Équations différentielles[1]

Matériel :

- Ce polycopié
- Les séries intitulées « Équations différentielles Série … » (EDS1, …)
- Le Formulaire et table CRM
- Calculatrice non PRO

1. Introduction

En début d'année, nous avons vu que la fonction exponentielle de base e possède une particularité rare, donc intéressante, à savoir que sa dérivée est égale à elle-même.

Cela signifie donc que la fonction exponentielle de base e est solution de l'équation

$$\boldsymbol{f'(x) = f(x)} \qquad \textbf{où l'inconnue est la fonction } \boldsymbol{f}.$$

Cette équation peut être écrite également :

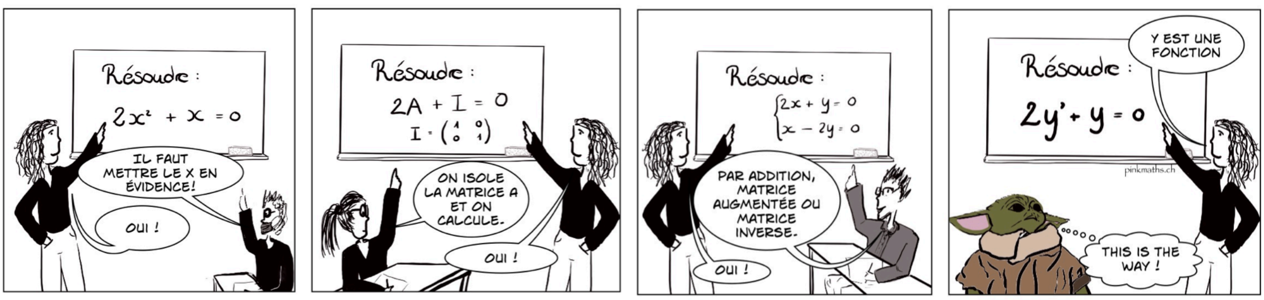
$$\boldsymbol{y' = y}$$

ou encore

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = y}$$

Dans ces écritures y représente **une fonction** de x (càd : $y = f(x)$)

Cette équation traduit une relation entre une fonction, l'inconnue de l'équation, et l'une de ses dérivées : c'est un exemple d'équation différentielle.



---

[1] Ce cours est inspiré de celui de M. Bacchiocchi et M. Zwahlen.

Autres exemples d'équations différentielles

1) Les fonctions trigonométriques $f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{sin}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{cos}(\boldsymbol{x})$ sont solutions de l'équation différentielle :

$$y''(x) = -y(x)$$

$$\Leftrightarrow y'' = -y$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx} = -y$$

2) Une courbe est définie par : en chaque point $(x; y)$, la pente de la tangente à la courbe en $(x; y)$ vaut le carré de la seconde coordonnée de $(x; y)$.

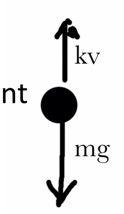
L'équation différentielle vérifiée par cette courbe est :

$$f'(x) = f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^2$$

$$\Leftrightarrow y' = y^2$$

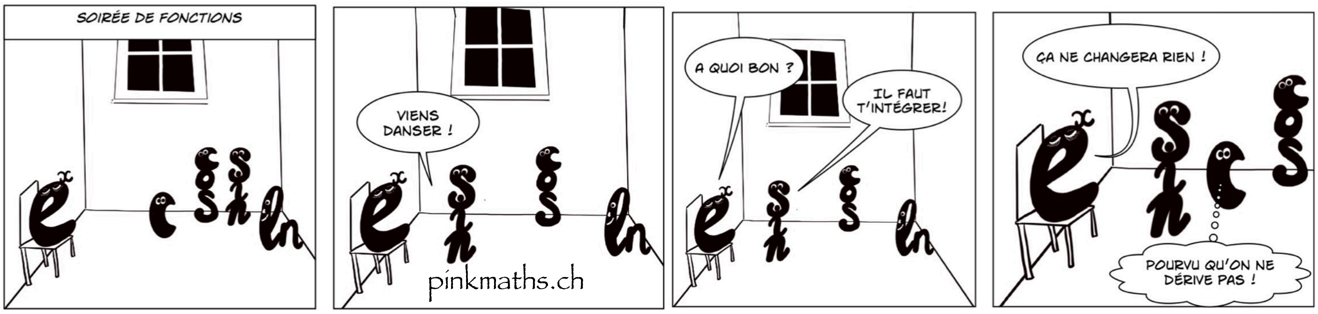
3) On laisse tomber un corps de masse m d'une certaine hauteur. Ce corps subit une résistance de freinage de la part de l'air, proportionnelle à sa vitesse (k étant le coefficient de proportionnalité). On veut trouver la loi physique décrivant la vitesse de ce corps au cours du temps.



La loi physique correspondant à l'équation différentielle :

$$mg - kv = mv'$$

Car : $F_{res} = ma \Leftrightarrow mg - kv = m\underbrace{a}_{v'}$



Définitions :

1) On appelle **équation différentielle** une équation établissant une relation entre la variable x, la fonction inconnue $y = f(x)$ et ses dérivées $y', y'', etc.$

2) On appelle **ordre** d'une équation différentielle l'ordre de la dérivée la plus élevée contenue dans cette équation.

