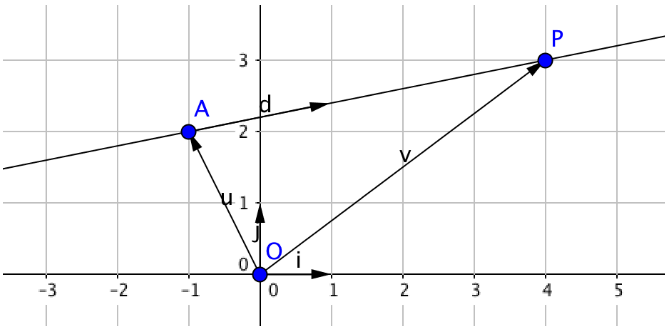
Réciproquement, tout nombre réel k définit un point de la droite.

$$P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AP} = k \cdot \vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Comme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$, on obtient :

Définition : ***L'équation vectorielle*** de la droite d : $P \in d \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k \cdot \vec{d}, \quad k \in \mathbb{R}$

Illustration :



Les coordonnées x et y d'un point $P(x; y)$ quelconque de d doivent alors vérifier la condition suivante appelée ***représentation paramétrique*** de la droite :

$$d\colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}, avec \quad k \in \mathbb{R}$$

En détaillant les équations de chaque coordonnée, on obtient :

Les équations paramétriques de la droite :

$$\begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases}, avec \quad k \in \mathbb{R}$$

On remarque alors que le seul point commun est le paramètre : k. En l'isolant dans chaque équation, on obtient alors :

$$k = \frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2}$$

On peut ensuite écrire l'expression sans fractions :

$$d_2(x-a_1)-d_1(y-a_2)=0$$

On obtient alors :

$$\underbrace{d_2}_{a}x\underbrace{-d_1}_{b}y+\underbrace{d_1a_2-d_2a_1}_{c}=0$$

On a donc :

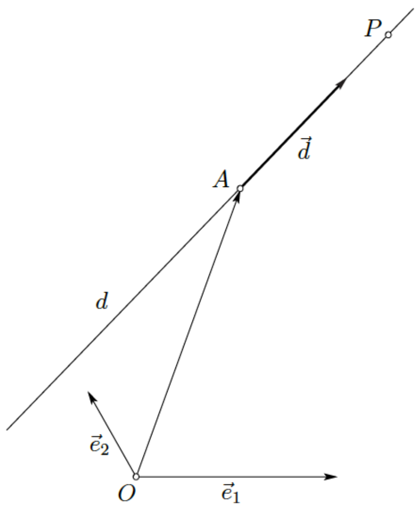
L'équation cartésienne implicite de la droite : $ax+by+c=0$

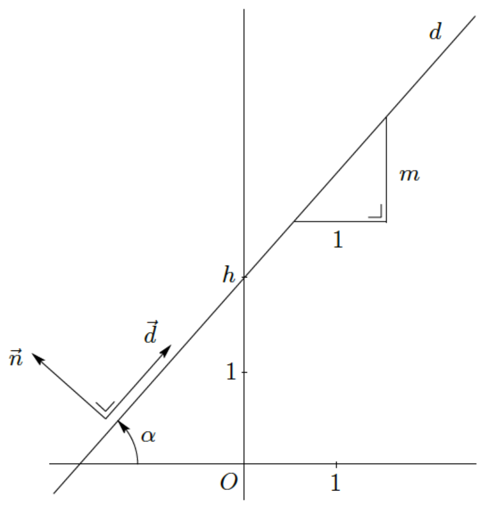
Lorsque $b\neq 0$, on peut écrire ***l'équation cartésienne explicite*** de la droite d : $y=mx+h$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Droite

On note d une droite passant par le point $A(a_1;a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}$.





Un point $P(x\,;y)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\,\vec{d},\quad \lambda\in\mathbb{R}$

Équations paramétriques $\begin{cases}x = a_1+\lambda\,d_1\\ y = a_2+\lambda\,d_2\end{cases},\quad \lambda\in\mathbb{R}$

