Algèbre

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

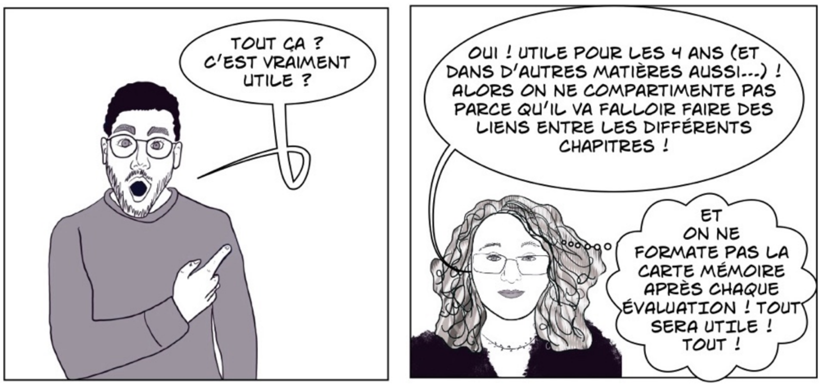
$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

$A^2 + B^2 \; pas \; factorisable \; dans \; \mathbb{R}$

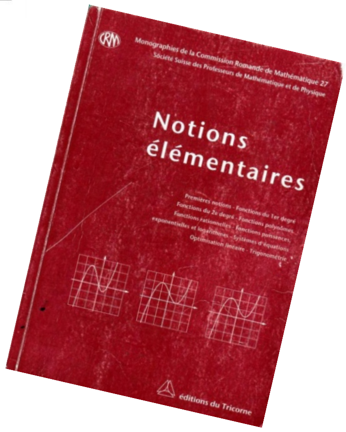
$(X+A)(X+B) = X^2 + (A+B)X + AB$

Objectifs du chapitre :

- Maîtriser les techniques élémentaires, consolider les notions vues au cycle d'orientation
- Appréhender le langage mathématique, à travers la signification des signes, des symboles, des relations et des opérations
- Sensibiliser à la formalisation au travers du calcul littéral (modélisation et abstraction)
- Savoir choisir des stratégies adéquates faces aux difficultés rencontrées
- Constituer une « boîte à outils » dans laquelle puiser à bon escient.



Matériel pour étudier ce chapitre :



- Ce polycopié distribué en cours
- Les séries d'exercices appelées « Algèbre : Série … »
- Les deux brochures d'exercices de calcul littéral du collège Voltaire
- Monographie CRM n°27 *Notions élémentaires (en cours)*
- *Formulaires et tables CRM (pour les épreuves)*

Commençons par une question :

Vrai ou Faux ?

La somme de trois nombres entiers et consécutifs est toujours égale au triple du 2e de ces nombres.

§1. Rappels : Calcul littéral, Notations et conventions d'écriture

Vrai ou Faux ? La somme de trois nombres entiers et consécutifs est toujours égale au triple du 2e de ces nombres.

Prenons <u>un exemple :</u> La somme de 10, 11 et 12 est égale à 33, c'est-à-dire le triple de 11.
Il s'agit d'un cas particulier.

Mais est-ce toujours vrai ?

De manière générale, choisissons $\boldsymbol{n}$ pour désigner le premier de nos trois nombres consécutifs.
Les trois nombres s'écrivent alors : $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}+\mathbf{1}$ **et** $\boldsymbol{n}+\mathbf{2}$.
La somme de ces nombres est ainsi : $\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}+\mathbf{1}+\boldsymbol{n}+\mathbf{2}=\mathbf{3}\boldsymbol{n}+\mathbf{3}=\mathbf{3}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$ donc le triple du 2e nombre.

Ainsi, le calcul littéral est une généralisation du calcul numérique.

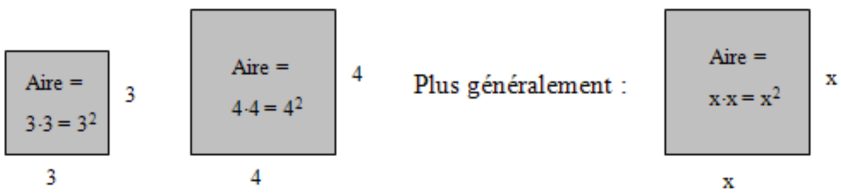
François Viète était un avocat et un mathématicien français né à Fontenay-le-Comte en 1540 et mort à Paris en 1603. Son œuvre est capitale pour la symbolisation en algèbre. C'est à lui que l'on doit 'utilisation des lettres pour représenter les quantités connues ou inconnues. Son ouvrage principal s'intitule Les Zététiques.

En mathématique, il faut **abstraire** ! Autrement dit, lorsque l'on voit une expression mathématique comportant des lettres, il faut imaginer qu'elles représentent des nombres. Il faut se détacher de l'écriture.

<u>Exemple :</u> $f(x)=x^2-3x+2$ et $x=4$ alors $f(4)=4^2-3\cdot 4+2=6$

Le choix de représenter des nombres par des lettres va permettre de **généraliser** et de **noter** de manière **compacte** certains résultats mathématiques.

<u>Exemple :</u> L'aire d'un carré :



Nous allons distinguer :

- Les **constantes :** $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$, … qui représentent un nombre particulier d'un ensemble donné.
  exemple : $a=3, b=17/4$
- Les **variables :** $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}$, … qui représentent un nombre quelconque d'un ensemble donné.
  exemple : x peut prendre ses valeurs dans $\mathbb{Z}$

Vocabulaire :

On appelle ***somme*** le résultat d'une addition et ***différence*** celui d'une soustraction.

Le ***produit*** est le résultat d'une multiplication, le ***quotient*** celui d'une division.

Nombres et chiffres ne sont pas les mêmes objets : un nombre est formé d'un ou plusieurs chiffres au même titre qu'un mot est formé d'une ou plusieurs lettres.

Ensembles :

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels

$\mathbb{N} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $\mathbb{N}^* = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Propriété : Dans $\mathbb{N}$, la somme et le produit de deux nombres entiers naturels sont eux aussi des entiers naturels.
Il n'en n'est pas forcément de même pour la différence ou le quotient.
Propriété : Dans $\mathbb{N}$, chaque nombre supérieur à 1 peut se décomposer en produit de nombres premiers.

$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs.

$\mathbb{Z} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}^* = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Propriété : La somme, la différence et le produit de deux entiers sont eux aussi des entiers relatifs.
Il n'en n'est pas forcément de même pour le quotient.
Propriété : Dans $\mathbb{Z}$, chaque nombre possède un successeur (le nombre suivant) et un prédécesseur (le nombre précédent)

Notation : $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ $\qquad$ $\mathbb{Z}_- = \{\dots;\ -2; -1; -1; 0\}$

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels

$\mathbb{Q} = \{ \qquad\qquad\qquad \}$

Les nombres rationnels sont donc ceux que l'on peut écrire sous forme d'une fraction.
Dans la fraction $\frac{a}{b}$, a et b sont des nombres entiers. a est le numérateur et b le dénominateur.
Propriété : La somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels sont eux aussi des nombres rationnels.
Rappel : Pour additionner deux fractions, il faut un dénominateur commun.
(Pour la multiplication, ce n'est pas nécessaire)
Rappel : La partie décimale d'un nombre rationnel est soit finie, soit infinie périodique.