3) On appelle équation différentielle **linéaire d'ordre n** toute équation de la forme

$$A_n(x) \cdot y^{(n)} + A_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \cdots + A_1(x) \cdot y' + A_0(x) \cdot y = B(x)$$

où $A_i(x)\ \ et\ B(x)$ sont des fonctions de x.

4) Une équation différentielle linéaire d'ordre n est appelée à **coefficients constants** si toutes les fonctions $A_i(x)$ sont des fonctions constantes.

5) Une équation différentielle linéaire d'ordre n est appelée **sans second membre** si $B(x) = 0$ pour toute valeur de x.

Exemples : L'équation différentielle :

1) $y' = y$ est d'ordre 1, linéaire, sans second membre
2) $y'' = -y$ est d'ordre 2, linéaire, sans second membre
3) $y' = y^2$ est d'ordre 1, non linéaire sans second membre
4) $mV' = mg - kV$ est
5) $xy^3 = 1$ est

Il n'existe pas de méthode globale permettant de résoudre n'importe quelle équation différentielle. Nous allons donc étudier deux types d'équations différentielles : celles du premier ordre, et nous essayerons de ramener à de telles équations celles d'ordre supérieur, et celles linéaires auxquelles nous pourrons appliquer des résultats d'algèbre linéaire.

Exemple : $f'''(x) = 2x - 7$ ou $f^{(3)}(x) = 2x - 7$ est une équation différentielle d'ordre 3.

Résolution : $f''(x) =$ $f'(x) =$ $f(x) =$

La famille de fonctions $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{c_1}{2}x^2 + c_2 x + c_3$ est la solution générale de l'équation différentielle. Elle fait intervenir trois constantes indépendantes ; nous disons alors que nous avons trois degrés de liberté pour la solution générale.

➢ ***Equations différentielles Série 1***

2. Équations différentielles du premier ordre à variables séparables

Reprenons l'exemple introductif (p.1), lié à la fonction exponentielle de base e.
Cette fonction est solution de l'équation différentielle $\boldsymbol{y' = y}$. Est-elle la seule solution ?

Pour répondre à cette question, il faut essayer de résoudre l'équation :

$$y' = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = 1\,dx$$

Méthode : prendre une primitive de chaque membre de l'équation, il vient alors :

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int 1\ dx$$

$$\Rightarrow \quad ln|y| = x + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{x+c}$$

$$\Rightarrow \quad |y| = e^x \cdot e^c$$

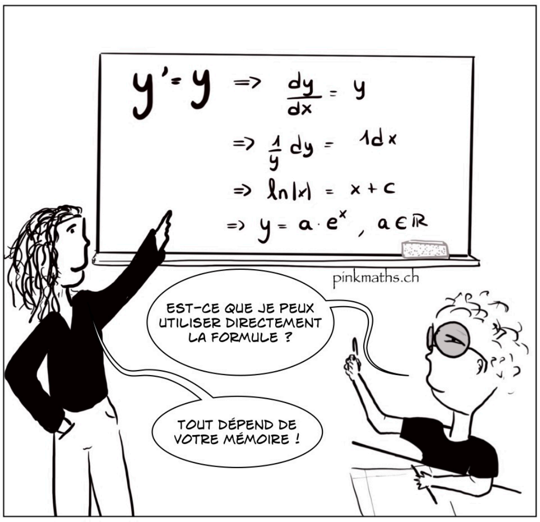
$$\Rightarrow \quad |y| = e^x \cdot k, \qquad k > 0$$

$$\Rightarrow y = e^x \; ou \; y = -e^x \cdot k$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad y = ae^x, \qquad a \in \mathbb{R}}$$

Car pour $a = 0$, on a : $y = 0$ qui vérifie $y' = y$

Il y a donc une infinité de fonctions qui sont égales à leur dérivée : toutes celles de la forme $y = ae^x,\ a \in \mathbb{R}$.



Remarques :

1) $y = ae^x$, avec $a \in \mathbb{R}$ est appelée **solution générale** de l'équation.

2) Si l'on impose une condition sur la courbe y, par exemple y doit contenir le point $(2; 9)$, la valeur de a va être déterminée et l'on obtiendra une fonction appelée solution particulière de l'équation.

   Calcul : $y = ae^x$ et $9 = ae^2$ donc $a = \frac{9}{e^2}$

   $y = \left(\frac{9}{e^2}\right) e^x$ est la **solution particulière** passant par $(2; 9)$

3) L'égalité $\frac{1}{y}\, dy = 1\, dx$ est du type : $f(y)dy = g(x)dx$ et donc, à partir de l'énoncé, on a séparé les variables x et y.

Définition : On appelle équation différentielle **à variables séparables** toute équation pouvant être mise sous la forme : $f(y)dy = g(x)dx$

Exemple :

Résoudre : $y' = -\frac{1}{2}y$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Équation différentielle

Équation différentielle du premier ordre

Une *équation différentielle du premier ordre* est une relation de la forme $R(x\,;y\,;y') = 0$ avec $y = y(x)$ et $y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

Équation à variables séparées

L'équation est du type $g(y)\, y' = f(x)$

La solution générale y est telle que $\displaystyle\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$

Remarque :

Dans les équations différentielles à variables séparables $g(y)y' = f(x)$, la fonction g est supposée continue sur un intervalle.