Équation cartésienne $a\,x+b\,y+c=0$

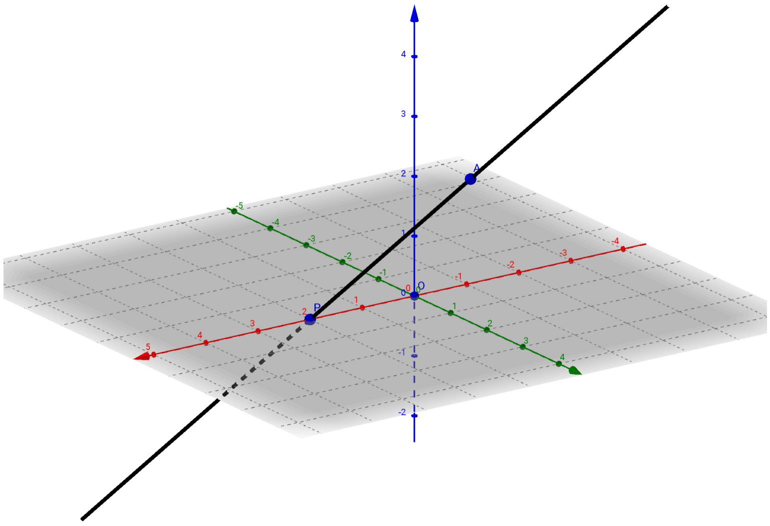
Autres formes $y=mx+h$

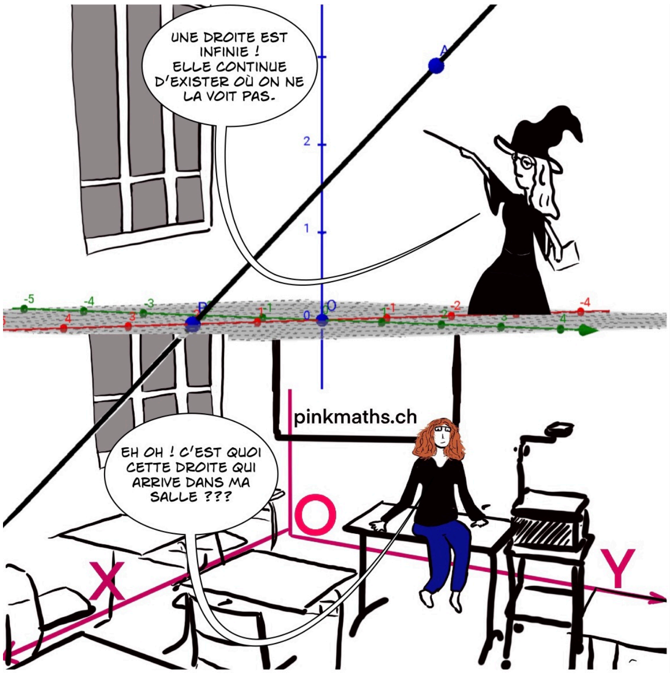
$$\frac{x-a_1}{d_1}=\frac{y-a_2}{d_2}$$

$$y-a_2=m(x-a_1)$$

2.2 Dans l'espace

Le raisonnement reste identique pour le début à l'exception qu'il y aura une troisième coordonnée à ajouter. Les différences apparaissent avec l'équation cartésienne.





Soit d la droite passant par le point $A(a_1, a_2 a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = d_1\vec{\imath} + d_2\vec{\jmath} + d_3\vec{k} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Pour tout point $P(x; y; z)$ de la droite, il existe un nombre $t \in \mathbb{R}$, tel que

L'équation vectorielle de la droite :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{d}$$

Ce qui donne

La **représentation paramétrique** :

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Prenons un exemple pour suivre ce point de théorie : $A(1; 3; 3)$ et $\vec{d} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$

Cette équation s'écrit aussi sous la forme d'un système d'équations :

Les **équations paramétriques** de d:

$$d: \begin{cases} x = a_1 + td_1 \\ y = a_2 + td_2 \\ z = a_3 + td_3 \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Si l'on isole t de chacune de ces équations et que l'on égalise les expressions obtenues, cela donne le système d'équations :

Les **équations cartésiennes** de la droite d : $$d: \frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} = \frac{z-a_3}{d_3}$$

Remarque : Dans le cas où l'un des nombres d_1, d_2 et d_3 est nul on ne peut pas écrire les équations cartésiennes de d.

Mais si par exemple, $d_3 = 0$, la troisième équation est alors $z = a_3$ et on écrira :

$$\boxed{\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} \quad et\ z = a_3}$$

Cela signifie que le vecteur directeur de la droite est $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Cette droite est donc parallèle au plan xOy; tous ses points ont la même cote $z = a_3$.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Droite

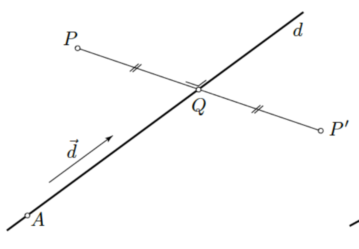
On note d une droite passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

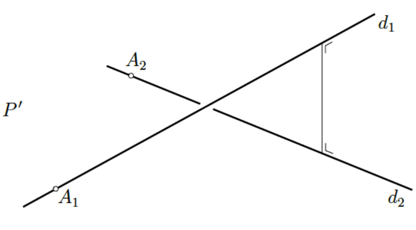
Un point $P(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{d}$	$\lambda \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda d_1 \\ y = a_2 + \lambda d_2 \\ z = a_3 + \lambda d_3 \end{cases}$	$\lambda \in \mathbb{R}$
Équations cartésiennes	$\frac{x-a_1}{d_1} = \frac{y-a_2}{d_2} = \frac{z-a_3}{d_3}$	

On note P un point et d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

Distance du point P à la droite d	$\delta(P;d) = \frac{\lVert\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\rVert}{\lVert\vec{d}\rVert}$	⦶
Projection orthogonale de P sur d	$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\lVert\vec{d}\rVert^2}\vec{d}$	⦶
Symétrique de P par rapport à d	$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + 2\frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\lVert\vec{d}\rVert^2}\vec{d}$	⦶





Exemple : *Soient les points* $A(3;2;1); B(-1;-2;1); C(1;2;4); D(4;6;3); E(5;3;7)$

a) Déterminer la ***représentation paramétrique*** *de la droite* d_1 *passant par les points* A *et* B.

$$d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};\ \alpha \epsilon \mathbb{R} \text{ où } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

b) Déterminer les ***équations paramétriques*** *de la droite* d_2 *parallèle à* d_1 *et passant par* C.

$$d_2 : \begin{cases} x = 1 - 4\beta \\ y = 2 - 4\beta\ ;\ \beta \epsilon \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

c) Déterminer ***l'équation cartésienne*** *de la droite* d_3 *passant par les points* C *et* D.

$$d_3 : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{-1} \text{ avec } \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice : *Soit les points* $A(-1;2;-3), B(2;-2;1), C(3;5;4), D(10\ ;4;15)$,

a) Déterminer la ***représentation paramétrique*** *de la droite* d_1 *passant par les points* A *et* B.

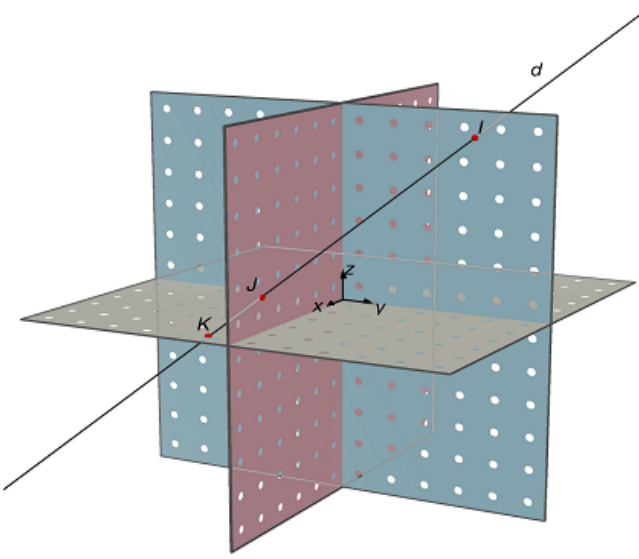
b) Déterminer les ***équations paramétriques*** *de la droite* d_2 *parallèle à* d_1 *et passant par* C.

c) Déterminer ***l'équation cartésienne*** *de la droite* d_3 *passant par les points* C *et* D.

