Les nombres complexes[1]

Le lien entre algèbre, géométrie et analyse

Des quantités "imaginaires" (nombres complexes) sont apparues en mathématiques au 16e siècle dans l'étude des équations de degrés 3 et 4.

Nous verrons en exercice que les méthodes de résolution utilisées à cette époque par les grands mathématiciens italiens (Scipione Del Ferro, Antonio Maria Fiore, Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano ...) permettent de calculer des solutions réelles par le biais de calculs faisant intervenir des racines carrées de nombres négatifs.
On parlait alors, vers 1535, de "méthodes secrètes".
(Le but était de remporter des concours ou défis scientifiques.)

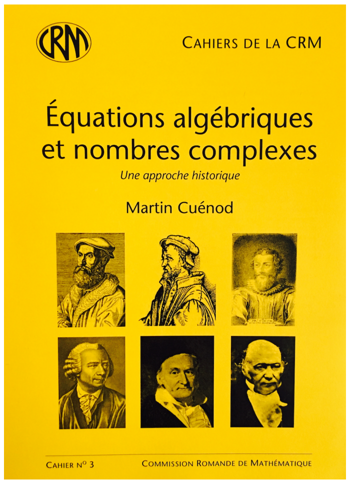
Ce n'est qu'au 19e siècle, donc trois siècles plus tard, que ces quantités imaginaires ont obtenu le statut de nombres et que toutes les ambiguïtés liées à leur usage ont été levées.
Une date à relever : en 1777, Léonhard Euler propose le symbole i pour noter ces quantités imaginaires.

Dans ce domaine aussi, il aura été très productif.
L'approche des nombres complexes décrite dans ce document n'est pas une approche historique mais elle a l'avantage de s'intégrer plus logiquement aux notions vues jusqu'ici.

[1] *Les références de ce cours sont ceux des cours de T. Zwahlen, et J.-M. Bacchiocchi.*

Matériel :

- Feuilles / Cahier
- Crayon et gomme pour les cours
- Calculatrice
- Un compas et une règle
- Ce polycopié
- Les séries appelées « Nombres Complexes Série … » (NCS1, NCS2, etc.)
- Brochure « Équations algébriques et nombres complexes », Cahier de la CRM



0. Idée toute simple :

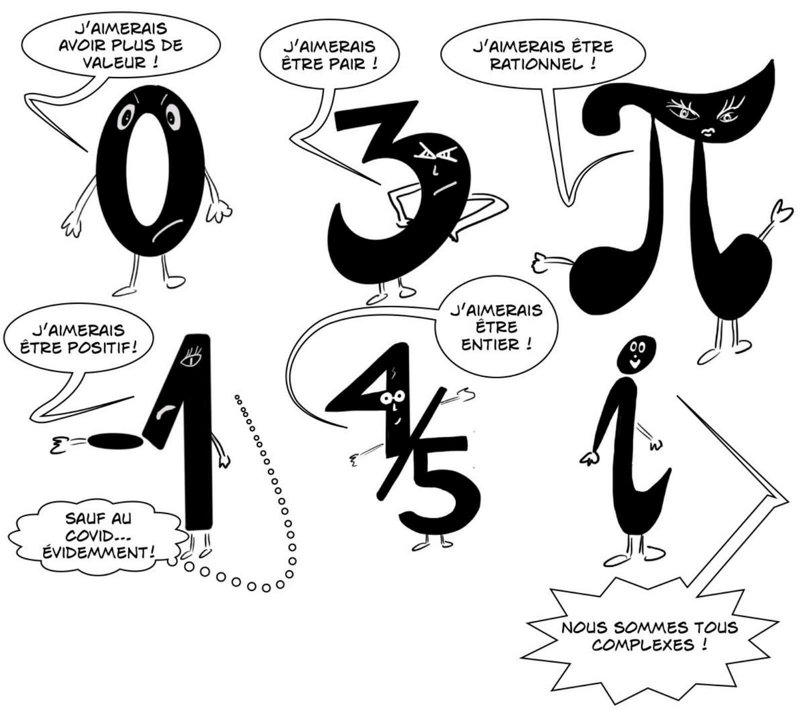
Jusqu'à présent, nous avons vu que l'écriture $\sqrt{-4}$ ne correspond à aucun nombre réel.

Si l'on applique les propriétés des racines, il vient :

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}$$

$\boxed{\sqrt{-1} \text{ n'est pas un nombre réel, mais est un } \textbf{\textit{nombre appelé complexe}}\text{, noté : } \boldsymbol{i}}$

Dans l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, on a donc : $\sqrt{-4} = 2i$.
Les nombres complexes n'était pas évident à imaginer, nous allons voir comment ils ont été construits, comment nous pouvons les représenter ainsi que leurs propriétés.



1. Ensemble des nombres complexes :

Rappel : $\mathbb{R}^2 = \{(x; y) | \ x \in \mathbb{R} \ et \ y \in \mathbb{R}\}$; les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont des couples.

Opération connue sur $\mathbb{R}^2$:

L'addition de deux couples, définie par : $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$

Exemple : $(2 ; -1) + (4 ; 1) = (6 ; 0)$

Propriétés de l'addition : pour tous les couples $t, u \ et \ w \ de \ \mathbb{R}^2$, on a :

- Associativité : $(t + u) + w = t + (u + w)$
- Commutativité : $t + u = u + t$
- Élément neutre : $n = (0; 0)$, car $t + n = t$
- Opposé du couple : $t = (a; b)$ est $(-a; -b) =: -t$, vérifiant : $t + (-t) = n$

Nouvelle opération sur $\mathbb{R}^2$ la multiplication de deux couples.

La multiplication de deux couples, définie par : $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$

Exemples : $(1; 2) \cdot (-3; 4) =$

$(-3; 4) \cdot (1; 2) =$

$(a; b) \cdot (1; 0) =$

Propriétés de la multiplication : pour tous les couples $t, u \ et \ w \ de \ \mathbb{R}^2$, on a :

- Associativité : $(t \cdot u) \cdot w = t \cdot (u \cdot w)$
- Commutativité : $t \cdot u = u \cdot t$
- Élément neutre : $n = (1; 0), car \ t \cdot n = t$
- Inverse du couple $t = (a; b) \ est \ \left(\frac{a}{a^2+b^2}; -\frac{b}{a^2+b^2}\right) =: \frac{1}{t} \ , vérifiant : t \cdot \left(\frac{1}{t}\right) = n$

Exemple : si $t = (a; b) = (6; 8)$ alors $\frac{1}{t} = \left(\frac{3}{50}; -\frac{2}{25}\right)$

Relation entre addition et multiplication : la multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$t \cdot (u + v) = t \cdot u + t \cdot v$$

Définition de ***la soustraction*** : on ajoute l'opposé : $t - u = t + (-u)$

Exemple : $(2; 1) - (4; -2) = (2; 1) + (-4; 2) = (-2; 3)$

Définition de l**a division** : on multiplie par l'inverse : $\frac{t}{u} = t \cdot \frac{1}{u}$

Exemple : $\frac{(3;2)}{(-4;3)} = (3; 2) \cdot \frac{1}{(-4;3)} =$

Lien entre les couples de la forme $(a; 0)$ et $\mathbb{R}$:

Prenons deux couples du type $(\dots; 0)$: $(a; 0)\ et\ (b; 0)$

Leur somme vaut : $(a; 0) + (b; 0) = (a + b; 0 + 0) = (a + b; 0)$
Leur produit vaut : $(a; 0) \cdot (b; 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b; 0)$

La somme et le produit de deux couples correspondant à la somme et au produit des premières coordonnées, **on peut identifier l'ensemble des couples de la forme $(a; 0)$ à $\mathbb{R}$.**

On pose alors :

$$\boxed{\begin{array}{c} (a\,; 0) = a \\ \\ \text{En particulier :} \\ (0; 0) = 0 \\ (1; 0) = 1 \end{array}}$$

Le nombre i :

On a : $(0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0) = -1$

$$(0; 1)^2 = -1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Le couple : } (0; 1) \text{ est appelé } i \\ \\ \text{On écrit :} \\ \qquad\qquad i^2 = -1 \end{array}}$$

Écriture des couples de la forme $(0; b)$:

On a : $(b; 0) \cdot (0; 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; b)$
Donc :

$$\boxed{(0; b) = b \cdot i}$$

Écriture d'un couple quelconque et définition d'un nombre complexe :

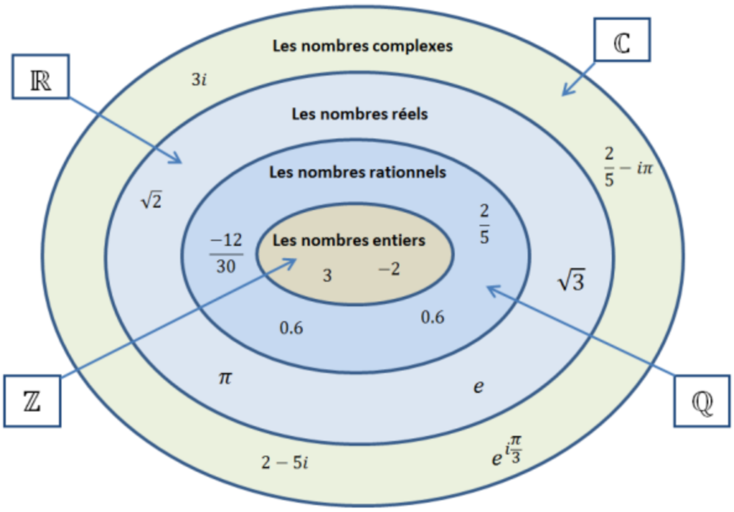
$$\boxed{(a\,; b) = (a; 0) + (0; b) = a + bi}$$

On appelle ***nombre complexe*** tout nombre z de la forme $\boldsymbol{z = a + bi}$ **où** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ **et** $\boldsymbol{i}$ est tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$

a s'appelle la **partie réelle** du nombre complexe z et est noté : $\boldsymbol{a = Re(z)}$
b s'appelle la **partie imaginaire** du nombre complexe z et est noté : $\boldsymbol{b = Im(z)}$

Vocabulaire :

- L'écriture $a + ib$ est appelée forme cartésienne de z.
- Si $Re(z) = 0$, alors $z = ib$ est appelé imaginaire pur.
- Si $Im(z) = 0$, alors $z = a$ est un nombre réel
- On en déduit donc que $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$



Cet ensemble est muni d'une addition et d'une multiplication.
Ces deux opérations jouissent des mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$ (commutativité, associativité, distributivité, …).
La nouveauté est l'utilisation du nombre i, nombre dont le carré est – 1.