Si de plus g ne change pas de signe sur cet intevalle, alors la fonction G est strictement croissante ou strictement décroissante (cf corollaire du TAF) et admet une réciproque.

Exemple : $\mathbf{3y'y^2 - x = 0}$ *équation différentielle à variables séparables*

Cette équation est équivalente à : $3y^2y' = x$ *équation différentielle à variables séparées*

Ici,

$$G(y) = 3y^2 \quad et\ f(x) = x$$

donc

$$G(y) = y^3 \quad et\ \ F(x) = \frac{1}{2}x^2$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} 3y^2y' = x \quad &\Rightarrow \quad 3y^2\frac{dy}{dx} = x \\ &\Rightarrow \int 3y^2\,dy = \int x\,dx \\ &\Rightarrow \quad y^3 = \frac{1}{2}x^2 + c \\ &\Rightarrow y = \sqrt[3]{\frac{1}{2}x^2 + c}\,, c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice : Vérifier cette solution en calculant $3y^2y'$ à partir de la fonction y trouvée.

Remarque : Même si la fonction G admet une réciproque, il n'est pas toujours facile de la calculer :

Prenons : $(3y^2 + 1)y' = 10x$ *équation différentielle à variables séparées*

Ici,

$$g(y) = 3y^2 + 1 \qquad et \quad f(x) = 10x$$

Donc,

$$G(y) = y^3 + y \quad et \quad F(x) = 5x^2$$

(Ici, g est positive sur $\mathbb{R}$. G est donc croissante et admet une réciproque)

On obtient donc :

$$\int (3y^2 + 1)\,dy = \int 10x\,dx \Rightarrow y^3 + y = 5x^2 + c, c \in \mathbb{R}$$

A partir de cette solution générale sous forme implicite, il n'est pas facile de trouver la forme explicite de la fonction y. (càd, d'écrire : $y = \cdots$, en fonction de x uniquement.)

➢ ***Équations différentielles Série 2***

3. Équations homogènes du premier ordre

Exemple : Résolvons l'équation $(y-x)y'+y=0$

$$\Rightarrow \frac{(y-x)dy}{dx} = -y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{y-x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{y}{x}}{\frac{y-x}{x}}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1} = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Poser : $t = \frac{y}{x}$

N'oublions pas que : $\frac{y(x)}{x} = t(x)$ *y est une fonction et t sera une fonction à variable x*

Donc : $y(x) = t(x)\cdot x \;\Rightarrow y'(x) = t'(x)\cdot x + t(x)\cdot 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\cdot x + t$

Reprenons la résolution :

$$\frac{dt}{dx}\cdot x + t = -\frac{t}{t-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}\cdot x = -\frac{t}{t-1} - t$$

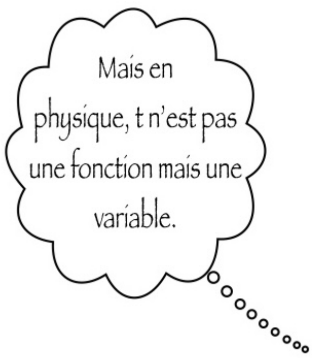
$$\Rightarrow \frac{dt}{dx}x = \frac{-t-t^2+t}{t-1}$$

$$\Rightarrow \frac{t-1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{t} - t^{-2}\right) dt = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow ln|t| + t^{-1} = -ln|x| + c$$

$$\Rightarrow \underbrace{ln|t| + ln|x|}_{ln|tx|} + \frac{1}{t} = c \qquad or\ tx = y$$



$$\Rightarrow ln|y| + \frac{x}{y} = c$$

$$\Rightarrow y ln|y| + x = cy$$

Remarques :

1) Pour résoudre cette équation, nous avons adopté la démarche suivante :

nous avons exprimé y' comme fonction de $\frac{y}{x}$.

Dans l'exemple, on avait : $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{-\frac{y}{x}}{\left(\frac{y}{x}\right)-1}$

Cette fonction f est caractérisée par le fait qu'elle est invariante par le changement de $(x; y)$ en $(\lambda x; \lambda y)$, c'est-à-dire : l'image de $(\lambda x; \lambda y)$ par f vaut l'image de $(x; y)$ par f.

En effectuant la **substitution** $t = \frac{y}{x}$, nous avons pu nous ramener à une équation à **variables séparables.**

2) La solution générale $y(x)$ de l'exemple considéré n'a pas pu être exprimée sous la forme **explicite** : $y = f(x)$.
Elle a été exprimée sous forme **implicite**, c'est-à-dire comme une fonction de x et de $y(x)$.

3)

Définition : On appelle ***équation homogène du premier ordre*** toute équation différentielle du premier ordre pouvant être mise sous la forme $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

4) Les équations de la forme $y' = \frac{ax+by+c}{ex+fy+g}$ peuvent la pluspart du temps être ramenées à des équations homogènes.