➢ ***Géométrie vectorielle Série 2 ex 1 à 10***

2.3 Intersections d'une droite avec les plans xOy, xOz, yOz

Définition : On appelle **traces** d'une droite d (sur les plans de coordonnées) les points d'intersection de d avec les plans xOy, xOz et yOz.



Méthode pour calculer ces intersections :

On peut utiliser les équations paramétriques.

- Intersection avec yOz, point I: poser $x = 0$, calculer t, puis y et z
- Intersection avec xOz, point J: poser $y = 0$, calculer t, puis x et z
- Intersection avec xOy, point K: poser $z = 0$, calculer t, puis x et y

Reprise de l'exemple de la page précédente :

Calculer les traces de la droite d_1: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

- $d_1 \cap yOz$: $x = 0$ donc $\alpha = \frac{3}{4}$ et on trouve $y = 2 - 4 \cdot \frac{3}{4} = -1$ donc $T_1(0; -1; 1)$
- $d_1 \cap xOz$:$y = 0$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et on trouve $x = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$ donc $T_2(1; 0; 1)$
- $d_1 \cap xOy$: $z = 0$ impossible, la droite est parallèle au plan xOy

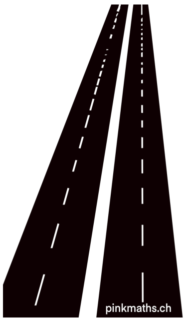
Exercice : Calculer les traces de la droite : d : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$

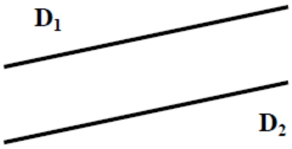
> ***Géométrie vectorielle Série 2 exercices 11 à 15***

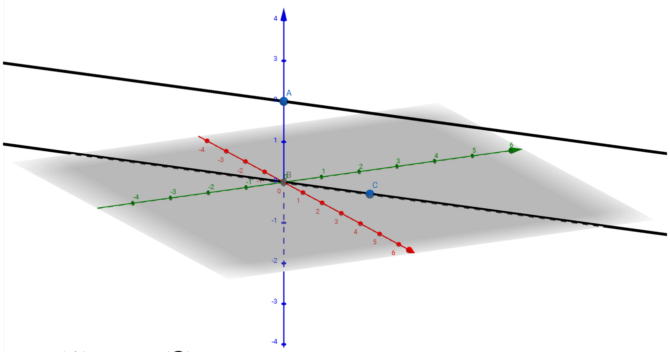
2.4 Positions relatives de droites

En trois dimensions, nous allons distinguer 3 positions relatives de deux droites :

Deux droites sont **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et que les droites n'ont pas de point d'intersection.







Exemple : $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

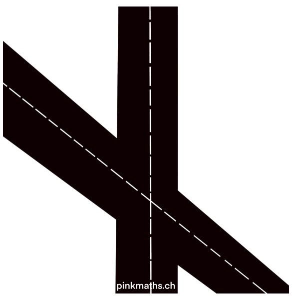
On dit que les droites sont ***confondues*** si elles sont parallèles et tous les points en commun.

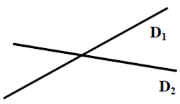
Exemple : $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

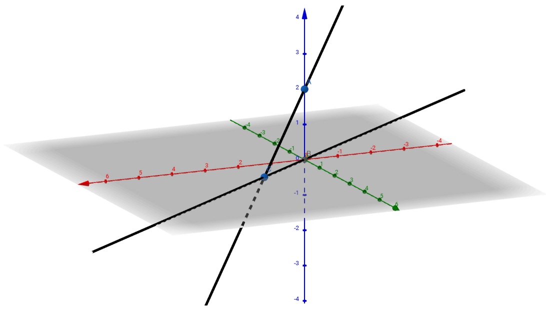
Justification :

- *Les vecteurs directeurs sont colinéaires (donc les droites sont parallèles)*
- *le point* $(3; 0; 1) \in d_1$ *lorsque* $s = 3$

Deux droites sont dites **sécantes** si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires mais qu'elles se croisent en un point.



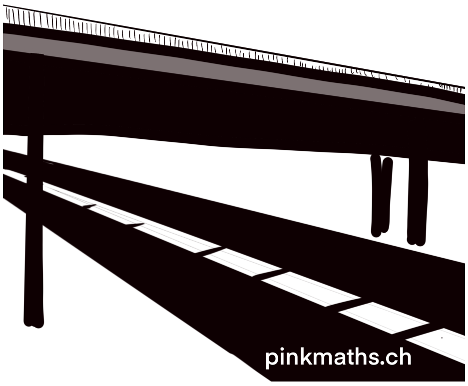


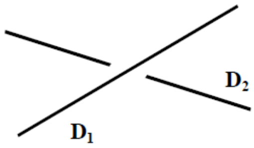


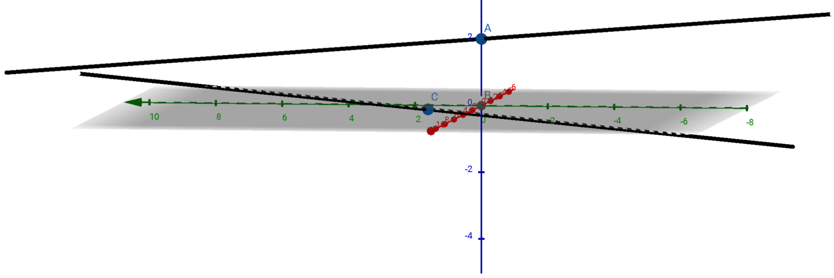
Exemple : $d_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$ et $d_4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

- *Les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires (donc les droites ne sont pas parallèles*
- *il y a un point en commun (cela ne sera pas toujours aussi facile de chercher un point d'intersection…)*

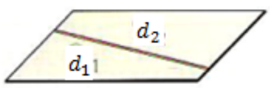
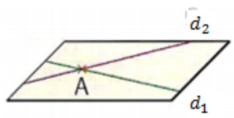
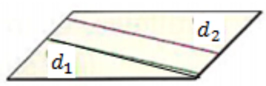
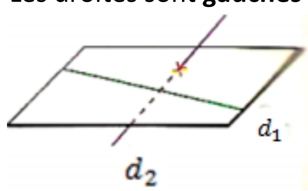
Deux droites sont dites **gauches** si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et qu'elles n'ont aucun point en commun.