Exemples :

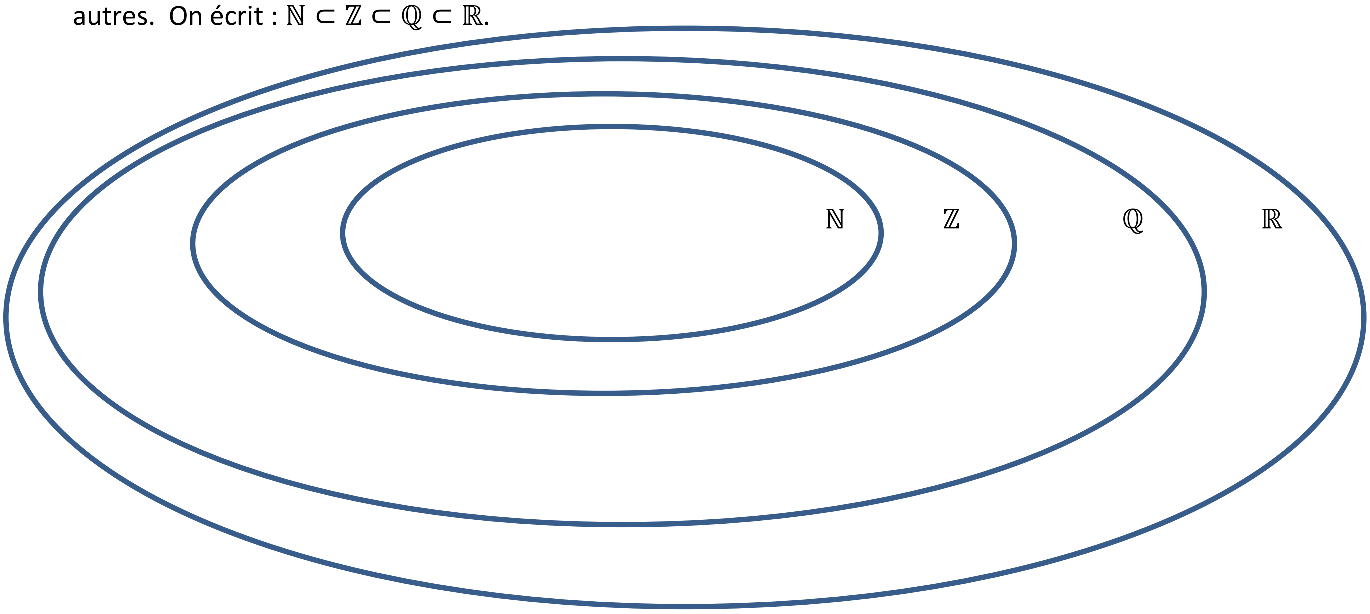
- $5{,}17$ est rationnel car $5{,}17 = \frac{517}{100}$
- $3,\overline{12}$ est aussi rationnel car $3,\overline{12} = \frac{103}{33}$

Les nombres dont la partie décimale est infinie et non périodique ne peuvent pas s'écrire sous forme d'une fraction. C'est le cas, par exemple du nombre π, de $\sqrt{2}$ ou de la racine carrée de n'importe quel nombre premier.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels

Cet ensemble contient les nombres dont la partie décimale est finie ou infinie (périodique ou non). C'est le plus grand ensemble de nombres dans lequel nous travaillerons.

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres. On dit aussi qu'ils sous-ensembles les uns des autres. On écrit : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Symboles

- $\forall$: pour tout, quelque soit
- $\exists$: il existe
- $x \in A$, signifie que l'élément x appartient à l'ensemble A.
- $x \notin A$, signifie que l'élément x n'appartient pas à l'ensemble A
- L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- $A \subset B$ signifie que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B. On dit que A est un sous-ensemble de B

Pour indiquer qu'un nombre a appartient par exemple à l'ensemble $\mathbb{Z}$, on écrit $a \in \mathbb{Z}$ et on dit « a appartient à $\mathbb{Z}$ » ou « a est élément de $\mathbb{Z}$ ».

<u>Exemple :</u>

- **Algèbre, Série 1 exercices 1 à 13**

Passer de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire :

Distinguons trois cas :

Cas 1 : Si le nombre possède une **partie décimale finie,** il suffit de le mettre en dixième, centième, millième, etc. selon le nombre de chiffres que possède la partie décimale.

Ne pas oublier ensuite de simplifier la fraction.

Exemple : $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

Cas 2 : Si le nombre possède une **partie décimale périodique**, on utilise une petite astuce consistant à éliminer la partie périodique en multipliant le nombre par 10 si la partie décimale comporte 1 chiffre, par 100 si elle en comporte 2, etc.

Exemple : $0,\overline{37} = ?$

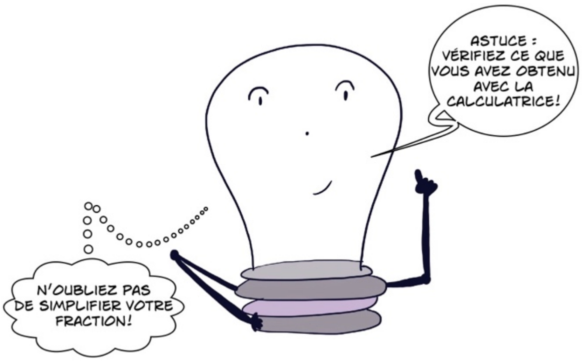
On pose : $x = 0,\overline{37}$

On calcule : $100x = 37,\overline{37}$

On soustrait : $100x - x = 37,\overline{37} - 0,\overline{37}$

$99x = 37 \quad \Leftrightarrow x = \frac{37}{99}$

Conclusion : $0,\overline{37} = \frac{37}{99}$



Conseil : vérifier le calcul avec une calculatrice : $37 \div 99 \approx 0{,}373737374$

Cas 3 : mélange du cas 1 avec le cas 2 : Si un nombre possède **une partie finie et une partie périodique**, l'astuce est de séparer les deux parties pour les traiter séparément. Il ne faut pas oublier de tout rassembler en une seule fraction.

Exemple : $2{,}1\overline{3} = ?$

$$2{,}1\overline{3} = 2{,}1 + 0{,}0\overline{3} = \frac{21}{10} + \frac{0,\overline{3}}{10} = \frac{21}{10} + \frac{\frac{1}{3}}{10} = \frac{21}{10} + \frac{1}{30} = \frac{63}{30} + \frac{1}{30} = \frac{64}{30} = \frac{32}{15}$$

Conseil : vérifier le calcul à la calculatrice : $32 \div 15 \approx 2{,}133333333$

<u>Autre méthode :</u> poser $x = 2{,}1\overline{3}$
pour supprimer la partie périodique par soustraction, il faut calculer :

$$\underbrace{1000x - 100x}_{900x} = \underbrace{2133,\overline{3} - 213,\overline{3}}_{1920} \Leftrightarrow 900x = 1920 \Leftrightarrow x = \frac{1920}{900} = \frac{32}{15} = 2{,}1\overline{3}$$

Exercice : Écrire les nombres décimaux suivant sous la forme d'une fraction.