Pour cela, il faut effectuer les changements de variables suivants :

$$x = u + h \quad et\ y = v + k$$

où h et k sont des nombres réels déterminés par le fait que l'équation de l'énoncé devra être ramené à :

$$\frac{dv}{du} = \frac{au + bv}{eu + fv}$$

Exemple : $y' = \frac{x+y-3}{x-3-1}$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Équation homogène

L'équation est du type $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

On pose $z = \frac{y}{x}$ pour obtenir l'équation à variables séparables $z + xz' = f(z)$ et puis on résout l'équation à variables séparées $\frac{1}{f(z) - z} \cdot z' = \frac{1}{x}$

➢ ***Équations différentielles Série 3***

4. Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Définition :

On appelle ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** tout équation différentielle de la forme :

$$A(x)y' + B(x)y = C(x)$$

Remarque :

Si $A(x) \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation par $A(x)$ et une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrira alors :

$$y' + f(x)y = g(x)$$

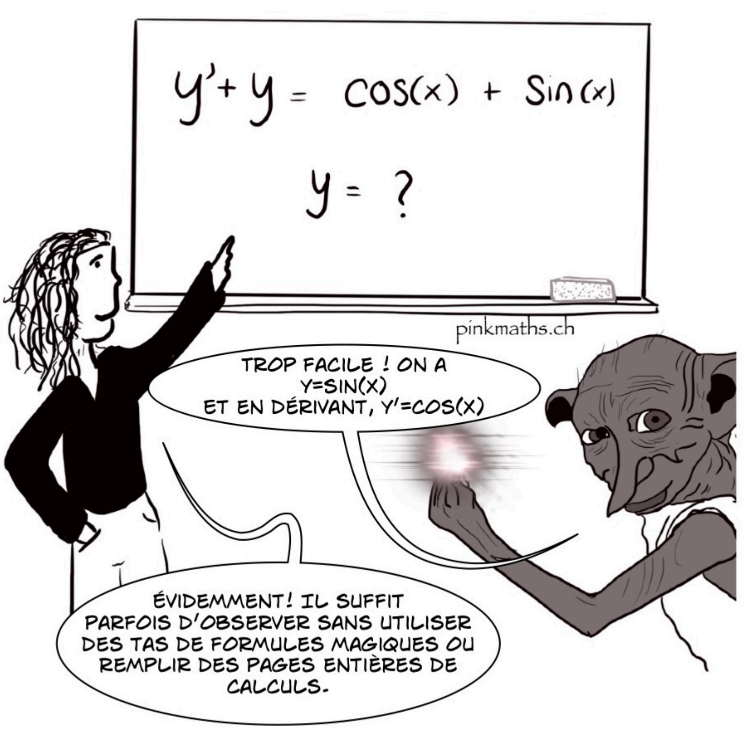
Vocabulaire :

- $y' + f(x)y = g(x)$ est appelée **équation avec second membre**.
- $y' + f(x)y = 0$ est appelée **équation sans second membre**.

Le résultat suivant explique comment déterminer la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

Exemples : (Que nous allons étudier)

1) $y' + 2y = x$
2) $y' + y = \cos(x) + \sin(x)$
3) $y' + y \cdot \tan(x) = \sin(2x)$



Théorème :

La solution générale d'une **équation différentielle linéaire du premier ordre** s'obtient en ajoutant à une **solution générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation avec second membre.**

Preuve :

a) Solution générale de l'équation sans second membre :

$$y' + f(x)y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\,dy = -f(x)dx$$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = -\int f(x)dx + c$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\int f(x)dx + c}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{c}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{c} \quad ou\ y = -e^{-\int f(x)dx} \cdot e^{c}$$

Comme $e^c > 0$ pour toute valeur de c et comme $y = 0$ est solution de $y' + f(x)y = 0$, on a finalement :

$$\boxed{y' + f(x)y = 0 \;\Leftrightarrow y = k \cdot e^{-\int f(x)dx} \; avec\ k \in \mathbb{R}}$$

b) Solution générale de l'équation avec second membre :

Si l'on n'arrive pas à deviner (voir exemple 1) ci-après), puis à prouver qu'une fonction est solution particulière de l'équation avec second membre, il existe une méthode appelée **méthode de variation de la constante**.

On définit la fonction : $\boldsymbol{y(x) = K(x) \cdot y_0(x)}$ où $y_0(x)$ est une solution de l'équation sans second membre (voir a)).

On a :

$$y'(x) = K'(x)y_0(x) + K(x)y_0'(x)$$

c'est-à-dire : $y' = K'y_0 + Ky_0'$

$y(x) = K(x)y_0(x)$ est solution de l'équation avec second membre : $\underbrace{y' + f(x)y = g(x)}_{\text{équation de départ}}$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{K'y_0 + Ky_0'}_{y'} + f(x)\underbrace{Ky_0}_{y} = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \quad K'y_0 = g(x)$$

car $Ky_0' + f(x)Ky_0 = 0$ puis que y_0 est solution de l'équation sans second membre.

$$\Leftrightarrow \quad K' = \frac{g(x)}{y_0}$$

$$\Leftrightarrow K(x) = \int \frac{g(x)}{y_0} dx + c \ , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \left(\int \frac{g(x)}{y_0} dx + c \right) y_0(x) \quad , c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = \underbrace{\left(\int \frac{g(x)}{y_0} dx \right) y_0(x)}_{\substack{\text{solution particulière } (c=0) \text{de} \\ \text{l'équation avec second membre}}} + \underbrace{c y_0(x)}_{\substack{\text{solution générale de l'équation} \\ \text{sans second membre}}} \quad , c \in \mathbb{R}$$

CQFD

Exemples

1) Résoudre l'équation $\boldsymbol{y' + 2y = x}$

C'est une équation du premier ordre linéaire avec

$\boldsymbol{f(x) =}$

Et

$\boldsymbol{g(x) =}$

$$\boldsymbol{y' + 2y = x}$$

Résolvons l'équation $y' + 2y = x$ avec deux méthodes :