Exemples de calculs :

1) $(2 + 3i) + (4 + 5i) = 6 + 8i$
2) $(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 22i + 15i^2 = 8 + 22i - 15 = -7 + 22i, car\ i^2 = -1$
3) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

Remarques :

1) Deux nombres complexes $z = a + ib$ et $w = c + id$ sont égaux s'ils ont des parties réelles et imaginaires égales : $z = w \Leftrightarrow a = c\ et\ b = d$
2) Contrairement aux réels, les complexes ne peuvent pas être classés par ordre de grandeur.
3) L'inverse de $2 + 3i$ peut se noter $\frac{1}{2+3i}$ mais cette écriture n'est pas une forme cartésienne. La forme cartésienne de $\frac{1}{2+3i}$ est $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$ (à vérifier dans la série 1)

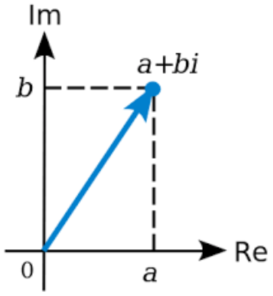
Que peut-être trouver dans la table CRM ?

Nombres complexes $\quad \mathbb{C} \quad = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

➢ ***NCS1***

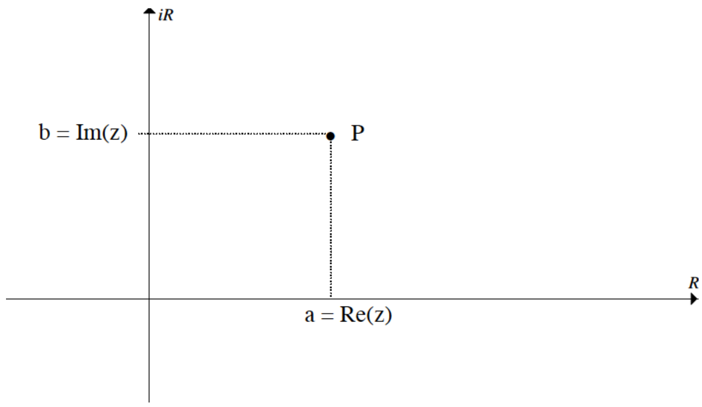
Représentation cartésienne d'un nombre complexe :

Le nombre complexe $z = a + bi$ est repsésenté dans un repère orthonormé par le couple $(a; b)$



A chaque complexe z nous pouvons donc associer un couple de réels, $(a; b)$ qui peut se représenter par un point P du plan.
Nous obtenons ainsi une bijection de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{R}^2$.

P est l'image de z et z est appelé l'affixe du point P.

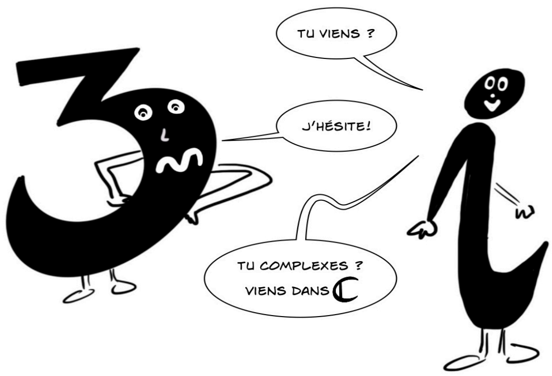


Utilisé de cette façon, le plan est appelé « plan complexe ». L'axe horizontal est l'axe réel, l'axe vertical est l'axe imaginaire (noté $i\mathbb{R}$).

Cette représentation des nombres complexes date de 1833. Elle est due à William Rowan Hamilton (1805, Dublin – 1865, Dublin)

Remarque :

Cette représentation permet de mieux comprendre pourquoi les nombres complexes ne peuvent pas être ordonnés. (Classés par ordre de grandeur)



2. Module d'un nombre complexe :

Définition : On appelle **module** du nombre complexe $z = a + bi$ et on note $|z|$, le nombre réel : $\sqrt{a^2 + b^2}$, c'est-à-dire :

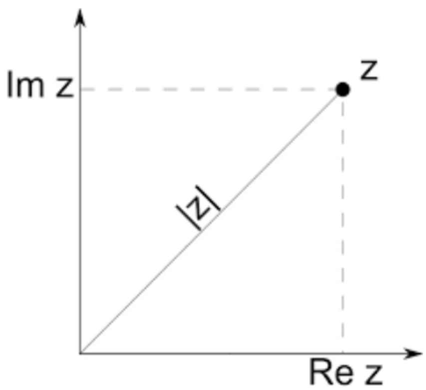
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

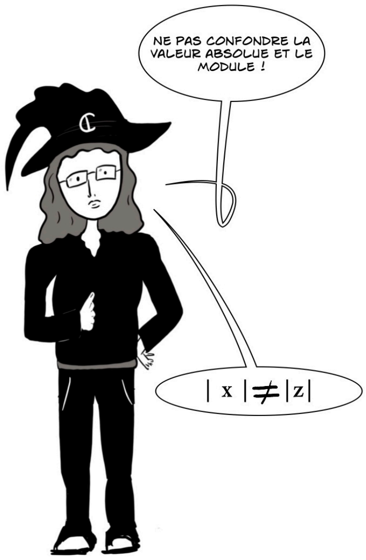
Exemples :

- $|3 - 4i| =$
- $|i| =$
- $|2| =$

Interprétation géométrique du module :

Le module de z représente donc





Propriétés :

1) $|z| = 0 \iff z = 0$
2) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$, où λ est un nombre réel
3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ *le module d'un produit vaut le produit des modules*
4) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ *le module d'un quotient vaut le quotient des modules*

   donc $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

Remarques :

- Si deux nombres complexes ont le même module, alors ils sont situés sur un même cercle de centre = et dont le rayon est le module en question.
- En général, le module d'une somme de deux nombres complexes ne vaut pas la somme des modules. Exemple :

- Le module dans $\mathbb{C}$ possède les mêmes propriétés que la valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

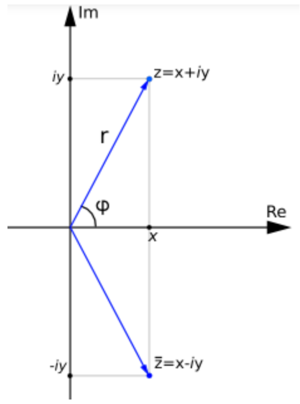
3. Conjugué d'un nombre complexe

Définition : On appelle ***conjugué*** du nombre complexe $z = a + bi$, et on note $\bar{z}$ le nombre complexe $a - bi$, c'est-à-dire :

$$\bar{z} = a - bi$$

Exemples :

- $z = 2 + i \qquad \bar{z} =$
- $z = -i \qquad \bar{z} =$
- $z = 2 \qquad \bar{z} =$



Interprétation géométrique du conjugué :

Propriétés :

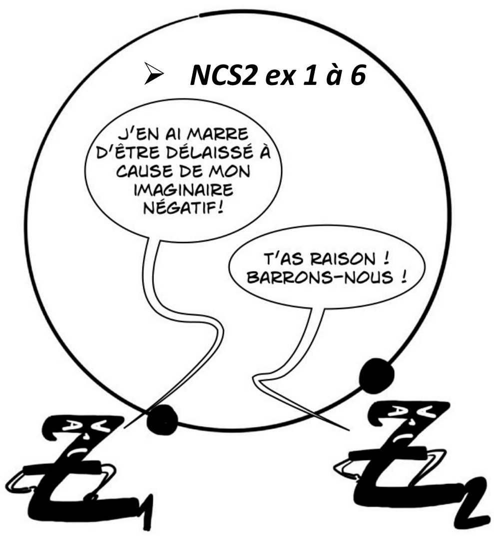
1) $\bar{\bar{z}} = z$ *le conjugué du conjugué vaut le nombre initial*
2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ *le conjugué d'une somme vaut la somme des conjugués*
3) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ *le conjugué d'une différence vaut la différence des conjugués*
4) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ *le conjugué d'un produit vaut le produit des conjugués*
5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ *le conjugué d'un quotient vaut le quotient des conjugués*
6) $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = |\bar{z}| = |-z|$ *lien entre nombre complexe, module et conjugué*
   donc $z\bar{z} = |z|^2$

Conséquence :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \qquad \textit{ou alors :} \qquad \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Exemple : $\frac{1}{2+3i} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$

➢ ***NCS2 ex 1 à 6***



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Conjugué

Le *conjugué* de z est $\bar{z} = a - b\,i = r\,\text{cis}(-\varphi) = r\,e^{-i\varphi}$.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\;\overline{z_2}$	$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$
$\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$	$\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$	$\bar{\bar{z}} = z$	$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\lvert z\rvert^2}$

4. Résolution d'une équation de degré 1

Considérons l'équation : $z(2+3i)+(5+i)=3z-2i$

Il est possible de procéder comme dans $\mathbb{R}$ pour la résolution de cette équation.
(c'est-à-dire isoler l'inconnue à l'aide des quatre opérations uniquement.)

$$z(2+3i)+(5+i)=3z-2i$$

$$\Leftrightarrow z(2+3i)-3z=-(5+i)-2i$$

$$\Leftrightarrow z(-1+3i)=-5-3i$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{-5-3i}{-1+3i}$$

$$\Leftrightarrow z=(-5-3i)\cdot\frac{-1-3i}{10}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{5+15i}{10}+\frac{3i-9}{10}$$

$$\Leftrightarrow z=-\frac{2}{5}+\frac{9}{5}i$$

$$S=\left\{-\frac{2}{5}+\frac{9}{5}i\right\}$$

Remarque : une équation faisant intervenir l'inconnue z est son conjugué $\bar{z}$ n'est pas une équation polynômiale. *(Il y a plus qu'une inconnue)*
Pour les résoudre, il faut décomposer l'inconnue z en $x+iy$.

Exemple : $z+2\bar{z}=1-i$

$$\Leftrightarrow (x+iy)+2(x-iy)=1-i$$

$$\Leftrightarrow 3x-iy=1-i$$

$$\Leftrightarrow 3x=1\ et\ y=1$$

$$S=\left\{\frac{1}{3}+i\right\}$$

➢ ***NCS2 ex 7***

5. Règles de calcul dans $\mathbb{C}$ et racine carrée d'un nombre complexe

La distributivité, valable dans $\mathbb{R}$, reste valable dans $\mathbb{C}$, à condition de remplacer i^2 par -1.
Exemples :

$$(2-3i)(5+4i) =$$

$$(2-3i)^3 =$$

$$\frac{1+2i}{2-i} =$$

Racines carrées d'un nombre complexe :

Nous ne parlons pas ici de la « fonction racine carrée » dont le symbole est $\sqrt{}$.
Ce que nous appelons racine de z est un nombre dont le carré est égal à z.
Il n'y a pas de symbole pour désigner les racines d'un nombre.
La même distinction se fait dans $\mathbb{R}$: les racines de 49 sont 7 et -7 alors que $\sqrt{49} = 7$.