- $1{,}26 =$

- $0,\overline{112} =$

- $1{,}2\overline{34} =$

➢ ***Algèbre Série 1 exercice 14 & Brochure §2 ex 4***

Opération sur les ensembles[1]

Nous allons expliquer les différents symboles à l'aide de diagrammes de Venn. Ce paragraphe sera utile en première année lorsque nous l'appliquerons à des intervalles dans le cadre de la résolution d'inéquations et de systèmes d'inéquations. Ce chapitre sera très important en troisième année dans le chapitre des probabilités.

Soient A et B deux ensembles contenus dans l'univers U.

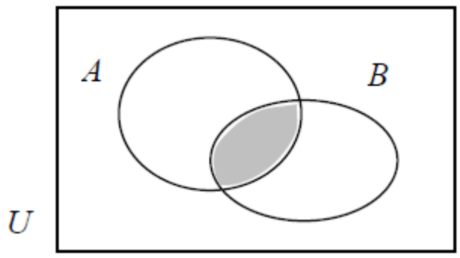
Exemple : $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$,

$A = \{nombres\ pairs\}$

$B = \{multiples\ de\ 3\}$

L'**intersection** de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B. On note cet ensemble $A \cap B$ et on lit: "A inter B". On peut noter: $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A\ et\ x \in B\}$

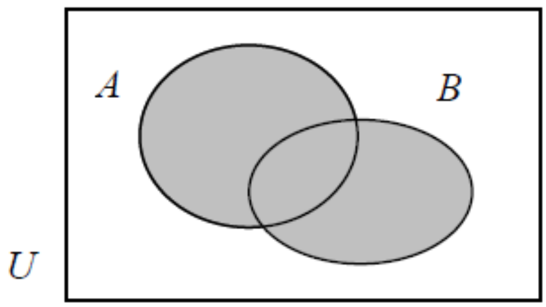
Illustration :



Exemple : $A \cap B =$

L'**union** ou la **réunion** de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A ou à l'ensemble B (ou aux deux). On note cet ensemble $A \cup B$ et on lit "A union B". On peut noter: $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A\ ou\ x \in B\}$

Illustration :

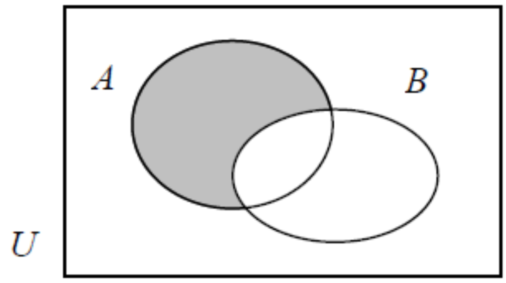


Exemple : $A \cup B =$

[1] Voir notions élémentaires p.2-3 et p. 9-10 exercices 1 à 9

La **différence** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'ensemble A mais non à l'ensemble B. On note cet ensemble $A\backslash B$ et on lit "A moins B".
On peut noter : $A \setminus B = \{x \in U | x \in A \ et \ x \notin B\}$

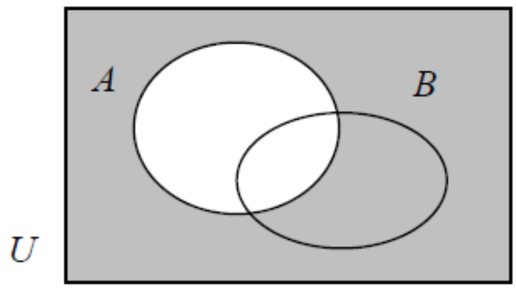
Illustration :



Exemple : $A \setminus B =$

Le **complémentaire** d'un ensemble A est l'ensemble de signifie tous les éléments qui ne sont pas dans l'ensemble A. On note cet ensemble $\bar{A}$ et on dit "non A".
On peut noter : $\bar{A} = \{x \in U | x \notin A\}$

Illustration :



Exemple : $\bar{A} =$

$\bar{B} =$

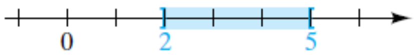
➢ ***Algèbre Série 1 exercices 15 à 22***

Notion d’intervalle [2]

Pour appliquer les opérations vues sur des ensembles, rappelons quelques notations concernant les intervalles. Les intervalles sont utiles dans le chapitre des **inéquations.**

La plupart des inéquations ont une infinité de solutions. Pour illustrer, les solutions de l’inéquation

$$2 < x < 5$$



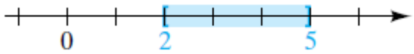
Consistent en chaque nombre réel x compris entre 2 et 5. Sauf le 2 et sauf le 5.

On appelle cet ensemble de nombres un **intervalle ouvert,** il est noté : $S =]2;5[$.

Si on veut inclure les extrémités, on utilise les crochets tournés vers l’intérieur.

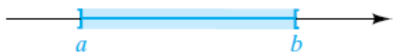
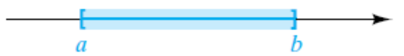
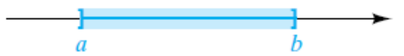
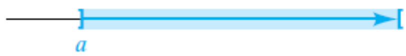
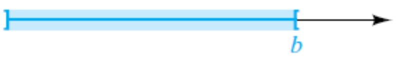
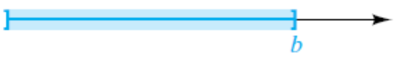
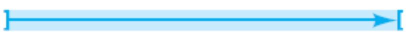
Par exemple, les solutions de l’inégalité :

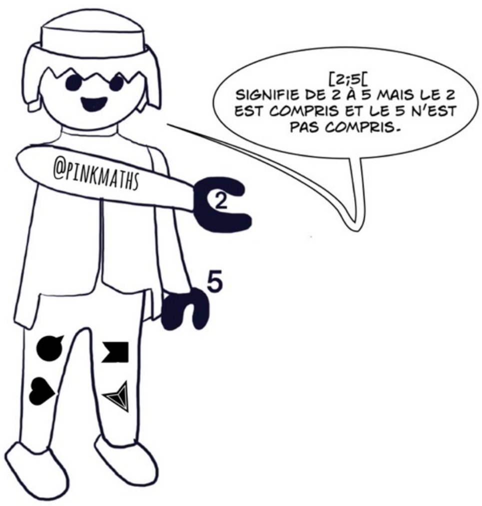
$$2 \leq x \leq 5$$



Sont notées par $S = [2;5]$, on a un **intervalle fermé**. Les crochets fermés indiquent que les extrémités sont comprises.

On peut aussi considérer des **intervalles semi-ouverts** : $[2;5[$ ou $]2;5]$ et des **intervalles infinis**.