Méthode 1 :

Devinons : $f(x) = ax + b$ donc $f'(x) = a$

Dans l'équation : $a + 2ax + 2b = x$

Résolvons : $(2a)x + (a + 2b) = x + 0$

On obtient le système :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Donc : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

On a donc : $y = \underbrace{ke^{-2x}}_{\substack{par\ partie\ a) \\ du\ théorème}} + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}_{par\ devinette}$

Méthode 2 : Variation de la constante

Prenons la solution obtenue par la partie a) du théorème :

$$y = ke^{-2x}$$

Posons : $y(x) = k(x)e^{-2x}$ **(*)**

Reprenons l'équation : $y' + 2y = x$

On obtient : $K'(x)e^{-2x} + k(x)(-2)e^{-2x} + 2k(x)e^{-2x} = x$

$\Leftrightarrow K'(x)e^{-2x} = x \quad \Leftrightarrow K'(x) = \frac{x}{e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow \quad K'(x) = xe^{2x}$

$$K(x) = \underbrace{\int xe^{2x}dx}_{par\ parties}$$

$$f'(x) = e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1$$

$\Leftrightarrow K(x) = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \displaystyle\int \frac{1}{2}e^{2x}dx$

$\Leftrightarrow K(x) = \dfrac{1}{2}xe^{2x} - \dfrac{1}{4}e^{2x}$

$\Leftrightarrow K(x) = e^{2x}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right)$

A injecter dans **(*) :**

$y(x) = k(x)e^{-2x} = e^{2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$

Deux autres équations différentielles résolues :

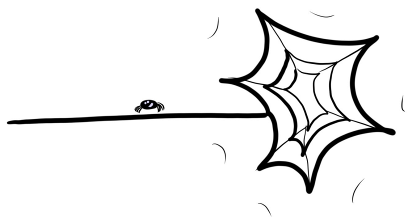
2) Résolution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y' + y = \cos(x) + \sin(x)}$

a) Cette équation a pour solution particulière $\sin(x)$.

b) αe^{-x}, $\alpha \in \mathbb{R}$, est la solution générale de $y' + y = 0$.

c) En vertu du théorème ci-dessus, la solution générale de cette équation est :

$$y = \sin(x) + \alpha e^{-x},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$



3) Résolution de l'équation différentielle : $\boldsymbol{y' + y \cdot \tan(x) = \sin(2x)}$

On résout l'équation $y' + y \cdot \tan(x) = 0$ en séparant les variables.

$$y' = -y \cdot \tan(x)$$
$$\frac{y'}{y} = -\tan(x)$$
$$\ln|y| = \ln|\cos(x)| + C$$
$$y = \alpha\cos(x) \qquad ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

En posant $y = \alpha(x)\cos(x)$, on obtient

$$\alpha'(x)\cos(x) - \alpha(x)\sin(x) + \alpha(x)\cos(x)\tan(x) = \sin(2x)$$
$$\alpha'(x)\cos(x) - \alpha(x)\sin(x) + \alpha(x)\cancel{\cos(x)}\frac{\sin(x)}{\cancel{\cos(x)}} = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\alpha'(x)\cos(x) - \cancel{\alpha(x)\sin(x)} + \cancel{\alpha(x)\sin(x)} = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$\alpha'(x)\cancel{\cos(x)} = 2\sin(x)\cancel{\cos(x)}$$
$$\alpha'(x) = 2\sin(x)$$

dont la solution générale est $\alpha(x) = -2\cos(x) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la solution générale de l'équation proposée est :

$$y = -2\cos^2(x) + \lambda\cos(x),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Résumé de la méthode de résolution :

1) Si l'on trouve une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation avec second membre, alors

$$y(x) = ke^{-\int f(x)dx} + y_0(x)$$

2) Si l'on ne trouve pas une solution particulière $y_0(x)$ de l'équation avec second membre, alors :

$$y(x) = \left(\int \frac{g(x)}{y_0(x)}dx + c\right) y_0(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

où $y_0(x)$ est une solution de l'équation sans second membre.

Remarque :

Déterminer la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre revient à déterminer deux primitives :

- Celle de $f(x)$, pour avoir la solution de l'équation sans second membre
- Celle de $\frac{g(x)}{y_0(x)}$, pour appliquer la méthode de variation des constantes.

Que trouve-t-on dans la table CRM ?

Équation linéaire

L'équation est du type $y' + f(x)\,y = g(x)$

Cas où $g(x) = 0$

La solution générale est $y = c\,e^{-F(x)}$ où F est une primitive de f et c une constante.

Cas général

La solution générale est la somme d'une solution particulière p de l'équation et de la solution générale de l'*équation sans second membre* $y' + f(x)\,y = 0$ (cas précédent).

On peut trouver une solution particulière en posant $p(x) = c(x)\,e^{-F(x)}$ où $c(x)$ est à déterminer en remplaçant y par p dans l'équation différentielle donnée (méthode de variation de la constante).

➢ ***Équations différentielles Série 3 exercice 3***

5. Équations différentielles de Bernoulli

Définition :

On appelle **équation différentielle de Bernoulli** toute équation de la forme :

$$y' = f(x)y + g(x)y^n$$

Exemple : $y' + xy = x^3y^3$

Cette équation ressemble à une équation linéaire, sauf que le membre de droite qui est un multiple d'une puissance de y.