Situation résumée :

	Vecteurs directeurs colinéaires	**Vecteurs directeurs non colinéaires**
Un point en commun ?	Vérifier $A \in d_2$ ou $B \in d_1$ Les droites sont **confondues** 	Chercher l'intersection : $d_1 \cap d_2 = \{P(p_1;p_2;p_3)\}$ Les droites sont **sécantes** 
Aucun point commun	Vérifier $A \notin d_2$ ou $B \notin d_1$ Les droites sont **parallèles** 	$d_1 \cap d_2 = \emptyset$ Les droites sont **gauches** 

Exercice : Dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les droites

$$d_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \qquad d_2 : \begin{cases} x = -6t + 8 \\ y = -12t + 1 \\ z = 9t - 2 \end{cases} t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_3 : \begin{cases} x = t + 6 \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Étudier les positions relatives de ces trois droites.

Exercice résolu : Dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de l'espace, on considère les droites d_1: $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$,

d_2: $\begin{cases} x = -6t + 8 \\ y = -12t + 1 \\ z = 9t - 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et d_3: $\begin{cases} x = t + 6 \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$

Etudier les positions relatives de ces trois droites

- *Position relatives de d_1 et d_2:*

  un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_2 est $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix}$

  on a: $\vec{v} = -3\vec{u}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles. Reste à déterminer si les deux droites sont strictement parallèles ou confondues.

  Le point $A(-1; 0; 5)$ est un point de d_1. Est-ce qu'il fait aussi partie de la droite d_2 ?

  $$A \in d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -6t + 8 \\ 0 = -12t + 1 \\ 5 = 9t - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3/2 \\ t = 1/12 \\ t = 7/9 \end{cases}$$

  ce qui est impossible. Donc A n'appartient pas à d_2

  Les droites d_1 et d_2 sont donc <u>strictement parallèles.</u>

- *Position relative de d_1 et d_3:*

  un vecteur directeur de d_1 est $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et un vecteur directeur de d_3 est $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc les droites d_1 et d_3 ne sont pas parallèles. Elles peuvent être sécantes ou gauches.

  Cherchons un éventuel point d'intersection à d_1 et d_3:

  $$M(x; y; z) \in d_1 \cap d_3 \Leftrightarrow \exists s, t \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4t \\ z = 5 - 3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = s + 6 \\ y = 3s - 1 \\ z = -2s + 2 \end{cases}$$

  On a donc: $\begin{cases} -1 + 2t = s + 6 \\ 4t = 3s - 1 \\ 5 - 3t = -2s + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2t - 7 \\ 4t = 3(2t - 7) - 1 \\ 5 - 3t = -2(2t - 7) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 2t - 7 \\ 4t = 6t - 22 \\ 5 - 3t = -4t + 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = 15 \\ t = 11 \\ t = 11 \end{cases}$

  Les droites d_1 et d_3 sont donc <u>sécantes</u> et leur point d'intersection a comme coordonnées:

  $$\begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 11 = 21 \\ y = 4 \cdot 11 = 44 \\ z = 5 - 3 \cdot 11 = -28 \end{cases}$$

- *Position relative de d_2 et d_3 :*

Remarque importante : Lors de la recherche d'un éventuel point d'intersection entre deux droites, il faut absolument donner deux noms différents aux deux paramètres.

Exemple : Les droites $d_1: \begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = -3 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases}$ et $d_2: \begin{cases} x = n \\ y = -2 + n \\ z = -1 \end{cases}$ sont-elles parallèles, sécantes ou gauches ?

3. Produit scalaire

3.1 Définition et propriétés

Nous allons maintenant définir un produit entre deux vecteurs. Le produit scalaire est une notion importante en géométrie vectorielle puisqu'il pourra nous aider à déterminer si des vecteurs sont orthogonaux ou de manière plus générale : déterminer l'angle entre deux vecteurs.

Définition : Soient deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$.

On définit le **produit scalaire** de ces deux vecteurs par : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$

Remarque : $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \|\vec{a}\|^2$

Exercice :

1) Calculer le produit scalaire de $\vec{a} = 2\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 9\vec{k}$ *et* $\vec{b} = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - \vec{k}$

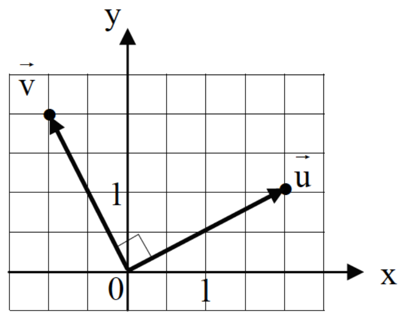
2) Calculer $\|\vec{a}\|^2$

Théorème : $\vec{\mathbf{a}} \perp \vec{\mathbf{b}} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$

Signifie : Deux vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ *sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.*

Exemple :

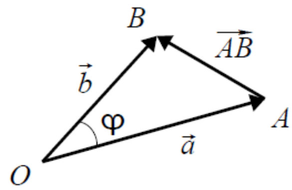
Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



Théorème : Soient deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Notons φ l'angle entre ces deux vecteurs.