Cherchons, par exemple, le(s) nombre(s) z qui élevé(s) au carré donne $15+8i$.

$$z = \sqrt{15+8i} \Longrightarrow z^2 = 15+8i$$

Posons : $\boldsymbol{z = x + yi}$, cherchons $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$.
On a :

$$z^2 = (x+yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = (x^2-y^2) + (2xy)i$$

On utilise la propriété :

$$|z|^2 = |z^2|$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ 2xy = 8 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que x et y ont le même signe.

Résolvons :
$L_1 + L_3$: $2x^2 = 32$ donc $x = 4$ ou $x = -4$

dans L_2 : $2 \cdot 4 \cdot y = 8 \Longrightarrow y = 1$ ou $2 \cdot (-4) \cdot y = 8 \Longrightarrow y = -1$

Pour finir : $15 + 8i$ a deux racines carrées : $4 + i$ et $-4 - i$.

Remarque : En généralisant la méthode ci-dessus, on peut démontrer que :

Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées.

Théorème : Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées.

Signification : Il existe deux complexes opposés dont le carré est égal à z, comme dans $\mathbb{R}$.

Preuve : **Considérons un nombre complexe quelconque $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.**
Il s'agit de déterminer les réels x et y tels que $(x+iy)^2 = z$

On a : $(x+iy)^2 = z \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a+ib \quad \Leftrightarrow x^2 + i2xy - y^2 = a + ib$

Cette équation entre complexes se ramène à un système d'équations dans $\mathbb{R}$ **:**

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2y^2 = \dfrac{b^2}{4} \end{cases}$$

Par substitution, on obtient :

$$(y^2 + a)y^2 = \frac{b^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad y^4 + ay^2 - \frac{b^2}{4} = 0 \quad \textit{qui est une équation bicarrée}$$

$$y^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2} \quad \textit{comme } y \in \mathbb{R}, \boldsymbol{y^2 \geq 0}$$

Il faut donc exclure la solution négative.

Nous gardons donc : $y^2 = \frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ car $\sqrt{a^2+b^2} \geq -a$ Que a soit positif ou pas.

Calcul de x : $x^2 = y^2 + a = \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

On en déduit que : $x = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$ *et* $y = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$

Il reste encore à déterminer les signes de x et y.

Comme $2xy = b$, il faut que xy ait le même signe que b.

<table>
<tr><td>Si $\boldsymbol{b > 0}$</td><td colspan="2">• x et y positifs : $z_1 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$
• x et y négatifs : $z_2 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$</td></tr>
<tr><td>Si $\boldsymbol{b < 0}$</td><td colspan="2">• x et y de signes opposés : $z_1 = -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$
• x et y de signes opposés : $z_2 = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Si $\boldsymbol{b = 0}$</td><td colspan="2">Dans ce cas, $z = a \in \mathbb{R}$ *le complexe est un réel*</td></tr>
<tr><td>Si $\boldsymbol{a > 0}$</td><td>Il s'agit de calculer les racines d'un réel positif, rien de nouveau : $z_1 = \sqrt{a}$ et $z_2 = -\sqrt{a}$</td></tr>
<tr><td>Si $\boldsymbol{a = 0}$</td><td>0 est la racine de $z = 0$, rien de nouveau : $z_1 = z_2 = 0$</td></tr>
<tr><td>Si $\boldsymbol{a < 0}$</td><td>$z_1 = i\sqrt{-a}$ *et* $z_2 = -i\sqrt{-a}$</td></tr>
</table>

Finalement, tout nombre complexe non nul possède deux racines carrées opposées.

Remarque :

Nous venons de voir que, dans $\mathbb{C}$, il est possible d'extraire des racines carrées de nombres négatifs :
Si $a \in \mathbb{R}_-^*$, les racines de a sont $\pm i\sqrt{-a}$.

Nous pourrions être tentés de définir une « fonction racine carrée » dans $\mathbb{R}_-$ en posant $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$.

Il faut cependant rester prudent !

$$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-5} = i\sqrt{5} \cdot i\sqrt{5} = i^2\left(\sqrt{5}\right)^2 = -5$$

mais

$$\sqrt{-5(-5)} = \sqrt{25} = 5$$

La propriété $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ qui est vraie lorsque a et b sont positifs ne l'est pas lorsqu'ils sont tous deux négatifs.

Nous n'utiliserons pas, dans ce cours, la « fonction racine carrée » ailleurs que dans $\mathbb{R}_+$.

Propriété : $|z|^2 = |z^2|$

Preuve : $z = a + bi$
On a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc $|z|^2 = a^2 + b^2$
Et : $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$
$|z^2| = \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2} = \sqrt{a^4 - 2a^2b^2 - b^4 + 4a^2b^2} = \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4} = \sqrt{(a^2 + b^2)^2}$
Donc : $|z|^2 = a^2 + b^2$

➢ ***NCS3 ex 2 et 3***

Équation du 2e degré dans $\mathbb{C}$:

Exemple : Résolvons $3z^2 - 5z + 8 = 0$

Calculons :

$$\Delta = 25 - 4 \cdot 24 = -71$$

On a :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-71} = i\sqrt{71}$$

On a donc :

$$z = \frac{5 \pm \sqrt{71}i}{6}$$

$$S = \left\{\frac{5 \pm \sqrt{71}i}{6}\right\}$$

➢ ***NCS3 ex 3 à 7***

Équation de degré 3 :

Exemple 1 : Considérons l'équation : $\boldsymbol{x^3 = 6x + 40}$

En appliquant la formule : $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ à cette équation,

nous obtenons : $x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ (voir NCS4 ex 3)

Sous cette forme, la solution n'est pas réduite.

Il est possible d'extraire les racines cubiques et de montrer que cette solution se ramène à :

$$x = \sqrt[3]{\left(2 + \sqrt{2}\right)^3} + \sqrt[3]{\left(2 - \sqrt{2}\right)^3} = 4 \qquad (voir\ NCS4\ ex\ 4)$$

$x = 4$ est une solution de $x^3 = 6x + 40$ donc de $x^3 - 6x - 40 = 0$

Par division, l'équation $x^3 - 6x - 40 = 0$ se ramène à $(x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0$

Les deux autres solutions de notre équation sont donc : $x = -2 \pm i\sqrt{6}$ $\;(voir\ NCS4\ ex\ 4)$

Remarques :

Dans la formule : $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$

Le nombre $\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ est appelé discriminant de l'équation.

Même si ce nombre est négatif, la solution x est un nombre réel. (voir exemple ci-dessous)

Exemple 2 :

Considérons l'équation : $x^3 = 51x + 104$

La formule de Tartaglia- Cardan nous donne :

$$x = \sqrt[3]{52 + \sqrt{52^2 - 17^2}} + \sqrt[3]{52 - \sqrt{52^2 - 17^3}} = \sqrt[3]{52 - \sqrt{-2209}} + \sqrt[3]{52 - \sqrt{-2209}}$$

$$= \sqrt[3]{52 + 47i} + \sqrt[3]{52 - 47i}$$

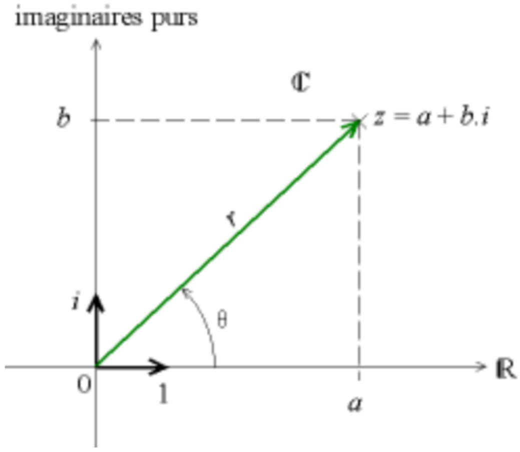
En remarquant que : $(4 \pm i)^3 = 52 \pm 47i$, on a : $x = (4 + i) + (4 - i) = 8$

Au 16e siècle et même bien plus tard, il était inconcevable de calculer une véritable (réelle) solution de l'équation en utilisant des nombres qui n'en étaient pas. (Nombres imaginaires) C'est depuis ce constat que les mathématiciens ont cherché à cerner ces quantités imaginaires, à savoir si ces objets étaient véritablement des nombres et à déterminer si l'usage de ces « nombres » était mathématiquement correct. Ce travail a duré trois siècles.

➢ ***NCS4***

6. Écriture trigonométrique d’un nombre complexe

On considère un nombre complexe : $z = a + bi$, représenté dans le repère ci-dessous.



Nous avons vu que z peut être repéré par le couple $(a; b)$.

Il est également possible de repérer z par :
L’angle θ que le segment Oz forme avec l’axe horizontal ainsi que la longueur $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ du segment Oz.

En effet : *(trigonométrique dans le triangle rectangle)*

- $\cos(\theta) = \frac{a}{r} \Rightarrow a = r \cdot \cos(\theta)$
- $\sin(\theta) = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin(\theta)$

Comme $z = a + bi$, il vient : $z = r \cdot \cos(\theta) + r \cdot \sin(\theta)\, i = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i)$

Définition :

$z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i)$ est appelé ***forme trigonométrique*** du nombre complexe z.
r est le module de z
θ est appelé ***argument*** de z, c’est un angle orienté, exprimé en radians.

Notation : $Arg(z) = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$
Parmi les arguments de z, il en existe un unique qui appartient à l’intervalle $[0; 2\pi[$. Cet angle est appelé ***argument principal*** de z.