Notations	Inéquations	Représentation
(1) $]a;b[$	$a < x < b$	
(2) $[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
(3) $[a;b[$	$a \leq x < b$	
(4) $]a;b]$	$a < x \leq b$	
(5) $]a;\infty[$	$x > a$	
(6) $[a;\infty[$	$x \geq a$	
(7) $]-\infty;b[$	$x < b$	
(8) $]-\infty;b]$	$x \leq b$	
(9) $]-\infty;\infty[$	$-\infty < x < \infty$	



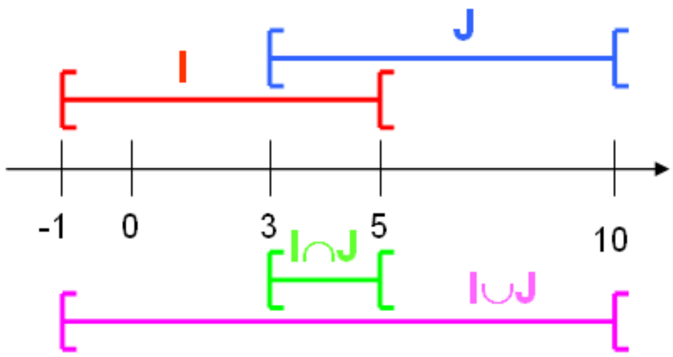
[2] Swokowski, *Algèbre*, p. 118

Intervalles et opérations sur les ensembles :

Exemple : Soient I $I = [-1;5[$ et $J = [3;10[$ deux intervalles réels.

On a : $I \cap J = [3;5[$ et $I \cup J = [-1;10[$

Illustration :



Exercice : Soient $A = [1;4]$ et $B = [-2;3[$ deux intervalles réels.

Déterminez : $A \cap B =$

$A \cup B =$

$A \setminus B =$

$B \setminus A =$

- ***Algèbre Série 1 exercices 22 à 25***
- *CRM, Notions élémentaires, p. 2 & p. 10 ex 7 à 9*

§2. Puissances

Ce chapitre sera très utile en deuxième année pour la définition des fonctions exponentielles et logarithmes.

Définitions : Soit a un nombre réel. Soit n un entier naturel, $n > 0$.
a* puissance *n, noté a^n, est égal au produit de a par lui-même n fois :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fois}$$

a s'appelle la **base** et n s'appelle l'**exposant**.

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Soient m et n deux entiers naturels.

Propriété 1 : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

En effet, si l'on multiplie a par lui-même m fois, puis par lui-même n fois, cela revient à le multiplier $(m + n)$ fois par lui-même.

Exemple : $3^4 \cdot 3^2 = \qquad =$

Propriété 2 : $[a^m]^n = a^{m \cdot n}$

En effet, si l'on multiplie a par lui-même m fois, et cela n fois, cela revient à le multiplier $(m \cdot n)$ fois par lui-même.

Exemple : $(6^5)^7 = \qquad =$

Propriété 3 : Si $a \neq 0$: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

En effet, il est possible de simplifier la fraction puisqu'il s'agit de produits de nombres identiques au numérateur et au dénominateur. Il en reste finalement $(m - n)$.

De plus, il est nécessaire que a soit différent de 0 pour éviter une division par 0.

Exemple : $\frac{12^9}{12^6} = \qquad =$

Propriété 4 : Si $a \neq 0$: $a^0 = 1$

Car d'une part $\frac{a^n}{a^n} = 1$, et d'autre part $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ (selon la propriété 3)

Exemple : $3{,}456^0 =$

Propriété 5 : Si $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En effet : $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$ (selon les propriétés 3 et 5)

Exemple : $10^{-7} = \qquad =$

Propriété 6 : $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemple : $(6 \cdot 8)^5 =$

Propriété 7 : Si $b \neq 0$: $\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 =$ $\qquad\qquad =$

Rappel :

La **racine** $\boldsymbol{n-i\grave{e}me}$ d'un nombre a est le nombre x qui, multiplié n fois par lui-même, est égal au nombre a : $x = \sqrt[n]{a} \leftrightarrow x^n = a$

Exemple :

Propriété 8 : Si $a > 0$ et si $n \neq 0$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Exemples : $9^{1/2} =$ $\qquad\qquad =$

$32^{1/5} =$ $\qquad\qquad =$

Propriété 9 : Si $a > 0$ et si $m \neq 0$: $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Exemple : $8^{2/3} =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad\qquad =$

Propriété 10 : Si $a > 0$ et si n$\neq 0$: $a^{m/n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-m/n}$

Exemple :

Résumé des propriétés que vous trouverez dans la table CRM :

Puissances et racines

On note a et b des nombres strictement positifs ; $\sqrt[n]{a}$ n'est définie que pour $n \in \mathbb{N}^*$.

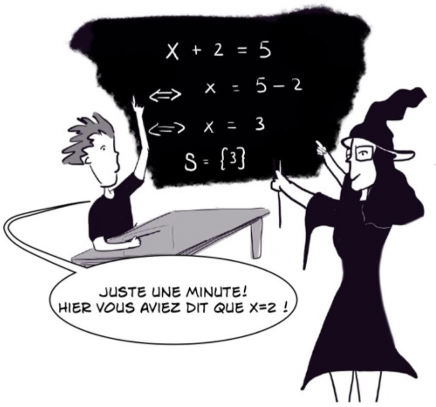
$a^0 = 1$	$a^p = a \cdot a^{p-1}$	$a^{-q} = \frac{1}{a^q}$	$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$	$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
$a^p a^q = a^{p+q}$	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$	$(a^p)^q = a^{pq}$	$a^p b^p = (ab)^p$	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	$\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$	$\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$	$\sqrt[q]{a}\,\sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{ab}$	$\frac{\sqrt[q]{a}}{\sqrt[q]{b}} = \sqrt[q]{\frac{a}{b}}$

- **Algèbre Série 2 : Propriétés des puissances**
- **Notions élémentaires, p.114-116 exercices 1 à 4 & 8 à 12**

§3. Équations de degré 1

Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques appelées "membres" de l'équation.

Dans les membres apparaissent des **variables** $(x, y, t...)$ appelées ***inconnues***.



Exemples :

1) $x + y = 10$ est une équation à deux inconnues.

2) $x^2 = x + 2$ est une équation à une inconnue.

Lorsqu'on donne au hasard une valeur à chaque inconnue de l'équation on obtient, en général, une égalité fausse.

Par exemple, en choisissant $x = 1$ et $y = 2$ dans la première équation, on obtient : $1 + 2 = 10$.

La solution d'une équation est l'ensemble des valeurs que l'on peut donner à la (ou les) variable(s) de sorte à obtenir une égalité vraie.

Par exemple, $x = 2$ est une solution de la seconde équation car en substituant x par 2,

on obtient : $2^2 = 2 + 2$ c'est-à-dire $4 = 4$.

Résoudre une équation revient à déterminer l'ensemble de ses solutions.

Cet ensemble est usuellement noté S.

Pour la seconde équation, $S = \{-1\,;\,2\}$. *(-1 est aussi une solution de cette équation.)*

Certaines équations ont une infinité de solutions, d'autres n'en ont pas, … tous les cas sont possibles.