On a : $\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \|\vec{\boldsymbol{a}}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \cdot \mathbf{cos}(\boldsymbol{\varphi})$



Démonstration :

Déterminons l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ à l'aide du théorème du cosinus ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi)$)

On obtient : $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$

Isolons le cosinus : $\cos(\varphi) = \frac{\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\overrightarrow{AB}\|^2}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$

Développons à l'aide de la définition de la norme et des coordonnées :

$\|\overrightarrow{OA}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

$\|\overrightarrow{OB}\|^2 = \|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\|^2 = \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}\right\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$

On obtient donc le développement suivant pour le cosinus :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - ((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2)}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Développons le numérateur :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 - 2a_3b_3 + b_3^2)}{2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Après simplifications, on obtient :

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Propriétés :

1) Le résultat de ce produit est un scalaire, c'est-à-dire un nombre réel. D'où son nom !

2) Le produit scalaire est commutatif : $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}}$

car: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = b_1 \cdot a_1 + b_2 \cdot a_2 + b_3 \cdot a_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3) $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°}$

Autrement dit : si $\vec{a} \neq \vec{0}$ et $\vec{b} \neq \vec{0}$ alors les vecteurs $\vec{a}$ *et* $\vec{b}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

4) $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos(\varphi) < 0 \Leftrightarrow \varphi > 90°}$

5) Le produit scalaire se comporte comme une opération distributive : $\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}}$

Remarque : dans la partie gauche, l'addition est vectorielle alors que dans la partie de droite, elle est entre deux nombres.

6) Les parenthèses peuvent être déplacées : $\boxed{(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}$

7) La norme d'un vecteur se calcule facilement à l'aide du produit scalaire :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Résumé :

Le produit scalaire de deux vecteurs s'obtient en effectuant la somme des produits "composante par composante" de chacun des deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$$

Le produit scalaire permet de calculer l'angle φ entre deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}}$$

Il possède des propriétés attendues.

Exercice :

1) On donne : $A(3;1;0)$ et $B(5;2;1)$

A l'aide du produit scalaire, calculer l'angle φ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

2) Montrer à l'aide du produit scalaire que les deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

3.2 Lien avec les droites :

Deux droites vectorielles de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont ***orthogonales*** si les vecteurs $\overrightarrow{d_1}$ et $\overrightarrow{d_2}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si le produit scalaire $\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}$ est nul.

Définition : Les deux droites sont dites ***perpendiculaires*** si elles sont orthogonales et sécantes.

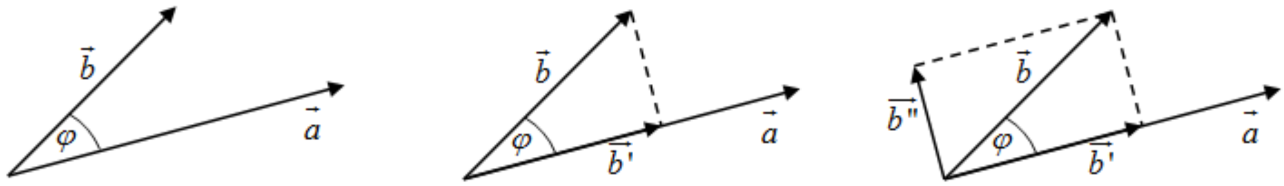
Marche à suivre pour trouver l'angle entre deux droites :

(1) Vérifier que les droites sont **sécantes**.
(2) A partir des équations données, déterminer, pour chaque droite un vecteur directeur.
(3) Trouver l'angle θ avec la formule du produit scalaire : $\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{d_1} \cdot \overrightarrow{d_2}}{\|\overrightarrow{d_1}\| \cdot \|\overrightarrow{d_2}\|}$
(4) Trouver l'angle α entre ces droites :
- $\alpha = \theta$, si $0° \leq \theta \leq 90°$
- $\alpha = 180° - \theta$, si $90° < \theta < 180°$

Exercice : *Déterminer l'angle aigu entre les droites :* $d_1 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 - 4t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ *et* $d_2 : \begin{cases} x = 1 - v \\ y = 3 + 2v \\ z = -4 - 3v \end{cases}$ *avec* $t, v \in \mathbb{R}$

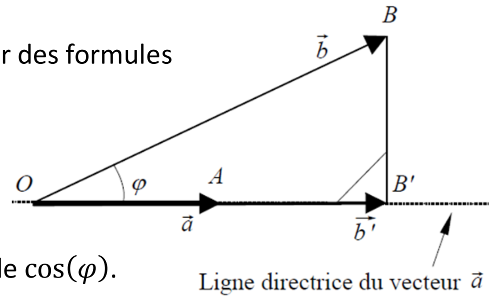
3.3 Interprétation géométrique :

Illustration de la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{b}$ sur le vecteur $\vec{a}$:



Définition et formule :

Projetons orthogonalement $\vec{b}$ sur la ligne directrice du vecteur $\vec{a}$, pour obtenir $\vec{b'} = \overrightarrow{OB'}$:



Nous obtenons un triangle rectangle et nous pouvons donc appliquer des formules de trigonométrie :

$\cos(\varphi) = \frac{\|\vec{b'}\|}{\|\vec{b}\|}$ (si $\varphi \leq 90°$) et $\cos(\varphi) = -\frac{\|\vec{b'}\|}{\|\vec{b}\|}$ (si $\varphi > 90°$)

Donc : $\left\|\vec{b'}\right\| = \pm\|\vec{b}\| \cdot \cos(\varphi)$ où le signe $\pm$ est le même que celui de $\cos(\varphi)$.