Transformations :

Forme algébrique à forme trigonométrique	**Forme trigonométrique à forme algébrique**
Donné : $z = a + bi$ Cherché : r et θ Relations : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$	Donné : $z = r(\cos(\theta) + \sin(\theta)\, i)$ Cherché : a et b Relations : $a = r \cdot \cos(\theta)$ $b = r \cdot \sin(\theta)$

Exemples :

a) Écrire $z = 1 + \sqrt{3}i$ sous forme trigonométrique :

b) Écrire $z = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) i$ sous forme algébrique :

Remarques :

- Si deux complexes ont même argument, alors ils sont situés sur une même demi-droite d'origine O.
- $z = 0$ est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.
- L'argument principal est l'argument contenu dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

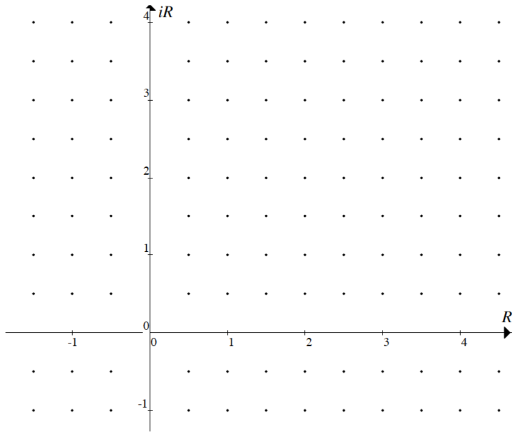
Propriétés de l'argument : $z \in \mathbb{C}, z = a + bi\,,\ Arg(z) = \theta$

1) $Arg(-z) = Arg(z) + \pi$
2) $Arg(\bar{z}) = -Arg(z)$
3) $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$ c'est-à-dire : $\tan\big(Arg(z)\big) = \frac{Im(z)}{Re(z)}$
4) $Re(z) = |z|\cos(\theta)$
5) $Im(z) = |z|\sin(\theta)$

Multiplication de deux nombres complexes :

Cette représentation trigonométrique des nombres va nous permettre de trouver une **interprétation géométrique** de la multiplication dans ℂ.

Exemple : $(2+i)(1+i) =$



Considérons deux nombres complexes :

$$z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\, i) \qquad z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\, i)$$

Calculons :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\, i) r_2(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\, i) = \\ &= (\mathrm{r}_1\cos(\theta_1) + \mathrm{r}_1\sin(\theta_1)\, i)(\mathrm{r}_2\cos(\theta_2) + r_2\sin(\theta_2)\, i) \\ &= \mathrm{r}_1\cos(\theta_1)\,\mathrm{r}_2\cos(\theta_2) + \mathrm{r}_1\cos(\theta_1)\, r_2\sin(\theta_2)\, i + \mathrm{r}_1\sin(\theta_1)\, i\,\mathrm{r}_2\cos(\theta_2) \\ &\qquad + \mathrm{r}_1\sin(\theta_1)\, i r_2\sin(\theta_2)\, i \\ &= r_1 r_2[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))i] \\ &= r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2)) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i) \end{aligned}$$

Comme $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2)) + \sin(\theta_1 + \theta_2)i)$

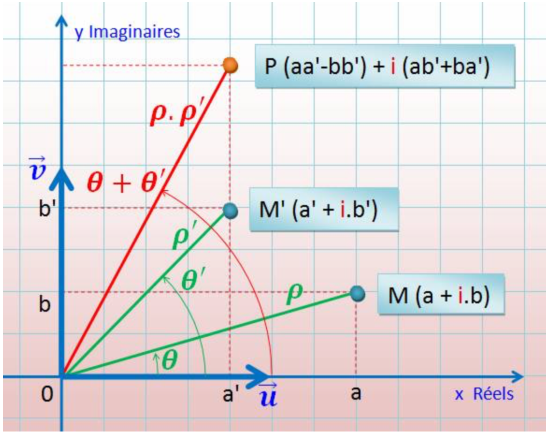
et connaissant l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe, on en déduit :

1) Le module de $z_1 z_2$ est $r_1 r_2$, c'est-à-dire : $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, ce que l'on savait déjà
2) L'argument de $z_1 z_2$ est $\theta_1 + \theta_2$, c'est-à-dire : $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

Illustration de $z_1 z_2$:

Pour représenter $z_1 z_2$:

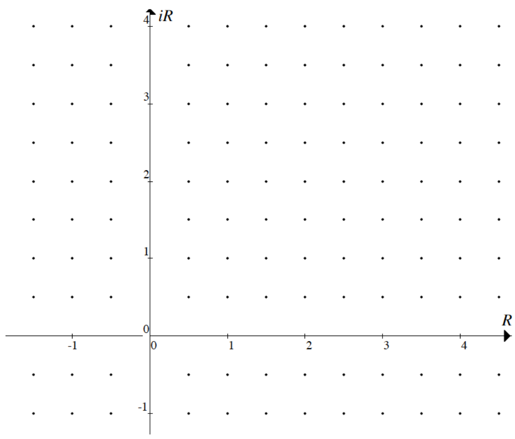
(1) Ajouter les 2 arguments $(\theta_1 + \theta_2)$
(2) Multiplier les 2 modules $(r_1 r_2)$
(3) Tracer le cercle centré en O de rayon $r_1\ r_2$
(4) L'intersection entre ce cercle et l'angle $\theta_1 + \theta_2$ est $z_1 z_2$.



Donc $z_1 z_2$ s'obtient en appliquant à z_1 une homothétie linéaire de rapport $|z_2|$ suivie d'une rotation linéaire d'angle $Arg(z_2)$.

Nouveauté : « pour multiplier, il faut aussi tourner. »

Exemple : Illustrer : $(2 + i)(1 + i) = 2 + 2i + i - i = 1 + 3i$



Remarque :

Cette nouvelle vision de la multiplication permet d'expliquer la « règle des signes » dans $\mathbb{R}$, règle qui pouvait être perçue comme une simple convention jusqu'ici.
En effet, en multipliant deux réels négatifs (donc argument π) nous obtenons un produit dont l'argument est $\pi + \pi = 2\pi$.
Ce produit est donc un réel positif.

Nous savons enfin pourquoi « les ennemis de nos ennemis sont nos amis ».

➢ ***NCS5 exercices 1 & 2***

7. Écriture exponentielle d'un nombre complexe et formule de Moivre :

Compte tenu de l'écriture trigonométrique du produit de deux nombres complexes, le mathématicien Euler a eu l'idée de poser l'égalité suivante :

$$\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i = e^{i\varphi}$$

appelée **formule d'Euler**

Ce sont les développements en série qui ont suggéré la définition de la fonction exponentielle dans les complexes. Pour avoir une idée de cela, nous pouvons nous référer au formulaire CRM :

$f(x)$	Développement de f
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^k}{k!} + \ldots$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots$

Ces sommes sont formées d'une infinité de termes et les limites de ces sommes correspondent aux fonctions données dans les membres de gauche de ces égalités

Calculons le développement correspondant à $\cos(x) + isin(x)$:

$$\cos(x) + isin(x) = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + + \frac{ix^5}{5!} + \frac{ix^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

puis celui de e^{ix} :

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \cdots$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nous constatons donc que $\cos(x) + isin(x) = e^{ix}$

Rappel :
Si $z \neq 0$ et si $Arg(z) = \alpha$, la notation trigonométrique de z est : $z = |z|\big(\cos(\alpha) + isin(\alpha)\big)$

Conséquence :
Comme $\cos(x) + isin(x) = e^{ix}$, nous obtenons : $z = |z|\big(\cos(\alpha) + isin(\alpha)\big) = |z|e^{i\alpha}$.

Définition : La notation ou **forme exponentielle** de z est, pour tout z non nul :
$\boldsymbol{z = |z| \cdot e^{i\alpha}}$, où $Arg(z) = \alpha$

Exemple : Vérifier que l'écriture exponentielle de $z = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3} i$ est $e^{0,62i}$

Avec cette écriture, pas utilisable par les calculatrices, on peut dégager de nombreuses propriétés des nombres complexes.

On retrouve l'écriture trigonométrique du produit de deux nombres complexes :

$$z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1)\, i)$$
$$z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_2)\, i)$$

Ainsi :

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \quad et \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

On a :

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} \quad = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \sin(\varphi_1+\varphi_2)\, i)$$

Propriétés :

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$ donc $Arg(z_1 z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$
2) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1 e^{i\varphi_1}} = \frac{1}{r_1} e^{i(-\varphi_1)}$ $donc\ Arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -Arg(z_1)\ et\ \left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|}$
3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$ donc $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)\ et\ \left|\frac{z_1}{z_{12}}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
4) $(z_1)^n = \left(|z_1| e^{i\varphi_1}\right)^n = |z_1|^n e^{i\varphi n_1}$ donc $Arg(z_1^n) = nArg(z_1)\ et\ |z_1|^n = |z_1^n|$

La propriété 4) S'appelle la **formule de Moivre** et peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\cos(n\varphi_1) + \sin(n\varphi_1)\, i = \left((\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1))i\right)^n}$$

Preuve : $\cos(n\varphi_1) + \sin(n\varphi_1)\, i = e^{in\varphi_1} = \left(e^{i\varphi_1}\right)^n = \left((\cos(\varphi_1) + \sin(\varphi_1))i\right)^n$

La formule de Moivre permet d'établir des relations trigonométriques, en utilisant le fait que lorsque deux nombres complexes sont égaux, leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

A titre d'**exemple**, établissons une formule permettant de calculer $\cos(2\varphi)$ et $\sin(2\varphi)$:

$$\cos(2\varphi) + \sin(2\varphi)\, i = (\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i)^2 = cos^2(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, i - sin^2(\varphi)$$

On égalise les parties réelles :

$$\cos(2\varphi) = cos^2(\varphi) - sin^2(\varphi) = 1 - sin^2(\varphi) - sin^2(\varphi) = 1 - 2sin^2(\varphi)$$

On égalise les parties imaginaires : $\sin(2\varphi) = 2\cos(\varphi)\sin(\varphi)$

Il est également possible de **linéariser** une fonction trigonométrique, c'est-à-dire d'exprimer une fonction trigonométrique comportant au moins une puissance en fonction de fonctions trigonométriques ne comportant pas de puissances.