Les membres d'une équation de degré 1 sont des polynômes de degré 1.

Par exemple, les équations suivantes sont de degré 1.

1) $2x - 3 = 4$

2) $\frac{x-1}{2} = \sqrt{5}$

3) $5x - 2 = 3x + 1$

4) $4x + 8 = 4(x + 1) + 4$

5) $x - 1 = x + 3$

Par contre, les équations ci-dessous ne sont pas du premier degré.

1) $x^2 = x + 2$ 2) $\sqrt{x} = 5$ 3) $\frac{1}{x} = 2$

Les équations de degré 1 peuvent se résoudre algébriquement en isolant l'inconnue dans l'un des deux membres.

Pour cela, il faut transformer l'équation selon certains principes d'équivalence qui découlent des propriétés des nombres réels et des opérations :

a, b et c représentent des nombres réels

1) $a = b \Leftrightarrow a + \boldsymbol{c} = b + \boldsymbol{c}$

2) $a = b \Leftrightarrow a - \boldsymbol{c} = b - \boldsymbol{c}$

3) $a = b \Leftrightarrow a \cdot \boldsymbol{c} = b \cdot \boldsymbol{c}$ $(sauf\ si\ c = 0)$

4) $a = b \Leftrightarrow \frac{a}{\boldsymbol{c}} = \frac{b}{\boldsymbol{c}}$ $(sauf\ si\ c = 0)$

1) et 2) signifient que l'on peut ajouter ou retrancher la même quantité à chaque membre de l'équation.

3) et 4) signifient que l'on peut multiplier ou diviser chaque membre de l'équation par une même quantité pour autant qu'elle soit non-nulle.

Ces quatre propriétés permettent de transformer une équation donnée en une nouvelle équation qui lui est équivalente, c'est-à-dire en une nouvelle équation qui a le même ensemble solution qu'elle.

<u>Exemple 1</u> Résolution de 2x – 3 = 4

$2x - 3 = 4 \Leftrightarrow$ $(on\ ajoute\ 3\ à\ chaque\ membre)$

$2x = 7 \Leftrightarrow$ $(on\ divise\ chaque\ membre\ par\ 2)$

$x = \frac{7}{2}$ x est isolé dans le membre de gauche.

$x = \frac{7}{2}$ est une nouvelle équation équivalente à $2x - 3 = 4$.

L'ensemble solution de ces équations est donc : $S = \left\{\frac{7}{2}\right\}$

<u>Exemple 2</u> Résolution de $4x + 8 = 4(x + 1) + 4$

$4x + 8 = 4(x + 1) + 4 \Leftrightarrow$ $(étape\ algébrique :\ distributivité)$

$4x + 8 = 4x + 4 + 4 \Leftrightarrow$ $(étape\ algébrique :\ regroupement)$

$4x + 8 = 4x + 8$ On remarque que chaque nombre est solution.

Comme $\mathbb{R}$ est le plus grand ensemble de nombres dans lequel nous opérons, la solution de cette équation est : $S = \mathbb{R}$.

Il est parfois possible de ramener une équation donnée à une équation de degré 1 alors qu'elle ne l'est pas au départ.

Exemples

1) $(x + 2)(x + 1) = x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow$

Distributivité

$x^2 + x + 2x + 2 = x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow$

Regroupement

$x^2 + 3x + 2 = x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow$

les x^2 s'annulent (les 2 aussi)

$3x = -4x \Leftrightarrow$

Équation de degré 1

$7x = 0$

$S = \{0\}$

2) $\frac{1}{x} = 7 \Leftrightarrow$

Multiplication par x

$1 = 7x$

Équation de degré 1

$S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

3) $\sqrt{x-5} + 1 = 4 \Leftrightarrow$

Soustraction de 1

$\sqrt{x-5} = 3 \Rightarrow$

Élévation au carré

$x - 5 = 9$

Équation de degré 1

$S = \{14\}$

- **Brochure calcul littéral, *§3, p.3-2 à 3-4* & §4, p.4-2 à 4-4 & Algèbre Série 3**
- **Notions élémentaires p.33 exercice 4**

Cherchez x par calculs :

ici

2x=6

§4. Inéquations de degré 1

Les inéquations du premier degré sont des inégalités contenant une inconnue $x \in \mathbb{R}$

Exemple : $3x - 2 \leq 7x + 5$

Le but est de résoudre de telle façon à déterminer les valeurs de x vérifiant l'inéquation.

Pour isoler x, les inéquations se résolvent ainsi :

On peut **additionner ou soustraire** de chaque côté par **le même nombre** sans modifier le sens de l'inégalité.

Suite de l'exemple :
$$3x - 2 + \mathbf{2} \leq 7x + 5 + \mathbf{2} \Leftrightarrow$$
$$3x \leq 7x + 7 \Leftrightarrow$$
$$3x - \boldsymbol{7x} \leq 7x + 7 - \boldsymbol{7x} \Leftrightarrow$$
$$-4x \leq 7$$

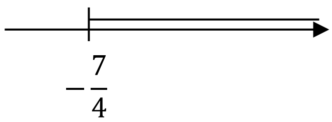
Par contre, pour **multiplier ou diviser par un nombre**, le sens de l'inégalité change selon le signe du nombre :
Si le nombre est positif le signe de l'inégalité demeure inchangé
Si le **nombre est négatif, le signe change de sens**

Petit exemple : $-2 < 9$ si on multiplie par 3, on obtient : $-6 < 27$

$-2 < 9$ si on multiplie par **-3**, on obtient : $6 > -27$

La multiplication par un nombre négatif rend positif ce qui était négatif et vice-versa, et forcément le signe d'inégalité change de sens.

Continuons la résolution de l'inéquation : $-4x \leq 7$, pour isoler x il faut diviser les deux membres de l'inégalité par -4, le signe va changer : $x \geq \frac{7}{-4}$:



$$S = [-\frac{7}{4}; +\infty[$$

Il y a, contrairement aux équations, une infinité de solutions.

- ***Brochure calcul littéral §5 & Algèbre Série 4***
- ***CRM n°27, Notions élémentaires, p.30-31& .p33 exercice 5***

§5. Systèmes d'inéquations du premier degré

Méthode :

1) On résout indépendamment chaque inéquation,

2) On cherche les solutions communes des deux ensembles solutions trouvés en faisant l'intersection.

3) Donner l'ensemble solution.