On peut donc substituer cette dernière expression dans la définition du produit scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{\boldsymbol{b}}\| \cdot \boldsymbol{\cos(\varphi)} = \pm \|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{\boldsymbol{b'}}\right\|$$

Illustration avec le vecteur $\vec{a}$ plus court que la projection du vecteur $\vec{b}$

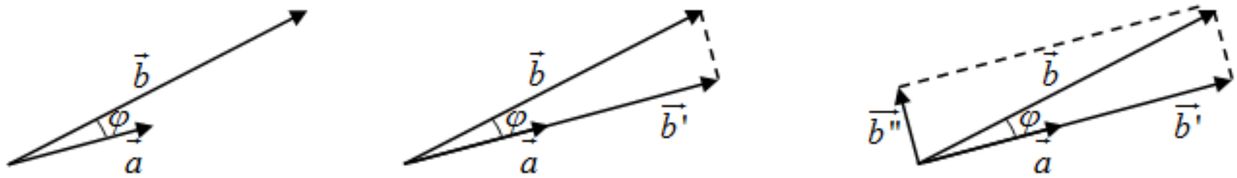
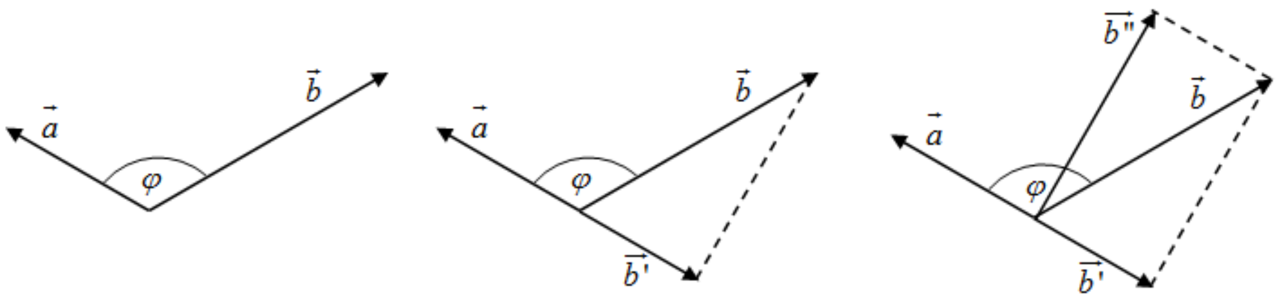


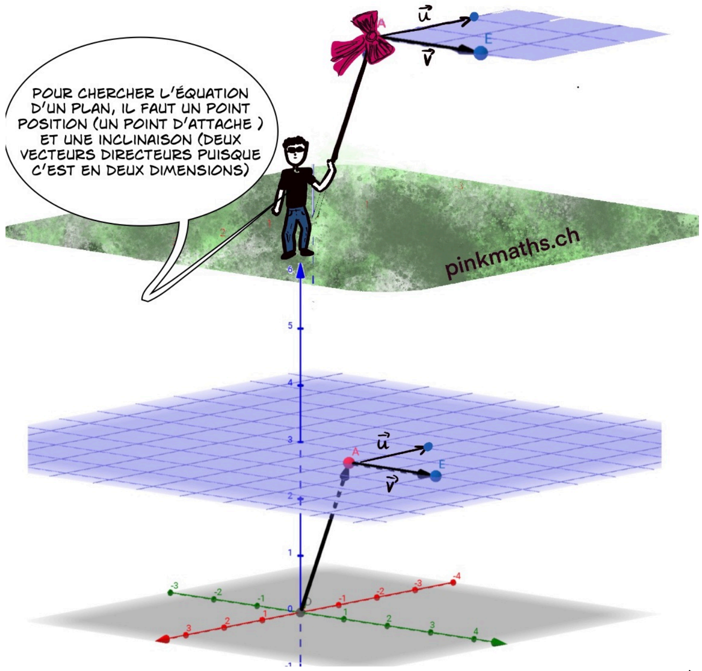
Illustration avec un angle obtu:



Remarque : Le vecteur $\vec{b''}$ est le vecteur orthogonal à $\vec{a}$ tel que $\vec{b'} + \vec{b''} = \vec{b}$.
En physique, il est fréquent de décomposer un vecteur parallèlement et perpendiculairement à une direction.

4. Equations de plans

4.1 Définition



Pour construire un plan π dans l'espace $\mathbb{R}^3$, il faut connaitre 2 types de données :

- L'orientation du plan π, donnée par deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$, non nuls et non colinéaires.
- La position du plan π, donnée par un vecteur position : $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Notons les coordonnées d'un point $M(x;y;z)$ quelconque du plan π. (M pour "mobile"). Et notons $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$

Le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est contenu dans le plan π donc il est une combinaison linéaire des deux vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{e}$: $\overrightarrow{PM} = \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. (Les vecteurs $\overrightarrow{PM}, \vec{d}$ et $\vec{e}$ sont coplanaires)

A l'aide de la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}$

On peut donc écrire : $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ou encore : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Ce qui donne **l'équation vectorielle** : $\vec{v} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{d} + \mu \cdot \vec{e}$, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Lorsque les coefficients λ et μ parcourent l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, on obtient tous les points du plan π.

On peut aussi obtenir : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Et on parle d'**équation paramétrique** lorsque l'on écrit sous forme de composantes :

$$\pi : \begin{cases} x = p_1 + \lambda \cdot d_1 + \mu \cdot e_1 \\ y = p_2 + \lambda \cdot d_2 + \mu \cdot e_2 \\ z = p_3 + \lambda \cdot d_3 + \mu \cdot e_3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Remarque :

La connaissance de trois points non alignés du plan est suffisante. En effet, si un plan contient les points A, B et C, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ peuvent jouer le rôle de vecteurs directeurs, tandis que le vecteur position peut être à choix $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ ou $\overrightarrow{OC}$.

Il est possible de faire disparaître les paramètres λ et μ de ce système, pour n'obtenir plus qu'une seule équation en x, y et z. C'est **l'équation cartésienne** du plan π.