A titre d'**exemple**, linéarisons $cos^4(x)$ en utilisant les deux relations suivantes :

(1) $\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\, i = e^{i\varphi}$

(2) $cos(\varphi) - \sin(\varphi)\, i = e^{-i\varphi}$ qui vient de $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ $et \sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

Cette nouvelle notation, en relation avec la notation trigonométrique, nous permet d'aboutir à deux formules appelées **formules d'Euler** :

(1)+(2) donne : $2\cos(\varphi) = e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}$ donc : $\boxed{\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}}$

(1)-(2) donne $2\sin(\varphi)\, i = e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}$ donc : $\boxed{\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}}$

On peut donc écrire : $cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$$= \frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4 + 4\left(e^{ix}\right)^3 e^{-ix} + 6\left(e^{ix}\right)^2\left(e^{-ix}\right)^2 + 4e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^3 + \left(e^{-ix}\right)^4\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6\right) = \frac{1}{16}(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6)$$

Finalement : $cos^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$

La conséquence :

Dans la formule $\cos(x) + isin(x) = e^{ix}$, en choisissant $x = \pi$, nous obtenons :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + isin(\pi) = -1$$

D'où la célèbre égalité (élaborée par Euler) :

$$\boxed{\boldsymbol{e^{i\pi} + 1 = 0}}$$

- Le 1 et le 0 qui représentent le fondement du calcul algébrique, (éléments neutres de l'addition et de la multiplication),
- Le π connu depuis des millénaires en géométrie,
- Le e que nous retrouvons en analyse (base du logarithme naturel, primitive de $1/x$)
- Et finalement le i, à la base des nombres complexes sont les cinq nombres clés des mathématiques.

Il est étonnant de les voir liés par une égalité aussi simple.

La pureté de cette formule est d'autant plus belle qu'elle ne sert pas à calculer quoi que ce soit, elle ne contient aucune inconnue ni aucun paramètre. Elle est cependant connue de tous les mathématiciens depuis qu'elle a été trouvée.

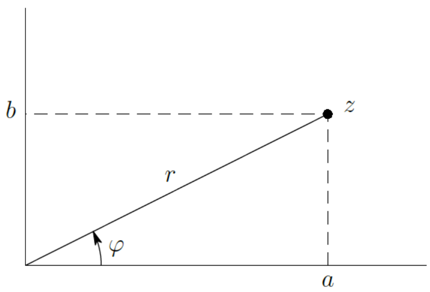
Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Nombres complexes

On note i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Forme algébrique	$z = a + b\,i$ où $a, b \in \mathbb{R}$
	a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$
	b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$
Forme trigonométrique	$z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$
	r est le *module* de z, noté $\lvert z\rvert$
	φ est l'*argument* de z, noté $\arg(z)$
Forme exponentielle	$z = r\,e^{i\varphi}$

Relations entre formes algébrique, trigonométrique et exponentielle



$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$
$\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$a = r\cos(\varphi)$	$b = r\sin(\varphi)$
Formule d'Euler	$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Opérations

Forme algébrique	Formes trigonométrique et exponentielle
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$	
$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$	$z_1 z_2 = r_1 r_2\,\mathrm{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \dfrac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2}i$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\,\mathrm{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}i$	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{cis}(-\varphi) = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\varphi}$
	$z^n = r^n\,\mathrm{cis}(n\varphi) = r^n\,e^{in\varphi}$

Formule de Moivre

$$\boxed{\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

➢ **NCS5**

8. Racines de l'unité :

But 1 : $\boxed{\text{Trouver toutes les solutions complexes de l'équation } z^n = 1, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.}$

Vocabulaire : Toute solution de l'équation $z^n = 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est appelée ***racine de l'unité***.

Exemple : calculons les racines 3e de l'unité, c'est-é-dire : les solutions de l'équation $z^3 = 1$

Tout d'abord, avons :

$$|z^3| = |z|^3 = |1| = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt[3]{1} = r$$

Nous pouvons ensuite utiliser l'écriture exponentielle et trigonométrique :

$$z^3 = \left(e^{\varphi i}\right)^3 = e^{3\varphi i} = \cos(3\varphi) + \sin(3\varphi)\, i$$

Ainsi :

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(3\varphi) = 1 \\ \sin(3\varphi) = 0 \end{cases}$$

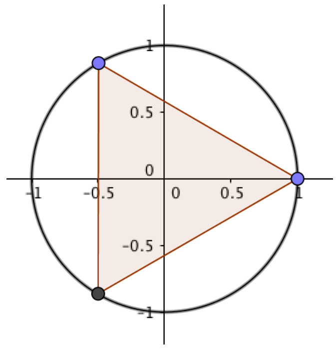
De $\cos(3\varphi) = 1$, on obtient : $3\varphi = 2k\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{2k\pi}{3}$

Vérifions dans $\sin(3\varphi) = 0$: $\sin\left(3\frac{2k\pi}{3}\right) \overset{?}{=} 0$ ☺ Ok.

Réponse : $z = e^{\frac{2k\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) i \,, k \in \mathbb{Z}$

Question : Combien y a-t-il de solutions ?

1) $k = 0\,, z_1 = 1 + 0i = 1$
2) $k = 1, z_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} =: w$
3) $k = 2, z_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}} = w^2$
4) $k = 3, z_4 = e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi)\, i = 1$



Réponse : Il y a donc 3 solutions : $1, w, w^2$

Théorème : Les racines $n-èmes$ de l'unité sont au nombre de n.

Ce sont : $1, w, w^2, \ldots, w^{n-1}$, où $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) i = e^{\frac{2\pi}{n}i}$

Ces n racines représentent les n sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrits dans un cercle de rayon 1 et centré en $(0;0)$

Exemple : Résoudre $z^5 = 1$

Solutions : $1; w = e^{\frac{2\pi}{5}i}, w^2 = e^{\frac{4\pi}{5}i}, w^3 = e^{\frac{6\pi}{5}i}, w^4 = e^{\frac{8\pi}{5}i}$

But 2 : $\boxed{\text{Trouver toutes les solutions complexes de l'équation } z^n = z_0, \text{où } n \in \mathbb{N}^*}$

Méthode : relier l'équation $z^n = z_0$ au théorème à peine établi.

Ainsi : $z^n = z_0 \Leftrightarrow \frac{z^n}{z_0} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt[n]{z_0}}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{\sqrt[n]{z_0}} = e^{\frac{2k\pi}{n}i} \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{z_0}e^{\frac{2k\pi}{n}i}$

En conclusion : $\boxed{z^n = z_0 \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{z_0}e^{\frac{2k\pi}{n}i}}$

En d'autres termes : pour trouver toutes les racines $n-ièmes$ d'un nombre complexe, il suffit de trouver l'une d'entre-elles et de la multiplier par toutes les racines $n-ièmes$ de l'unité.

Exemple : Calculer toutes les racines $5-ièmes$ de $z_0 = -2 + 2i$

$$\sqrt[5]{-2+2i} = z_0 \quad z_0^5 = -2 + 2i$$

On écrit :

$$-2 + 2i = \left(re^{\varphi i}\right)^5 = r^5 e^{5\varphi i} = r^5(\cos(5\varphi) + \sin(5\varphi)\, i) = r^5\cos(5\varphi) + r^5\sin(5\varphi)i$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} r^5\cos(5\varphi) = -2 \\ r^5\sin(5\varphi) = 2 \end{cases}$$

Or : $|z_0^5| = |z_0|^5 = |-2+2i| = \sqrt{8} \quad \Rightarrow |z_0|^5 = \sqrt{8} \Rightarrow |z_0| = \sqrt[10]{8} \Rightarrow r = \sqrt[10]{8}$

Retour au système

$$\begin{cases} \sqrt{8}\cos(5\varphi) = -2 \\ \sqrt{8}\sin(5\varphi) = 2 \end{cases}$$

Résolvons $\sqrt{8}\cos(5\varphi) = -2$:

$$\cos(5\varphi) = -\frac{2}{\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 5\varphi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{20} + \frac{k2\pi}{5}$$

Vérifions dans $\sqrt{8}\sin(5\varphi) = 2$:

$$\sqrt{8}\sin\left(\frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) = 2 \qquad ok\,!$$

Réponse :

$$z = \sqrt[10]{8}\cdot e^{\frac{3\pi}{20}i}\cdot e^{\frac{k2\pi}{5}i} = \sqrt[10]{8}\cdot e^{\left(\frac{3\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5\pi}\right)i}$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Racines n-ièmes

On note $z = r\,\text{cis}(\varphi)$ un nombre complexe non nul.

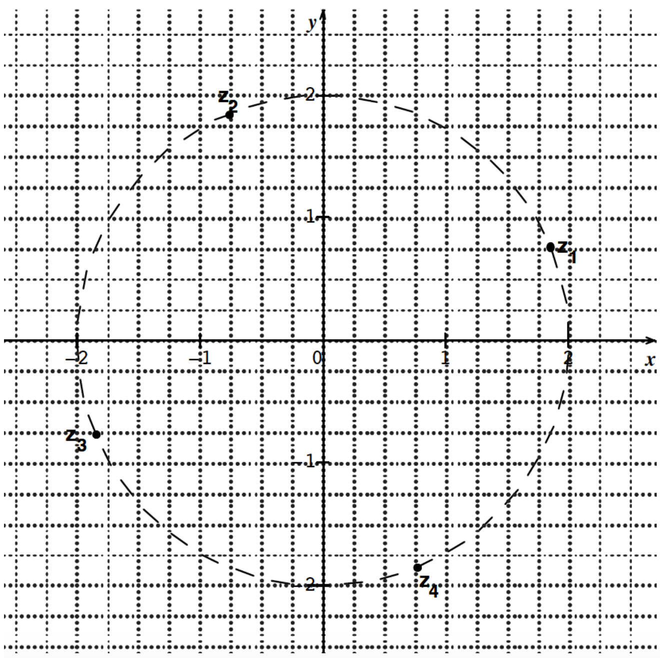
L'équation $w^n = z, n \in \mathbb{N}^*$, possède n solutions distinctes :

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\ \text{cis}\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

➢ ***NCS6***

Exemple : Résoudre $z^4 = 16i$

Les 4 solutions de l'équation sont les sommets d'un carré :

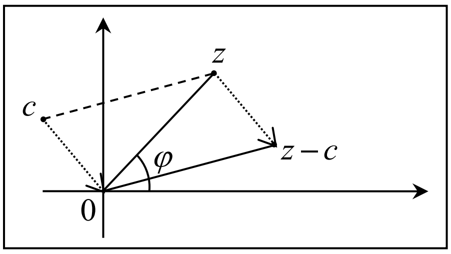


Exemple : l'écriture trigonométrique de z_2 est : $z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)i\right)$

9. Cercles et droites[2]

La géométrie, dite analytique, peut être remplacée (avantageusement) par la géométrie "complexe". Un nombre complexe peut se représenter par un point dans un plan muni d'un repère orthonormé. Par abus de langage, on confond souvent un nombre complexe et son image dans le plan.

Le module de z, noté $|z|$, est la distance de 0 à z. La distance entre z et c est égale à la distance entre 0 et $z-c$. Cette distance est égale à $|z-c|$.