Exemple : Résoudre le système suivant et donner l'ensemble solution

$$\begin{cases} 1)\ 3x - 2 \leq 7x + 5 \\ 2)\ \dfrac{x}{2} + 1 - x > \dfrac{3x}{4} \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 3x - 2 \leq 7x + 5 \\ \frac{x}{2} + 1 - x > \frac{3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq 4x \\ \frac{2x+4-4x}{4} > \frac{3x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{7}{4} \leq x \\ -2x + 4 > 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{7}{4} \\ x < \frac{4}{5} \end{cases}$

2) On a donc : $S_1 = [-\frac{7}{4}; +\infty[\quad et\ S_2 =]-\infty; \frac{4}{5}[$

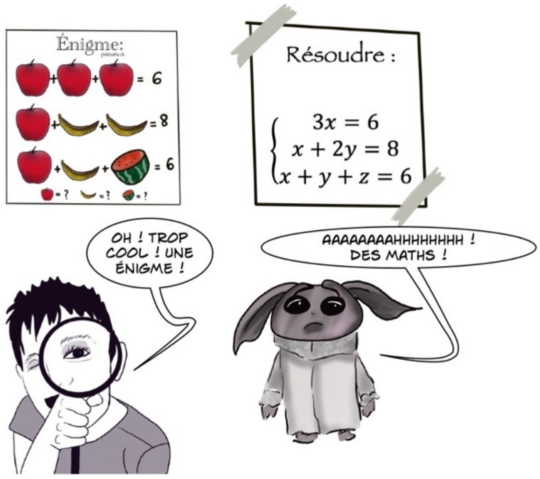
3) La solution est donc : $S = S_1 \cap S_2 = [-\frac{7}{4}; +\infty[\cap] - \infty; \frac{4}{5}[= [-\frac{7}{4}; \frac{4}{5}[$

Exercice : Résoudre le système suivant et donner l'ensemble solution.

$$\begin{cases} 1)\ 3x - 1 \leq 5x + 3 \\ 2)\ \dfrac{5x}{2} > 3 + 7x \end{cases}$$

- ***Algèbre Série 5***
- ***Notions élémentaires p.34 exercice 8***
- ***Brochure §5 ex 4***

§6. Système d'équations linéaires



Ce paragraphe permet des liens avec le chapitre des fonctions en <u>première année</u>.

Il sera très utile en géométrie vectorielle dans le plan en <u>deuxième année</u>, en géométrie vectorielle dans l'espace en <u>troisième année</u> et en algèbre linéaire en <u>quatrième année</u>.

Exemples de systèmes d'équations :

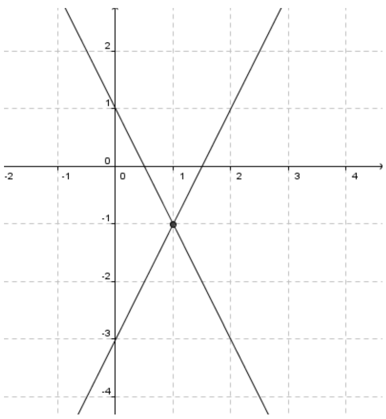
$$\begin{cases} x - 2y = -8 \\ 3x + 5y = 9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 3y + 4 \\ y = 5x - 2 \end{cases}$$

Vous connaissez deux méthodes de résolution pour les systèmes de deux équations linéaires à deux variables :

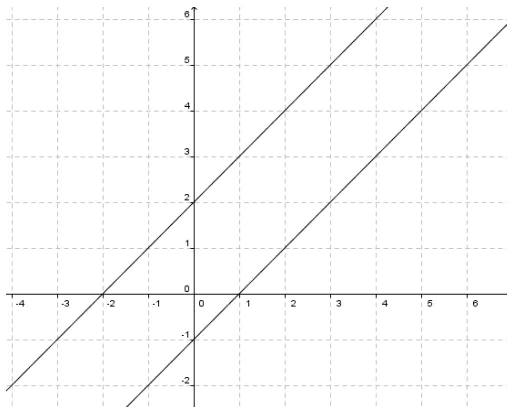
1) Méthode **graphique** (recherche du point d'intersection entre deux droites)
2) Méthode **algébriques** (comparaison, substitution, addition)

Illustrons ces méthodes à l'aide d'exemples :

1) Méthode graphique



$S = \{(1; -1)\}$



$S = \emptyset$ pas de point d'intersection (droites parallèles)

La résolution à l'aide de cette méthode graphique sera étudiée dans le chapitre d'analyse.

2) Méthodes algébriques

(a) **Méthode par addition :**

On multiplie une ou les 2 équations, si cela est nécessaire par des nombres afin que les coefficients de l'une des 2 inconnues soient alors de valeurs opposées.
On additionne ces équations et alors une des inconnues est alors éliminée.
On résout et une fois que l'une des inconnues est déterminée, on remplace dans l'une des équations afin de trouver l'autre inconnue.

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

(b) **Méthode par substitution :**

On exprime l'une des inconnues par rapport à l'autre puis on substitue cette inconnue dans l'autre équation

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$

(c) **Méthode par comparaison :**
On exprime l'une des inconnues par rapport à l'autre dans les équations.
On égale les deux équations.

Exemple : $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

Remarque : Si le nombre d'équations est plus grand que le nombre d'inconnues, on peut trouver une solution en n'utilisant qu'une partie des équations, mais il faudra VERIFIER que cette solution est bien solution des équations qui n'auront pas été utilisées.

Exemple : $\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 2} \\ \boldsymbol{x - 2y = -1} \\ \boldsymbol{x + 3y = 5} \end{cases}$

Important : La solution d'un système d'équation se donne sous la forme : $\boldsymbol{S} = \{(\quad ; \quad)\}$

➢ ***Algèbre Série 6 & brochure §6***

§7. Généralisation

Passons maintenant à un système contenant 3 équations et 3 inconnues. Nous allons résoudre un même exemple selon deux méthodes puis pour chaque méthode vous résoudrez aussi un exemple.

Méthode 1 : Élimination de Gauss[3]

Cette méthode est basée sur celle appelée "par addition" que nous avons utilisée pour résoudre les systèmes de deux équations à 2 inconnues. L'idée est de garder la première ligne avec les 3 inconnues, de simplifier la deuxième ligne pour qu'il n'en reste que 2 et simplifier la 3e ligne pour qu'il ne reste qu'une inconnue.

Exemple résolu :

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ \end{matrix} \right| \begin{matrix} -1 \\ \\ 1 \end{matrix}$$

Première étape : simplifier une inconnue (ici x) dans les lignes 2 et 3:
- on recopie la première ligne sans la modifier dans le système suivant
- nous allons multiplier la première ligne par -2 et l'additionner à la deuxième ligne: on inscrira le résultat dans la deuxième ligne du système suivant
- nous allons multiplier la première ligne par -1 et l'additionner à la troisième ligne: on inscrira le résultat dans la troisième ligne du système suivant

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 5y + 7z = 9 \\ 5y + z = 14 \end{cases} \left| \begin{matrix} \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Deuxième étape: simplifier une deuxième inconnue (ici y) dans la ligne 3:
- on recopie la première ligne et la deuxième ligne sans les modifier
- on multiplie la deuxième ligne par -1 et on l'additionne à la troisième ligne: on inscrit le résultat dans la troisième ligne du système suivant

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 5y + 7z = 9 \\ -6z = 5 \end{cases}$$

On a ainsi: une inconnue dans la dernière ligne, on peut donc la trouver rapidement, on peut ensuite remonter dans la deuxième ligne et trouver une deuxième inconnue, et finalement trouver la dernière inconnue à l'aide de la première ligne:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 5y + 7z = 9 \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 5y + 7 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 9 \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ y = \frac{89}{30} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x - 2 \cdot \frac{89}{30} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -1 \\ y = \frac{89}{30} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{73}{30} \\ y = \frac{89}{30} \\ z = -\frac{5}{6} \end{cases} \qquad S = \left\{\left(\frac{73}{30}; \frac{89}{30}; -\frac{5}{6}\right)\right\}$$

[3] Voir notions élémentaires p.128-129 pour deux exemples résolus & p.131 pour des exercices.