Exercice : Soient les points $A(1; 2; 1), B(-1; 1; 3)$ et $C(3; -4; -5)$

1) Déterminer une équation vectorielle de ce plan.
2) Déterminer l'équation cartésienne de ce plan :

Solution :

1) Déterminer une équation vectorielle de ce plan :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2) Déterminer l'équation cartésienne de ce plan :

$$\begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - 6\mu \\ z = 1 + 2\lambda - 6\mu \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Idée : isoler un paramètre dans deux équations pour les égaliser (et faire disparaitre ce paramètre)

$$\begin{cases} \frac{x-1+2\lambda}{2} = \mu \\ \frac{y-2+\lambda}{-6} = \mu \\ z = 1 + 2\lambda - 6 \cdot \mu \end{cases}$$

On obtient : $\frac{x-1+2\lambda}{2} = \frac{y-2+\lambda}{-6}$

Donc : $-6(x-1+2\lambda) = 2(y-2+\lambda) \Leftrightarrow -3(x-1+2\lambda) = y-2+\lambda \Leftrightarrow -3x+3-y+2 = 7\lambda$
$\Leftrightarrow \lambda = \frac{-3x-y+5}{7}$

On peut alors injecter cette dernière expression dans la dernière équation :

$$z = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} - 6 \cdot \frac{y-2+\lambda}{-6} = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \lambda = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \frac{-3x-y+5}{7}$$

Donc : $z = 1 + 2 \cdot \frac{-3x-y+5}{7} + y - 2 + \frac{-3x-y+5}{7} = -1 + \frac{-6x-2y+10-3x-y+5}{7} + y$

Donc : $z - y + 1 = \frac{-9x-3y+15}{7} \Leftrightarrow 7z - 7y + 7 = -9x - 3y + 15 \Leftrightarrow \mathbf{9x - 4y + 7z = 8}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

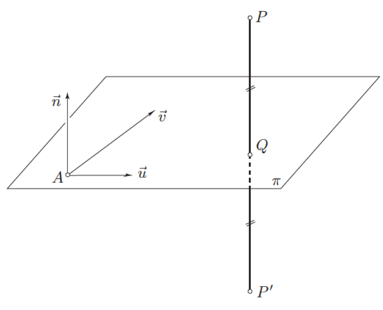
Plan

On note π un plan passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un *vecteur normal* au plan π.

Un point $P(x\,;y\,;z)$ appartient au plan π si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équation cartésienne	$ax + by + cz + d = 0$	
Autres formes	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AP}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$	



4.2 Représentation graphique précise d'un plan :

Soit le plan π: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

ou encore, mis sous forme cartésienne: $6x + 2y + 3z = 6$

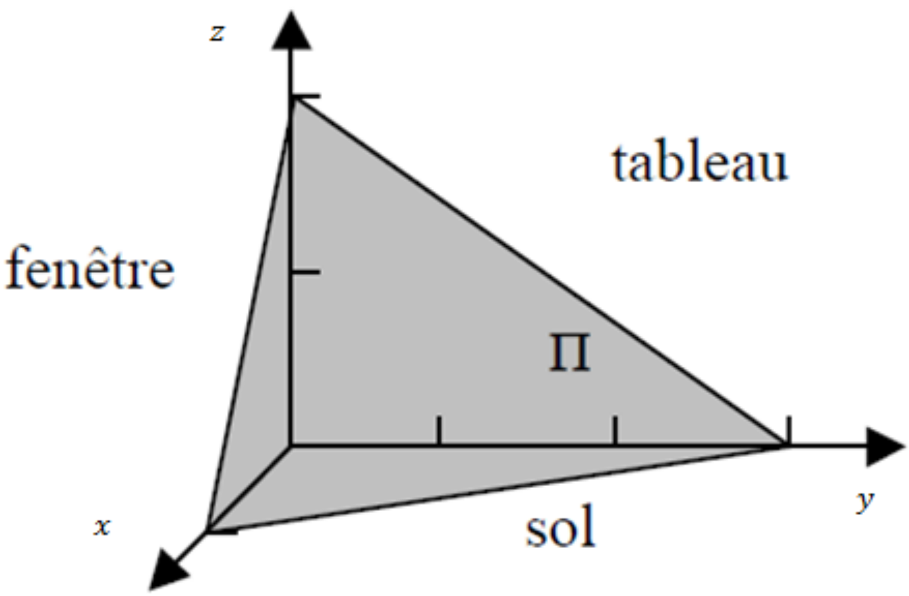
Calculons les points d'intersection du plan π avec chacun des trois axes du repère :

- Sur l'axe x: on a $y = 0$ et $z = 0$:
  6x=6
  donc $x = 1$
  donc : $(1; 0; 0)$

- Sur l'axe y: on a $x = 0$ et $z = 0$:
  $2y = 6$
  donc $y = 3$
  donc $(0; 3; 0)$

- Sur l'axe z: on a $x = 0$ et $y = 0$:
  $3z = 6$
  donc $z = 2$
  donc $(0; 0; 2)$

On peut ensuite représenter le plan à l'aide de ses traces :

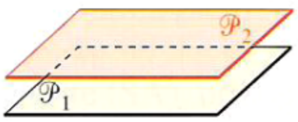
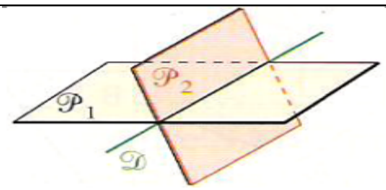


4.3 Position relative de deux plans de l'espace :

Soit les plans $\alpha_1 = (A_1; \overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1})$ et $\alpha_2 = (A_2; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{v_2})$ de l'espace

Définition : Si chacun des triplets $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{u_2})$ et $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{v_1}; \overrightarrow{v_2})$ est un triplet de vecteurs linéairement dépendant, les plans α_1 et α_2 sont ***parallèles*** ; sinon ils sont ***sécants***.

Il y a trois cas possibles résumés dans ce tableau :

Positions relatives de deux plans		
Parallèles		**Sécants**
Strictement parallèles ou disjoints	**Confondus**	
Leur intersection est vide	Leur intersection est un plan	Leur intersection est la droite d
		

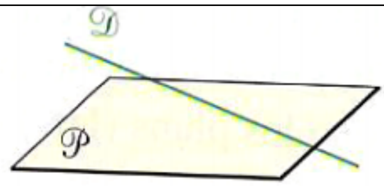
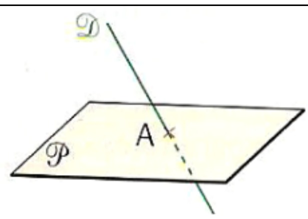
4.4 Positions relatives d'une droite et d'un plan