L'argument φ d'un nombre complexe z est compris entre la droite $\mathbb{R}$ et la demi-droite passant par 0 et z.

De plus, $\cos(\varphi) = \dfrac{a}{|z|}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{|z|}$.

Propriétés

1) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$
2) $z + \overline{z} = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$
3) $z - \overline{z} = 2bi = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
4) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
5) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
6) $\arg(z^n) = n \cdot \arg(z)$
7) $z = a + i \cdot 0 \Leftrightarrow \arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0$ (le nombre z peut être assimilé à un réel)
8) $z = 0 + ib \Leftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0$ (le nombre z est un imaginaire pur)

Démonstration de 1) : ($z = a + ib$ et $\overline{z} = a - ib$) $\Rightarrow z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

[2] Ce paragraphe est issu du cours de M. Catenazzi

9.1 Cercle de centre c et de rayon r

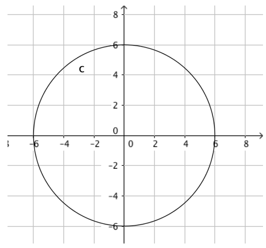
Le cercle de centre 0 de rayon r
($0 \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des points dont la distance à 0 est égale à r.

$$C = \left\{ z \middle| |z| = r \right\} = \left\{ z \middle| |z|^2 = r^2 \right\} = \left\{ z \middle| z \cdot \overline{z} = r^2 \right\}$$

Le cercle de centre c et de rayon r ($c \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$) est l'ensemble des points dont la distance à c est égale à r.

$$C = \left\{ z \middle| |z-c| = r \right\} = \left\{ z \middle| |z-c|^2 = r^2 \right\} = \left\{ z \middle| (z-c)\cdot\left(\overline{z-c}\right) = r^2 \right\} = \left\{ z \middle| (z-c)\cdot(\overline{z}-\overline{c}) = r^2 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} - c\cdot\overline{z} - \overline{c}\cdot z + c\cdot\overline{c} - r^2 = 0 \right\}$$

Exemple 1 :



$C = \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} = 36 \right\}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 6.

Exemple 2 : Le cercle de centre 0 passant par l'affixe $3+4i$ est

$C = \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} = (3+4i)(3-4i) \right\} = \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} = 25 \right\}$.
Le rayon est égal au module de $3+4i$.

Exemple 3 : Le cercle de centre $(1-2i)$ et de rayon 3 a pour équation

$$C = \left\{ z \middle| |z-(1-2i)| = 3 \right\} = \left\{ z \middle| |z-(1-2i)|^2 = 3^2 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| (z-(1-2i))\left(\overline{z-(1-2i)}\right) = 9 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| (z-(1-2i))\left(\overline{z}-\overline{(1-2i)}\right) = 9 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| (z-(1-2i))(\overline{z}-(1+2i)) = 9 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} - (1-2i)\overline{z} - (1+2i)z + 5 - 9 = 0 \right\}$$
$$= \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} - (1-2i)\overline{z} - (1+2i)z - 4 = 0 \right\}$$

Exemple 4

L'ensemble $C = \left\{ z \middle| z\cdot\overline{z} - i\cdot\overline{z} + i\cdot z - 8 = 0 \right\}$ est le cercle de centre i et de rayon 3.

$z\cdot\overline{z} - i\cdot\overline{z} + i\cdot z - 8 = 0$

$(z-i)(\overline{z}+i) - (-i\cdot i) - 8 = 0$

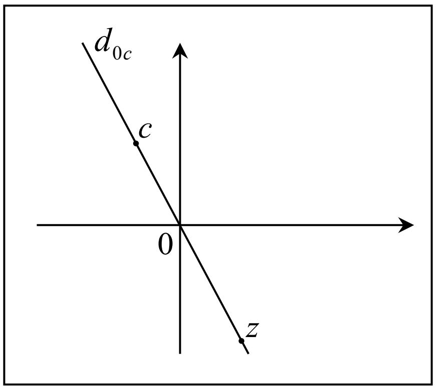
$(z-i)(\overline{z}+i) - (1) - 8 = 0$

$(z-i)(\overline{z}+i) = 9$

➢ ***NCS7 Exercice 1***

9.2 Droite passant par 0 et c, $0 \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}^*$

On note d_{0c} la droite passant par 0 et c.



$$
\begin{aligned}
z \in d_{0c} &\Leftrightarrow \arg(z) = \arg(c) + k\pi && \text{et } k = 0 \text{ ou } 1 \\
&\Leftrightarrow \arg(z) - \arg(c) = k\pi && \text{et } k = 0 \text{ ou } 1 \\
&\Leftrightarrow \arg\left(\frac{z}{c}\right) = k\pi && \text{et } k = 0 \text{ ou } 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{z}{c} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z}{c}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z}{c} - \overline{\left(\frac{z}{c}\right)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z}{c} - \frac{\bar{z}}{\bar{c}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z\bar{c} - c\bar{z}}{c\bar{c}} = 0 \\
&\Leftrightarrow z\bar{c} - c\bar{z} = 0
\end{aligned}
$$

Équation de la droite d_{0c} : $z \in d_{0c} \Leftrightarrow z\bar{c} - \bar{z}c = 0$

Exemple 1

Droite d_1 passant par 0 et $2-3i$:

$$z \in d_1 \Leftrightarrow z\overline{(2-3i)} - \bar{z}(2-3i) = 0 \Leftrightarrow z(2+3i) - \bar{z}(2-3i) = 0$$

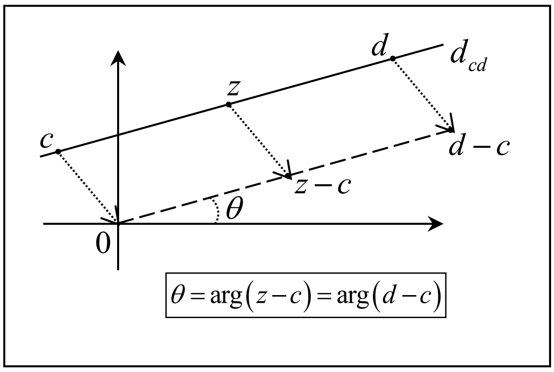
Exemple 2

L'équation $z(1-i) - \bar{z}(1+i) = 0$ est celle d'une droite passant par 0 et par $1+i$.

9.3 Droite passant par c et d, c et $d \in \mathbb{C}$ et $c \neq d$

($d-c$ est un vecteur directeur de la droite.)

On note d_{cd} la droite passant par c et d.



$$
\begin{aligned}
z \in d_{cd} &\Leftrightarrow \arg(z-c) = \arg(d-c) + k\pi \\
&\Leftrightarrow \frac{z-c}{d-c} \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{z-c}{d-c}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{z-c}{d-c} - \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{d}-\bar{c}} = 0 \\
&\Leftrightarrow (z-c)(\bar{d}-\bar{c}) - (\bar{z}-\bar{c})(d-c) = 0
\end{aligned}
$$

Après développement et simplification, on obtient : $\bar{z}(d-c) + c\bar{d} - z(\bar{d}-\bar{c}) - \bar{c}d = 0$

Équation de la droite d_{cd} : $z \in d_{cd} \Leftrightarrow \bar{z}(d-c) + c\bar{d} - z(\bar{d}-\bar{c}) - \bar{c}d = 0$

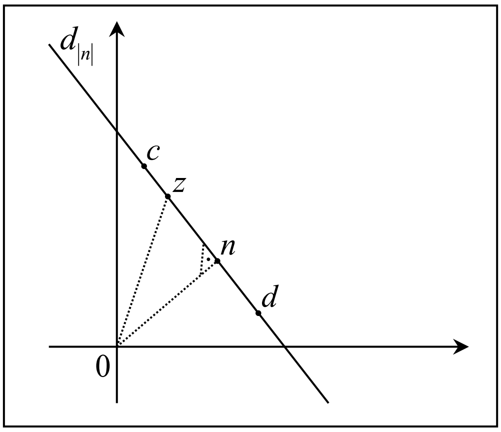
Exemple 3

Droite d_2 passant par $3i$ et 2 : $z \in d_2 \Leftrightarrow \bar{z}(2-3i) - z(2+3i) + 12i = 0$

L'équation peut encore s'écrire : $z \in d_2 \Leftrightarrow \bar{z}(2-3i) - z(2+3i) = -12i$

9.4 Droite dont la distance à 0 est $|n|$, $0 \in \mathbb{C}$ $et\ n \in d_{|n|} \subset \mathbb{C}$

(n est le point de la droite $d_{|n|}$ le plus proche de 0 .)



On applique le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} z \in d_{|n|} \Leftrightarrow \quad & |z|^2 = |n|^2 + |z-n|^2 \\ & z\bar{z} = n\bar{n} + (z-n)(\bar{z}-\bar{n}) \\ & z\bar{z} = n\bar{n} + z\bar{z} - n\bar{z} - \bar{n}z + n\bar{n} \\ & n\bar{z} + \bar{n}z = 2n\bar{n} \end{aligned}$$

Équation de la droite $d_{|n|}$: $z \in d_n \Leftrightarrow n\bar{z} + \bar{n}z = 2n\bar{n}$

Remarques

Par abus de langage, on parle de vecteur directeur et de vecteur normal à une droite.

Ainsi, $d-c$ est appelé vecteur directeur de la droite d_{cd} et n est appelé vecteur normal de la droite d .

Si on connaît un vecteur directeur, on obtient un vecteur normal en multipliant le vecteur directeur par le nombre i et vice-versa.

Exemple 4

Droite d_3 dont le point le plus proche de 0 est $-1+3i$:

$z \in d_3 \Leftrightarrow \bar{z}(-1+3i) + z(-1-3i) = 2(-1+3i)(-1-3i) \Leftrightarrow \bar{z}(-1+3i) + z(-1-3i) = 20$

Exemple 5

En reprenant la droite d_2 de l'exemple 3 et en la multipliant par i, on obtient :

$z \in d_2 \Leftrightarrow \bar{z}(2i-3i^2) - z(2i+3i^3) = -12i^2 \Leftrightarrow \bar{z}(3+2i) + z(3-2i) = 12$

Cette équation a la même forme que celle de l'exemple 4.

➢ ***NCS7 Exercice 2***

10. Transformations du plan complexe

Les transformations du plan peuvent être étudiées soit en utilisant uniquement des arguments de la géométrie d'Euclide et des constructions à la règle et au compas, soit en géométrie vectorielle dans le cadre des applications linéaires, soit en utilisant les nombres complexes et leurs représentations dans le plan.