Exemple :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases}$$

Méthode 2 : Par substitution[4]

Marche à suivre : *1) Isoler une inconnue dans la 1ère ligne*
2) substituer l'expression dans les lignes 2 et 3. Développer, et simplifier les lignes 2 et 3
3) isoler une inconnue dans la 2ème ligne
4) Substituer l'expression dans la 3e ligne, développer et simplifier la 3e ligne
5) Trouver la valeur de la 3e inconnue dans la 3e ligne. La substituer dans la 1ère et la 2ème ligne
6) Trouver la valeur de la 2e inconnue dans la 2e ligne. La substituer dans la 1ère ligne
7) Trouver la valeur de la 1ère inconnue dans la 1ère ligne.

Résolution d'un exemple :

$$\begin{cases} x-2y-3z=-1 \\ 2x+y+z=7 \\ x+3y-2z=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 2(2y+3z-1)+y+z=7 \\ 2y+3z-1+3y-2z=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 4y+6z-2+y+z=7 \\ 5y+z=14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 5y+7z=9 \\ 5y+z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 5y=9-7z \\ 9-7z+z=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 5y=9-7z \\ -6z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ 5y=9-7z \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ y=\frac{9-7\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)}{5} \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+3z-1 \\ y=\frac{89}{30} \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\cdot\frac{89}{30}+3\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)-1 \\ y=\frac{89}{30} \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{73}{30} \\ y=\frac{89}{30} \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases}$$

$$S=\left\{\left(\frac{73}{30};\frac{89}{30};-\frac{5}{6}\right)\right\}$$

Exemple :

$$\begin{cases} x+3y+2z=-13 \\ 2x-6y+3z=32 \\ 3x-4y-z=12 \end{cases}$$

➢ ***Algèbre Série 7***

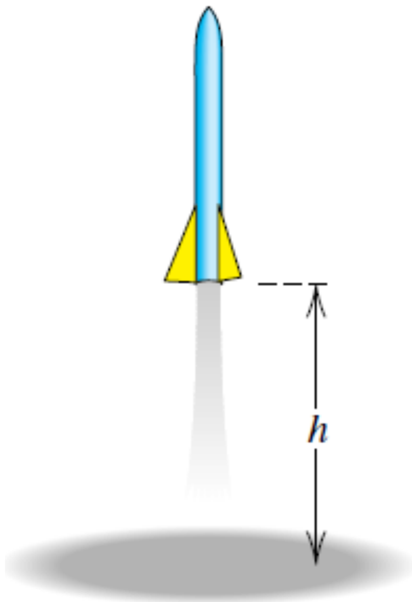
[4] Voir Notions élémentaires p.129-130

§8. Opérations avec des polynômes

Pourquoi étudier les polynômes ?

1) Les polynômes interviennent naturellement dans de nombreux problèmes.
2) Ce sont des fonctions qui ne sont ni trop simples ni trop compliquées à étudier.
3) Évaluer un polynôme en un point est simple, puisqu'il ne faut faire que des additions et multiplications.

Exemple de problème :



Une fusée jouet est lancée verticalement depuis le sol, comme le montre le dessin ci-contre.

Si la vitesse initiale est de 36 m/s et si la seule force agissante est la force d'attraction, la hauteur h (en m) de la fusée au-dessus du sol après t secondes est donnée par $\boldsymbol{h = -4,9t^2 + 36t}$

On donne les valeurs de h pour les 7 premières secondes de vol dans le tableau suivant :

t (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7
h (m)	0	31,1	52,4	63,9	65,6	57,5	39,6	11,9

Nous voyons sur ce tableau que la fusée en montant était 60 m au-dessus du sol à un instant entre $t = 2$ et $t = 3$.

En descendant, la fusée était 60 m au dessus du sol à un instant entre $t = 4$ et $t = 5$. Pour trouver la valeur exacte de t pour $h = 60\ m$, nous devons résoudre l'équation

$$60 = -4{,}9t^2 + 36t \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{4,9t^2 - 36t + 60} = 0$$

Il s'agit d'une équation du second degré. Nous allons développer des méthodes de résolutions dans ce chapitre qui nous permettrons de résoudre ce type d'équations.

Si on ne considère que "$\boldsymbol{4,9t^2 - 36t + 60}$", il s'agit d'un polynôme du second degré.

Définition et vocabulaire :

Définition : On appelle ***polynôme à coefficients réels*** une fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
où $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1 et\ a_0$ sont des nombres réels et $a_n \neq 0$.

Exemple : $P(x) = 4{,}9x^2 - 36x + 60$

- L'entier n est appelé le ***degré*** du polynôme. $n \geq 0$.
  La seule exception est le polynôme nul : $P(x) = 0$
- Les nombres $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1 et\ a_0$ sont appelés les ***coefficients*** du polynôme.
- a_0 est appelé le terme constant.
  C'est la valeur que prend le polynôme quand on l'évalue en zéro. $P(0) = a_0$
- a_n est appelé le coefficient dominant.
  C'est le coefficient qui multiplie la plus grande puissance de x.

- Question : pourquoi précise-t-on $a_n \neq 0$?

- Question : Que se passe-il si tous les coefficients sont nuls ?

Exemple 1 : Donner un polynôme de degré 3: $P(x) =$

Ses coefficients sont : $a_3 =$ $a_2 =$ $a_1 =$ $a_0 =$

Le terme constant vaut :

Le coefficient dominant vaut :

Si on remplace x par une autre lettre, toutes les occurences de x sont remplacées par cette autre lettre

$P(t) =$ $P(☺) =$

$P(y) =$ $P(3) =$

Ici, on sous-entend que $t, y\ et$ ☺ sont des nombres, même si on ne connaît pas leur valeur.

Exemple 2 : Voici un polynôme de degré 4 : $P(x) = 17x^4 - 24x^3 + 14x^2 + 13x - 36$

on a: $a_4 = 17, a_3 = -24; a_2 = 14, a_1 = 13\ et\ a_0 = -36$
Le terme constant égale -36 et le coefficient dominant égale 17.

Opérations sur les polynômes :

Puisque les polynômes sont des fonctions réelles, on peut additionner, soustraire, multiplier, diviser et composer des polynômes entre deux[5].