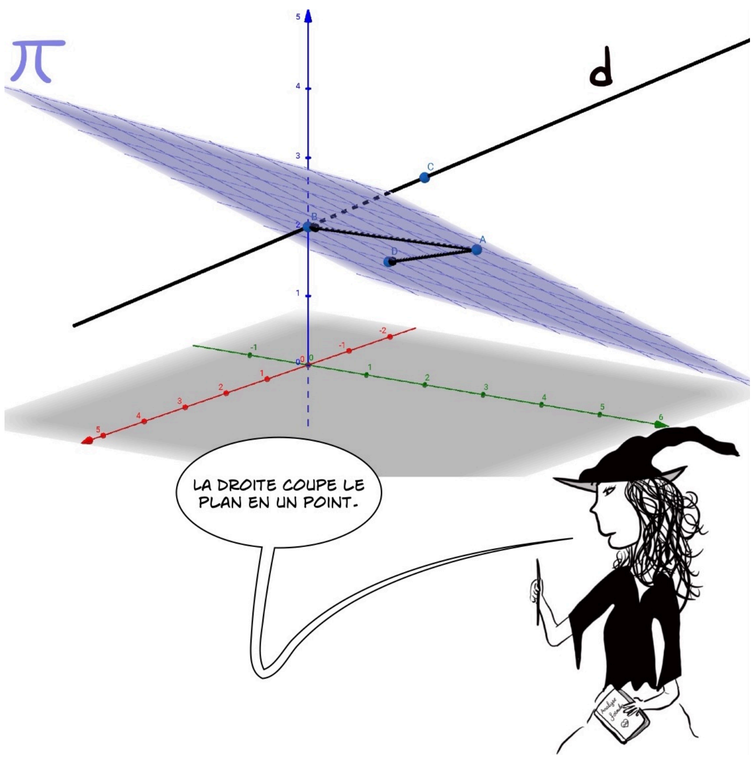
On considère la droite $d = (A; \vec{d})$ et le plan $P = (B; \vec{u};\ \vec{v})$ dans l'espace

Définition :

Si les vecteurs $\vec{d}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement dépendants, la droite d et le plan P sont parallèles ; sinon, ils sont sécants.

Résumé des situations possibles :

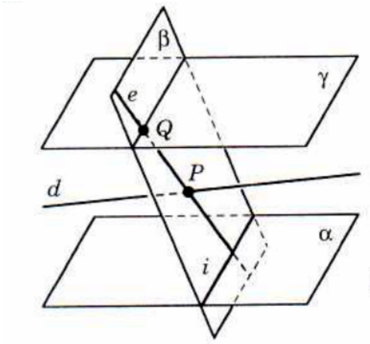
Positions relatives d'une droite d et d'un plan P		
Parallèles		**Sécants**
d est incluse dans le plan P	d et P n'ont aucun point en commun	d et P ont un seul point en commun
		



Exercice de récapitulation :

Considérons les droites d et e données par un système d'équations paramétriques et trois plans α, β et γ par leurs équations cartésiennes :

$$d:\begin{cases} x = 13 + 5k \\ y = -3 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases};\quad e:\begin{cases} x = n \\ y = -2 + n \\ z = -1 \end{cases};$$



$$\alpha: 5x + 11y - z - 11 = 0;\quad \beta: x - y + 3z + 1 = 0;$$
$$\gamma: 5x + 11y - z - 43 = 0$$

a) Montrons que les droites d et e sont sécantes en un point P dont on déterminera les coordonnées

b) Montrons que les plans α et β sont sécants et déterminons un système d'équations paramétriques de leur droite i d'intersection.

c) Montrons que les plans α et γ sont strictement parallèles.

d) Montrons que la droite e coupe le plan γ en un point Q dont on déterminera les coordonnées

e) Montrons que la droite d est strictement parallèle au plan α

f) Montrons que la droite e est incluse dans le plan β.

Solution de l'exercice de récapitulation :

a) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 13+5k=n \\ -3-2k=-2+n \\ 5+3k=-1 \end{cases}$

On résout : $\begin{cases} 5+3k=-1 \\ -3-2k=-2+n \end{cases}$

On trouve : $\begin{cases} k=-2 \\ n=3 \end{cases}$ que l'on vérifie dans la première équation : $13+5(-2)=3$

Cette égalité étant vérifiée, le système complet envisagé admet pour solutions $k=-2$ et $n=3$ et les deux droites d et e sont sécantes et admettent pour d'intersection le point $P(3;1;-1)$

Remarque : Si la première équation n'était pas vérifiée par la solution des deuxièmes et troisièmes équations, les deux droites d et e seraient gauches.

b) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-11=0 \\ x-y+3z+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} z=5x+11y-11 \\ x+2y-2=0 \end{cases}$

Posons $y=\lambda$. On a alors : $x=-2\lambda+2$ et $z=\lambda-1$
On obtient alors que le système admet une infinité de solutions et l'on peut donner par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$
Il s'agit d'un système d'équations paramétriques d'une droite, qui est donc la droite i d'intersection des plans α et β.

c) Il faut étudier le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-11=0 \\ 5x+11y-z-43=0 \end{cases}$

Ce système se transforme en : $\begin{cases} 32=0 \\ 5x+11y-z-43=0 \end{cases}$ qui n'admet aucune solution. Les deux plans sont donc strictement parallèles.

d) Il faut résoudre le système : $\begin{cases} 5x+11y-z-43=0 \\ x=n \\ y=-2+n \\ z=-1 \end{cases}$

Par substitution, on obtient l'équation : $5n+11(-2+n)-(-1)-43=0$

Celle-ci admet la solution unique $n=4$. Ainsi la droite e et le plan γ admettent un seul point commun : $Q(4;2;-1)$

e) Même démarche que à la question d),
on obtient l'équation : $5(13+5k)+11(-3-2k)-(5+3k)-11=0 \Leftrightarrow 16=0$

Le système n'admettant pas de solution, la droite d et le plan α n'ont aucun point commun et sont par conséquent strictement parallèles.

f) Même démarche qu'en d), on obtient l'équation : $n-(-2+n)+3(-1)+1=0 \Leftrightarrow 0=0$
Ainsi, les coordonnées de tout point de la droite e vérifient l'équation du plan β, et par conséquent e est incluse dans β.

Table des matières