Idée : diviser chaque membre de l'équation par y^3.

On obtient :

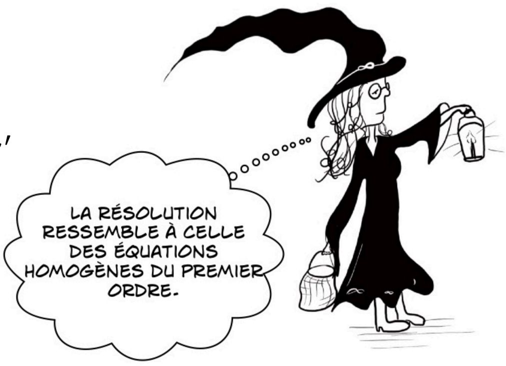
$$\frac{y'}{y^3} + \frac{x}{y^2} = x^3$$

Cette équation n'est toujours pas linéaire, mais pourrait le devenir en effectuant la **substitution** suivante :

$$\boldsymbol{t = \frac{1}{y^2} = y^{-2}}$$

$$\Rightarrow t' = (y^{-2})' = -2y^{-3}y'$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2}t'$$



Avec cette substitution l'équation devient :

$$-\frac{1}{2}t' + xt = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad t' - 2xt = -2x^3$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la variable est la fonction $t(x)$

Résolvons $t' - 2xt = -2x^3$

Résolution de l'équation : $\boldsymbol{t' - 2xt = -2x^3}$

1) **Première étape :** Résoudre $\boldsymbol{t' - 2xt = 0}$

On applique la formule du paragraphe précédent : $t = ke^{x^2} \quad et\ k \in \mathbb{R}$

2) **Deuxième étape :** Méthode de variation des constantes :

Poser : $t(x) = K(x)e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad t'(x) = K'(x)e^{x^2} + K(x)\left(e^{x^2}\right)' = K'(x)e^{x^2} + K(x)e^{x^2}2x$
Dans l'équation : $K'(x)e^{x^2} + K(x)e^{x^2 2x} - 2xK(x)e^{x^2} = -2x^3$

$$\Rightarrow K'(x)e^{x^2} = -2x^3$$
$$\Rightarrow \quad K'(x) = -2x^3e^{-x^2}$$
$$\Rightarrow K(x) = \underbrace{\int \left(-2x^3e^{-x^2}\right)dx}_{par\ parties} = e^{-x^2}x^2 - \int e^{-x^2}2xdx = x^2e^{-x^2} + e^{-x^2} = e^{-x^2}(x^2+1)$$

Donc $t(x) = x^2 + 1$

Réponse : $t(x) = Ke^{x^2} + x^2 + 1 \quad et\ K \in \mathbb{R}$

3) Finalement : Retour à y :

$$\frac{1}{y^2} = Ke^{x^2} + x^2 + 1 \quad \Rightarrow y^2 = \frac{1}{Ke^{x^2} + x^2 + 1} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{Ke^{x^2} + x^2 + 1}}, K \in \mathbb{R}$$

Méthode générale de résolution :

1) Diviser chaque membre de l'égalité par y^n. On obtient : $y^{-n}y' = f(x)y^{1-n} + g(x)$

2) Poser : $t = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad t' = (1-n)y^{-n}y' \quad \Rightarrow y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}t'$

L'équation devient : $\frac{1}{1-n}t' = f(x)t + g(x) \quad \Leftrightarrow \quad t' + (n-1)f(x)t = g(x)(1-n)$ qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont la variable est la fonction $t(x)$.

3) Résoudre cette équation, puis revenir à la variable y.

➢ ***Équations différentielles Série 4***

6. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Préambule : Nous ne traiterons que les **équations linéaires de deuxième ordre à coefficients constants**, car il n'existe pas de méthode globale pour celles à coefficients non constants.

Rappel : une équation différentielle du deuxième ordre est appelée linéaire à coefficients constants si elle peut être mise sous la forme :

$$\boldsymbol{ay'' + by' + cy = g(x)}, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{R} \ \ et\ a \neq 0$$

1er résultat :

Comme pour les équations linéaires du premier ordre, il existe une méthode permettant de calculer la solution générale d'une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, décrite par le théorème suivant :

Théorème : La solution générale d'une équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre une solution particulière de l'équation avec second membre.

Ce théorème ne sera pas démontré.

Solution générale de l'équation sans second membre :

L'équation sans second membre est : $ay'' + by' + cy = 0$

Idée :

Pour que le membre de gauche ait une chance de s'annuler, il faut que y, y' et y'' soient « semblables ». Le seul type de fonction « semblables » à leurs dérivées étant des fonctions exponentielles, on part de l'idée qu'une solution de cette équation est de la forme :

$$\boldsymbol{y(x) = e^{\beta x}}$$

Calcul :

$$\boxed{y(x) = e^{\beta x} \text{ est solution de l'équation } ay'' + by' + cy = 0}$$

$$\Leftrightarrow a\left(e^{\beta x}\right)'' + b\left(e^{\beta x}\right)' + ce^{\beta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\beta^2 e^{\beta x} + b\beta e^{\beta x} + ce^{\beta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a\beta^2 + b\beta + c)e^{\beta x} = 0$$

$$\Leftrightarrow a\beta^2 + b\beta + c = 0 \qquad car\ e^{\beta x} > 0 \quad \forall \beta, x$$

$$\boxed{\beta \text{ est solution de l'équation : } a\beta^2 + b\beta + c = 0}$$

Trois cas de figure peuvent donc se présenter

1) L'équation $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ admet un discriminant positif, c'est-à-dire : $\Delta > \mathbf{0}$
Alors l'équation admet deux solutions réelles, notées β_1 et β_2.

La solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ sera alors :

$$\boldsymbol{y = Ae^{\beta_1 x} + Be^{\beta_2 x}}$$

2) L'équation $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ admet un discriminant nul, c'est-à-dire : $\Delta = \mathbf{0}$
Alors l'équation admet une solution réelle, notées β.

La solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ sera alors :

$$\boldsymbol{y = (Ax + B)e^{\beta x}}$$

3) L'équation $a\beta^2 + b\beta + c = 0$ admet un discriminant négatif, c'est-à-dire : $\Delta < \mathbf{0}$
Alors l'équation admet **deux solutions complexes,** notées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

La solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ sera alors :

$$\boldsymbol{y = \big((k_1 + k_2)\cos(\beta x) + i(k_1 - k_2)\sin(\beta x)\big)e^{\alpha x}}$$

$$\boldsymbol{y = \big(Acos(\beta x) + Bsin(\beta x)\big)e^{\alpha x}}$$

Vocabulaire :

$a\beta^2 + b\beta + c = 0$ est appelée **équation caractéristique** de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$

Exemple : Résoudre : $5y'' + y' - 4y = 0$

$$a = 5, b = 1, c = -4$$
$$\Delta = 81, \beta_1 = -1 \ et \ \beta_2 = \frac{4}{5}$$

Donc deux solutions : $y = e^{\frac{4}{5}x} \ \ et \ y = e^{-x}$

Toutes les solutions : $y(x) = Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-x} \, , avec \ A, B \in \mathbb{R}$

Solution particulière de l'équation avec second membre :

L'équation est $ay'' + by' + cy = g(x)$

Méthode :

1) « Deviner » une solution particulière y_p de $ay'' + by' + cy = g(x)$ en vous aidant de votre intuition ou de la table CRM

2) Substituer y par y_p dans l'équation, réduire le membre de gauche, puis comparer les deux membres de l'équation pour déterminer y_p.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Équation différentielle du deuxième ordre

Une *équation différentielle du deuxième ordre* est une relation de la forme $R(x\,;y\,;y';\,y'') = 0$
On note c_1 et c_2 deux constantes.

Équation linéaire à coefficients constants

L'équation est du type $ay'' + by' + cy = g(x)$ avec $a \neq 0$

Cas où $g(x) = 0$
La solution générale dépend de l'*équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$

Si cette équation possède ...	la solution de l'équation différentielle est ...
deux solutions réelles r_1 et r_2	$y = c_1\,e^{r_1x} + c_2\,e^{r_2x}$
une solution réelle r	$y = (c_1x + c_2)\,e^{rx}$
deux solutions complexes $p \pm qi$	$y = e^{px}\big(c_1\cos(qx) + c_2\sin(qx)\big)$

Cas général
La solution générale est la somme d'une solution particulière p de l'équation et de la solution générale de l'*équation sans second membre* $ay'' + by' + cy = 0$ (cas précédent).
Pour trouver une solution particulière p on tient compte de la forme de g en suivant les indications du tableau ci-dessous.
On note α, β, λ, κ, μ et ω des nombres réels.

Lorsque g est du type ...	on pose comme solution particulière p ...
polynôme de degré n	un polynôme de degré n si $c \neq 0$ un polynôme de degré $n+1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$ un polynôme de degré $n+2$ si $b = c = 0$
$g(x) = \lambda\,e^{\kappa x}$	$p(x) = \alpha\,e^{\kappa x}$ ou $p(x) = \alpha x\,e^{\kappa x}$ ou $p(x) = \alpha x^2\,e^{\kappa x}$
$g(x) = \lambda\sin(\omega x)$	$p(x) = \alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)$ ou $p(x) = \alpha x\cos(\omega x)$
$g(x) = \lambda\cos(\omega x)$	$p(x) = \alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)$ ou $p(x) = \alpha x\sin(\omega x)$
$g(x) = e^{\kappa x}\big(\lambda\sin(\omega x) + \mu\cos(\omega x)\big)$	$p(x) = e^{\kappa x}\big(\alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)\big)$ ou $p(x) = x\,e^{\kappa x}\big(\alpha\sin(\omega x) + \beta\cos(\omega x)\big)$
combinaison linéaire des types précédents	une combinaison linéaire des solutions particulières proposées pour ces différents types

Lorsque plusieurs possibilités sont proposées pour p, on les essaiera dans l'ordre indiqué.