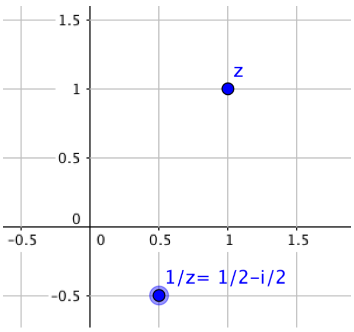
Il existe plusieurs transformations du plan complexe. En voici la liste :

1. Translations
2. Rotations de centre 0 et d'angle α
3. Rotations de centre c et d'angle α
4. Homothétie de centre 0 et de rapport λ
5. Homothétie de centre c et de rapport λ
6. Symétrie orthogonale d'axe $\mathbb{R}$
7. Symétrie d'axe d_{0c}
8. Symétrie d'axe d_{cd}
9. Inversion

Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'**inversion**.

Rappel : L'inverse de z est le nombre $\frac{1}{z}$.
Si $z = a + ib$ alors $\frac{1}{z} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Exemple : $z = 1 + i$ on a : $\frac{1}{z} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$



Remarque : Un nombre complexe (non réel) et son inverse n'ont pas la partie imaginaire du même signe. Ils se trouvent dans deux cadrans différents.

Rappel de propriétés de $\frac{1}{z}$:

i. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

ii. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$

Définition :

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
L'objet ∞ est appelé point à l'infini de $\overline{\mathbb{C}}$.

Inversion de $\overline{\mathbb{C}}$:

$$\boldsymbol{J: z \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{z}, si\ z \neq 0\ et\ z \neq \infty \\ \infty, si\ z = 0 \\ 0, si\ z = \infty \end{cases}}$$

J est une bijection de $\overline{\mathbb{C}}$ vers $\overline{\mathbb{C}}$. De plus ${}^{r}J = J$.

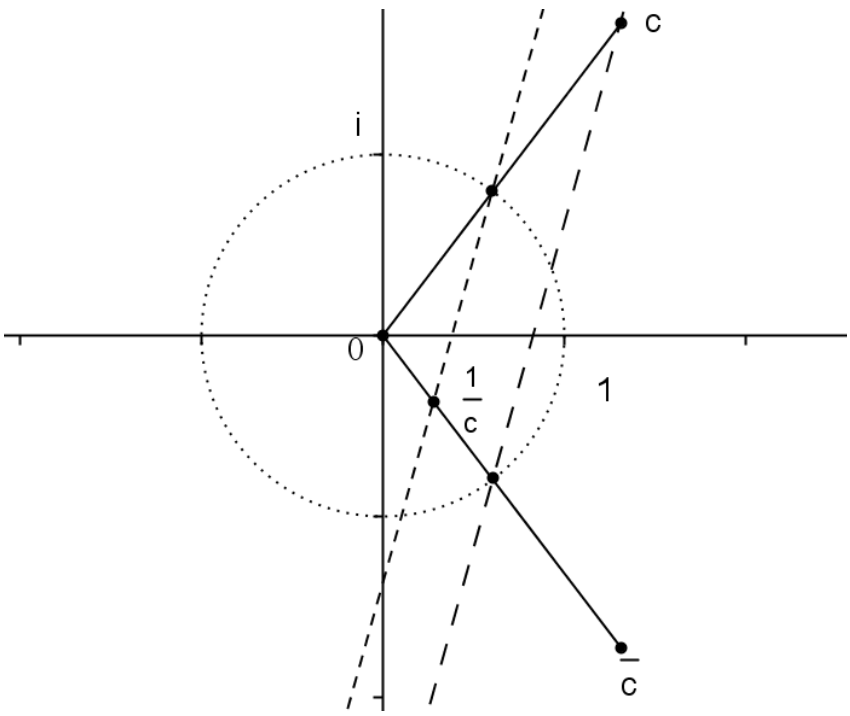
Nous allons maintenant étudier l'interprétation géométrique de cette définition.

10.1 Image d'un point par l'inversion :

Marche à suivre :

1) Représenter c
2) Représenter $\bar{c}$ (symétrie par rapport à l'axe réel)
3) Déterminer le point d'intersection entre la droite de 0 à $\bar{c}$ et et le cercle de rayon 1 et centré en 0.
4) Tracer la droite entre le point c et le point déterminé au point 3).
5) Déterminer le point d'intersection entre la droite de 0 à c et et le cercle de rayon 1 et centré en 0.
6) Déterminer la droite parallèle à celle du point 4) passant par le point déterminé en 5).
7) Le point $\frac{1}{c}$ se trouve à l'intersection de la droite allant de 0 à $\bar{c}$ et la droite du point 6).

Pourquoi est-ce que cela marche ?
On observe que l'on peut appliquer le théorème de Thalès, on se trouve avec deux triangles semblables avec le sommet O en commun et dont chacun a un côté égal à 1 (grâce au cercle de rayon 1): $\frac{1}{c} = \frac{1/c}{1}$



10.2 Image d'une droite par l'inversion

a) Droite d_{0c} passant par 0

On a vu précédemment l'équation d'une droite qui contient 0 et c.

$$z \in d_{0c} \Leftrightarrow \overline{c}\,z - c\,\overline{z} = 0$$

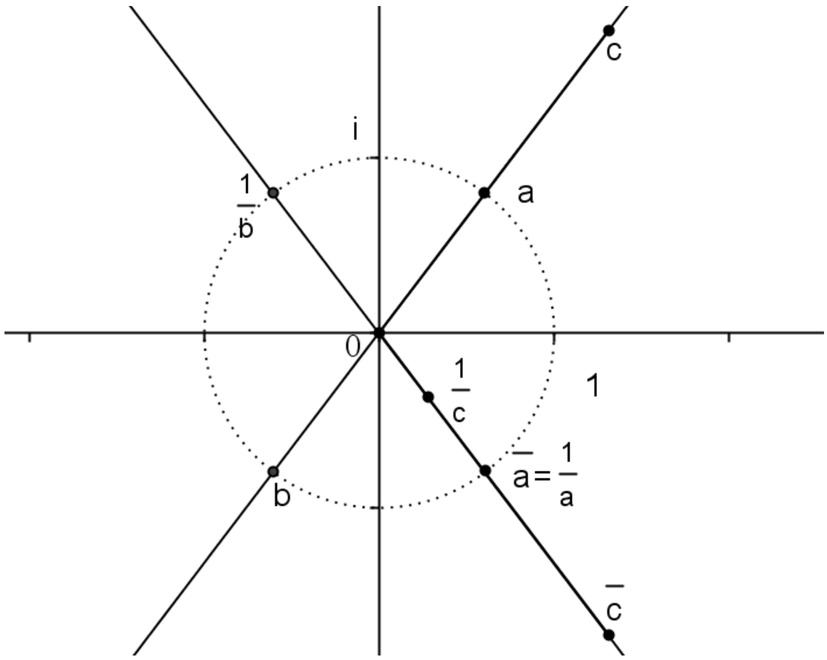
On pose $z' = \dfrac{1}{z}$. On en déduit $z = \dfrac{1}{z'}$.

On remplace dans l'équation de la droite d_{0c} : $\dfrac{1}{\overline{z}'}c - \dfrac{1}{z'}\overline{c} = 0$.

On multiplie par $z'\overline{z}'$: $z'c - \overline{z}'\overline{c} = 0$.

De plus, $0 \in d_{0c} \Rightarrow \infty \in J\left(d_{0c}\right)$ et $\infty \in d_{0c} \Rightarrow 0 \in J\left(d_{0c}\right)$.

Le nombre z' vérifie l'équation d'une droite qui passe par 0 et par $\overline{c}$.



Marche à suivre :

1) Représenter la droite à inverser.
2) Déterminer l'inverse d'un point de la droite.
3) Tracer la droite passant de ce point inverse à 0.

Pourquoi ça marche ?

Il faut inverser point par point la droite. On commence donc par un point.

- Si le point est sur le cercle de rayon 1 alors il s'agit du conjugué
- Si le point est hors du cercle de centre 1 alors on procède comme au § précédent.
- Le point 0 se fait envoyer sur l'infini et l'infini se fait envoyer sur 0 (par définition de J.

b) Droite ne passant pas par $\mathbf{0}$

Puisque $0 \notin d$, l'image d'une telle droite ne contient pas l'objet ∞. On en déduit que l'image d'une droite qui ne passe pas par 0 n'est pas une droite. En revanche $\infty \in \mathrm{d}$ donc 0 est un point de l'image de d.

Soit n le point de d le plus proche de 0, son image $\frac{1}{n}$ sera le point le plus éloigné de 0.

Rappels :

Équation de d : $z \in d \Leftrightarrow n\overline{z} + \overline{n}z = 2n\overline{n}$.

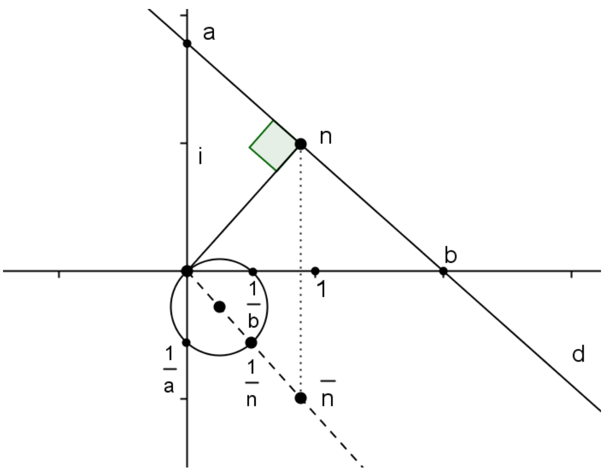
Image par J : $z' = \dfrac{1}{z} \Rightarrow z = \dfrac{1}{z'}$.

On remplace dans l'équation de la droite : $n\dfrac{1}{\overline{z}'} + \overline{n}\dfrac{1}{z'} = 2n\overline{n}$.

On multiplie les deux membres par $\dfrac{z'\overline{z}'}{2n\overline{n}}$: $\dfrac{z'}{2\overline{n}} + \dfrac{\overline{z}'}{2n} = z'\overline{z}'$ ou $z'\overline{z}' - \dfrac{z'}{2\overline{n}} + \dfrac{\overline{z}'}{2n} = 0$.

$$\left(z' - \frac{1}{2n}\right)\left(\overline{z}' - \frac{1}{2\overline{n}}\right) - \frac{1}{4n\overline{n}} = 0 \quad \text{ou} \quad \left|z' - \frac{1}{2n}\right|^2 = \left|\frac{1}{2n}\right|^2$$

z' vérifie l'équation d'un cercle de centre $\dfrac{1}{2n}$ et de rayon $\left|\dfrac{1}{2n}\right|$.