Exemple : Résoudre : $5y'' + y' - 4y = 8x^3 - 2x^2 + 2x$

$$\boldsymbol{5y'' + y' - 4y = 8x^3 - 2x^2 + 2x}$$

1) On a déjà résolu : $5y'' + y' - 4y = 0$

$$y(x) = Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-x}, avec\ A, B \in \mathbb{R}$$

2) Idée (CRM) :

$$y_p = ax^3 + bx^2 + cy + d$$
$$\Rightarrow y_p' = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\Rightarrow y_p'' = 6ax + 2b$$

Dans l'énoncé :

$$5(6ax + 2b) + 3ax^2 + 2bx + c - 4(ax^3 + bx^2 + cy + d) = 8x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$(-4a)x^3 + (3a - 4b)x^2 + (30a + 2b - 4c)x + (10b + c - 4d) = 8x^3 - 2x^2 + 2x$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} -4a = 8 \\ 3a - 4b = -2 \\ 30a + 2b - 4c = 2 \\ 10b + c - 4d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \\ c = -16 \\ d = -6{,}3 \end{cases}$$

On trouve donc :

$$y_p = -2x^3 - x^2 - 16x - 6{,}5$$

La solution finale est donc :

$$y(x) = Ae^{\frac{4}{5}x} + Be^{-x} - 2x^3 - x^2 - 16x - 6{,}5$$

7. Résumé des méthodes de résolutions vues dans ce cours

Il est évident que nous n’avons pas traité tous les types d’équations différentielles résolubles.

Par ailleurs, il existe des équations différentielles que nous ne savons pas résoudre ; on peut alors parfois obtenir une approximation numérique des solutions de telles équations en utilisant, en particulier, une notion appelée série de fonction.

L’organigramme ci-dessous résume ce que nous avons traité dans ce cours :

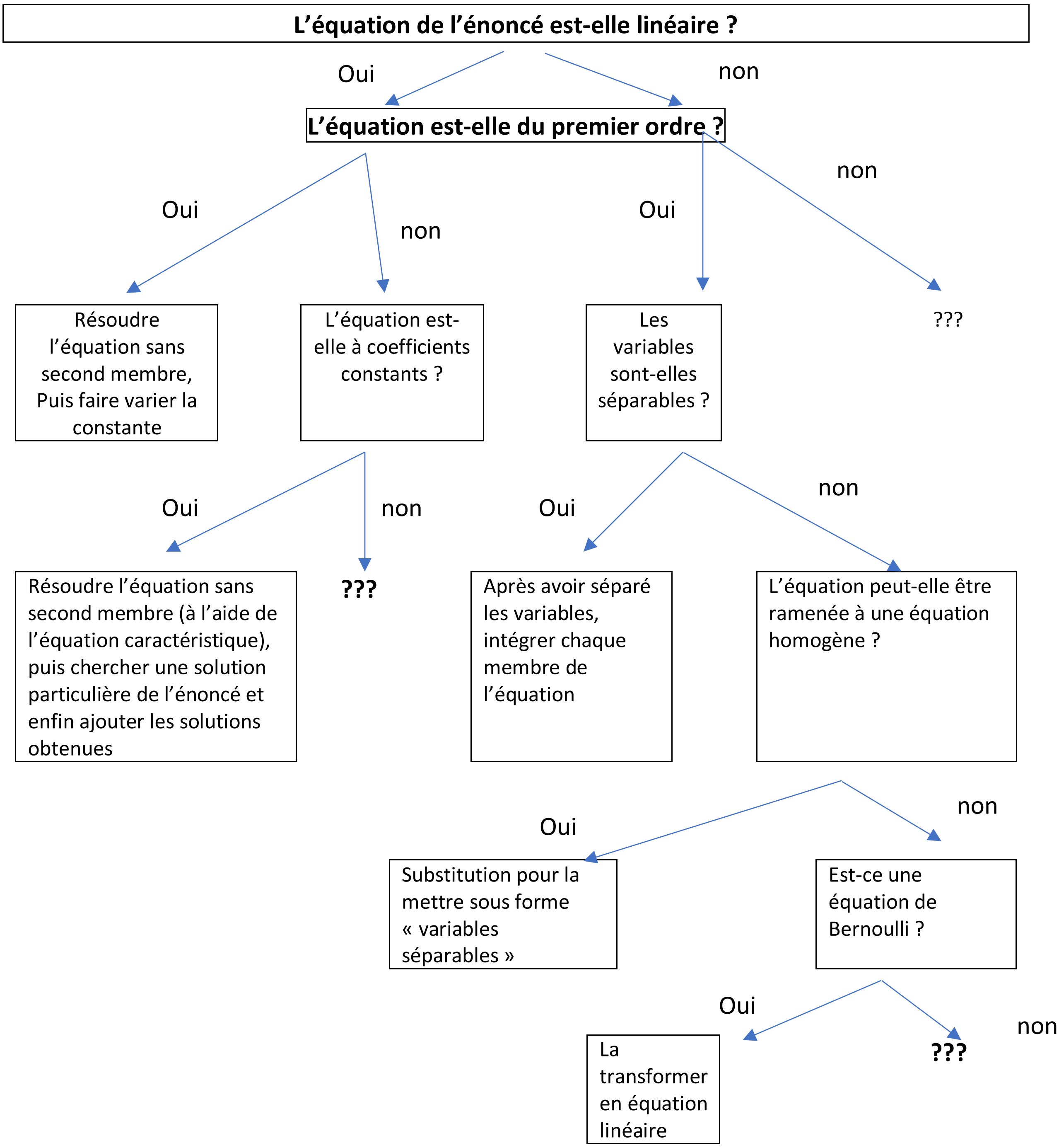


Table des matières