Conclusion :

L'inverse de la droite d qui ne passe pas par zéro est un cercle passant par zéro et de diamètre $\frac{1}{n}$, où n est le point de la droite le plus proche de 0.

Marche à suivre :

1) Trouver n sur la droite d.
2) Déterminer l'inverse de n.
3) Tracer le cercle de diamètre allant de 0 à $\frac{1}{n}$.

10.3 Image d'un cercle par l'inversion

a) Image d'un cercle qui passe par $\mathbf{0}$

Comme $J = {}^{r}J$, l'image d'un cercle qui passe par 0 est une droite qui ne passe pas par 0.

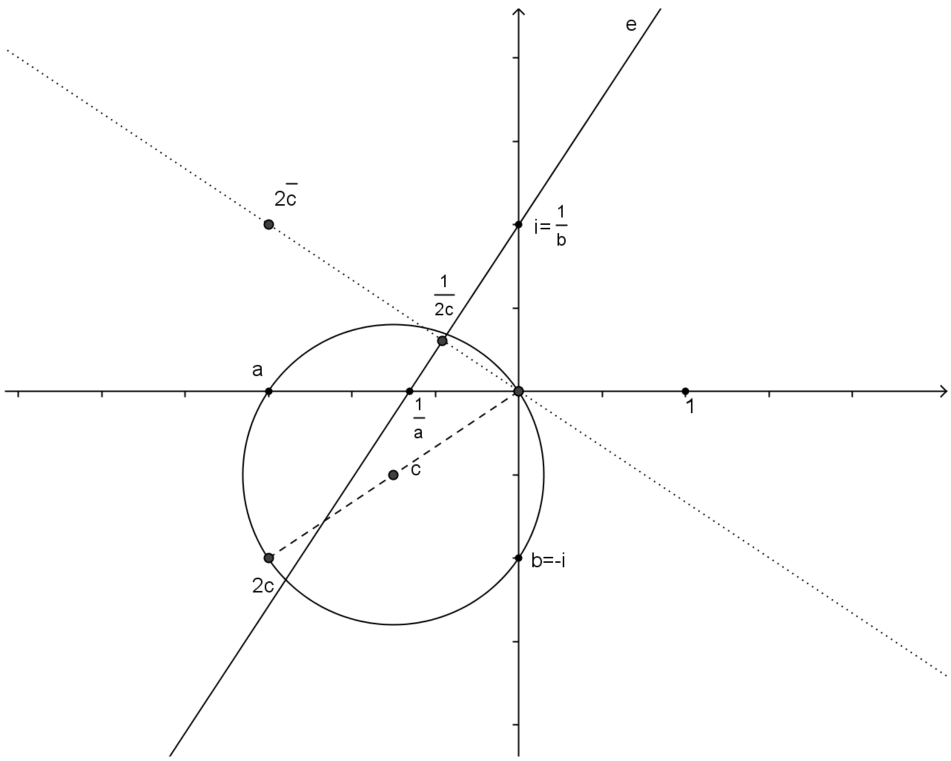
On cherche le centre c du cercle. Le point $2c$ est l'extrémité du diamètre passant par 0, c'est le point le plus éloigné de 0; son image sera le point le plus proche de 0.

Image par J

L'image de $2c$ est $\frac{1}{2c}$.

L'image du cercle est la droite dont le point le plus proche de 0 est $\frac{1}{2c}$.

Conclusion : La droite e est l'image du cercle.



Marche à suivre :

1) Trouver le centre c du cercle.
2) Déterminer le point $2c$, diamètre du cercle relié à 0.
3) Déterminer l'inverse du point $2c$: $\frac{1}{2c}$. C'est le point n.
4) Chercher la droite perpendiculaire au segment reliant 0 à $\frac{1}{2c} = n$.

c) Image d'un cercle qui ne passe pas par $\mathbf{0}$

Soit c le centre du cercle et r le rayon du cercle. L'équation du cercle peut s'écrire :

$$|z-c|^2 = r^2 \quad \text{et} \quad |c| \neq r$$

On pose : $z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z = \frac{1}{z'}$.

On remplace dans l'équation du cercle : $(z-c)\cdot(\overline{z}-\overline{c}) = r^2$.

On obtient : $\left(\frac{1}{z'}-c\right)\cdot\left(\frac{1}{\overline{z}'}-\overline{c}\right) = r^2$.

On multiplie les deux membres par $z'\overline{z}'$:

$$\begin{aligned}(1-cz')\cdot(1-\overline{c}\,\overline{z}') &= r^2 z'\overline{z}' \\ 1-cz'-\overline{c}\,\overline{z}'+c\overline{c}\,z'\overline{z}'-r^2 z'\overline{z}' &= 0 \\ 1-cz'-\overline{c}\,\overline{z}'+\left(c\overline{c}-r^2\right)z'\overline{z}' &= 0\end{aligned}$$

On divise les deux membres par $\left(c\overline{c}-r^2\right)$

$$z'\overline{z}' - \frac{c}{c\overline{c}-r^2}z' - \frac{\overline{c}}{c\overline{c}-r^2}\overline{z}' + \frac{1}{c\overline{c}-r^2} = 0$$

$$\left(z' - \frac{\overline{c}}{c\overline{c}-r^2}\right)\left(\overline{z}' - \frac{c}{c\overline{c}-r^2}\right) - \frac{c\overline{c}}{\left(c\overline{c}-r^2\right)^2} + \frac{1}{c\overline{c}-r^2} = 0$$

$$\left|z' - \frac{\overline{c}}{c\overline{c}-r^2}\right|^2 = \frac{c\overline{c}-c\overline{c}+r^2}{\left(c\overline{c}-r^2\right)^2}$$

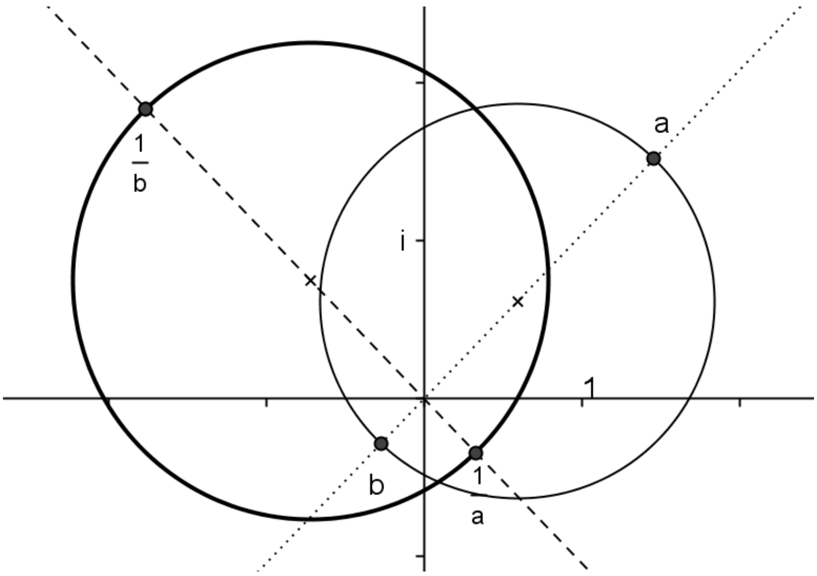
$$\left|z' - \frac{\overline{c}}{c\overline{c}-r^2}\right|^2 = \frac{r^2}{\left(c\overline{c}-r^2\right)^2}$$

Conclusion : On obtient l'équation d'un cercle de centre $\frac{\overline{c}}{c\overline{c}-r^2}$ et de rayon $\frac{r}{\left|c\overline{c}-r^2\right|}$.

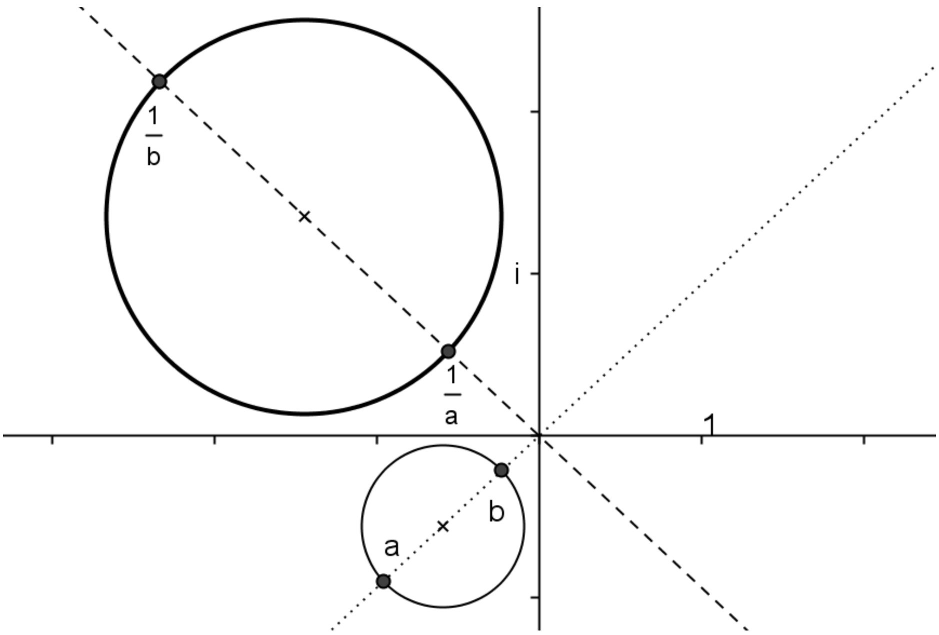
Marche à suivre :

1) Tracer la droite reliant le centre du cercle à 0.
   On obtient à l'intersection du cercle et de la droite deux points que l'on note a et b.
2) Inverser a et b pour obtenir $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.
   Ils passent par la perpendiculaire au segment passant par a et b et déterminent le diamètre du cercle cherché. Le milieu du segment $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ correspond au centre du cercle cherché.

Cas 1 : Les deux cercles s'intersectent :



Cas 2 : Pas d'intersection entre les cercles :



➢ ***NCS8***

Table des matières

p. 10 : racine d’un nombre complexe	
	p. 14 : écriture trigonométrique d’un nombre complexe
p. 16-17 : Multiplication de deux complexes	
	p. 18-20 : Écriture exponentielle & Formule de Moivre
p. 22 : racines de l’unité	
	p. 26 : Cercles et nombres complexes
p. 27-29 : Droites complexes	