Exemple : Prenons deux polynômes :

$\boldsymbol{A(x) = 3x^2 - 8x + 4}$ et $\boldsymbol{B(x) = 5x^3 - 6x^2 + 3x - 2}$

$\deg(A) =$ $\deg(B) =$

On définit leur ***somme***[6]: $(A + B)(x) = A(x) + B(x)$

Calculons : $(A + B)(x) = A(x) + B(x) =$

On obtient un nouveau polynôme $A + B$, dont le degré est :
$\deg(A + B) =$

On définit leur ***différence*** : $(A - B)(x) = A(x) - B(x)$

Calculons : $(A - B)(x) = A(x) - B(x) =$

On obtient un nouveau polynôme $A - B$, dont le degré est :

On définit leur ***produit avec un nombre réel*** : $(\alpha \cdot A)(x) = \alpha \cdot A(x), a \in \mathbb{R}$

Calculons :$-3 \cdot A(x) =$

$\frac{1}{2} \cdot B(x) =$

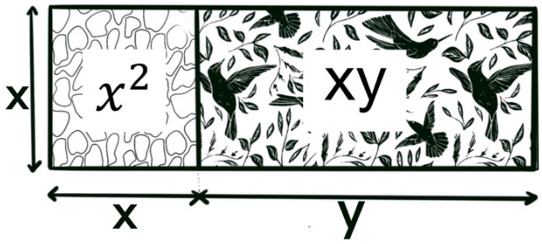
On obtient de nouveaux polynômes, dont les degrés sont:

$degré(-3A) =$ et $degré\left(\frac{1}{2}B\right) =$

[5] Voir Brochure du Collège Voltaire sur le calcul littéral, §1
[6] Voir Brochure du Collège Voltaire, §3.

La ***multiplication de deux polynômes***[7] n'est pas intuitive, elle est basée sur un principe : la **distributivité**.

Illustration de cette égalité à l'aide de la géométrie :



$\text{L'aire du grand rectangle} = x(x+y)$
$= \textit{la somme des aires du carré et du petit rectangle} \ = x^2 + xy$

Exemple : $A(x) = x$ et $B(x) = x + 3$

$$A(x) \cdot B(x) = x \cdot (x+3) = x^2 + 3x$$

Remarque : le facteur à distribuer se distribue sur tous les termes de la somme.

Exemple 2 : $\boldsymbol{x} \cdot (x^2 - 2x + 4) = \boldsymbol{x} \cdot x^2 - \boldsymbol{x} \cdot 2x + \boldsymbol{x} \cdot 4 = x^3 - 2x^2 + 4x$

Remarque : Il est possible de distribuer un facteur composé de plusieurs termes.

exemple 3: $(\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot (2x^2 - x + 2) = (\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot 2x^2 - (\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot x + (\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot 2$
Dans ce cas, il faut encore une étape supplémentaire de distributivité simple:
$$(\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot 2x^2 - (\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot x + (\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot 2 = 2x^3 + 6x^2 - (x^2 + 3x) + 2x + 6 = 2x^3 + 5x^2 - x + 6$$

Attention aux parenthèses

Remarque : Le calcul de l'exemple 3 peut se faire directement en distribuant chaque terme du facteur composé : $(\boldsymbol{x} + \mathbf{3}) \cdot (2x^2 - x + 2) = \underline{2x^3 - x^2 + 2x} + \underline{6x^2 - 3x + 6}$

On *distribue le x* *On distribue le 3*

Exercice : Calculer et simplifier : $(2x - 1)(3x + 1) =$

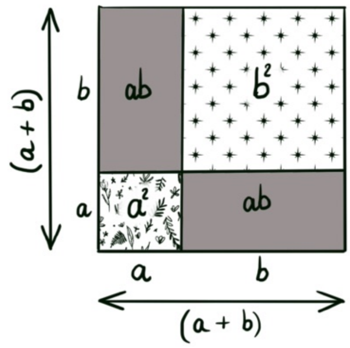
➢ ***Algèbre Série 8***

[7] Voir Brochure du Collège Voltaire, §7

§9. Identités remarquables

Certaines multiplications de polynômes sont très connues car très utiles :

1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 =$

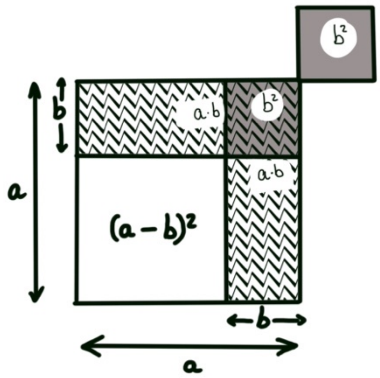


Exemples :

- $(x+2)^2 =$

- $x^2+10x+25 =$

2) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 =$



Exemples :

- $(x-3)^2 =$

- $16x^2-8x+1 =$

3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) =$

Exemples :

- $(x+4)(x-4) =$

- $49-x^2 =$

Attention : $\boldsymbol{a^2+b^2}$ ***n'est pas factorisable dans*** $\mathbb{R}$.

4) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) =$

Exemples :

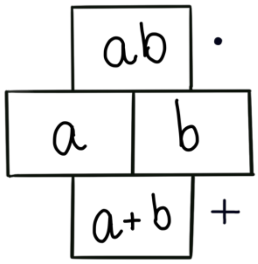
- $(x+2)(x-3) =$

- $x^2-8x+5 =$

	x	b
x	x^2	$b \cdot x$
a	$a \cdot x$	$a \cdot b$

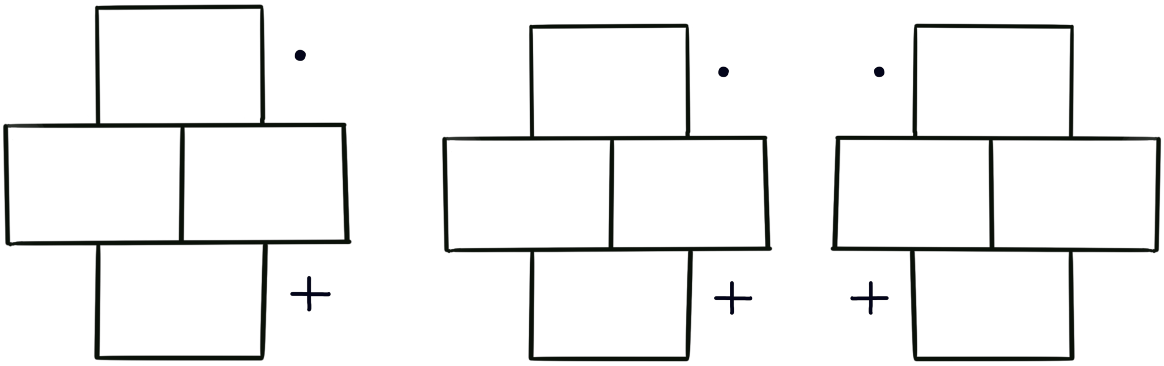
Méthode de la croix :

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{x}^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ab}$$



Exercice : Factoriser :

- $x^2+7x+6=$
- $x^2-4x+4=$
- $x^2+x-6=$



Que peut-on trouver à ce sujet dans la table CRM ?

Calcul algébrique

Identités

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ \dots\ +\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ \dots\ +\binom{n}{n}b^n$ coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, voir page 7	
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	a^2+b^2 n'est pas factorisable dans les réels
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ \dots\ +ab^{n-2}+b^{n-1})$	
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$	

➢ ***Algèbre Série 9***

§10. Factorisation[8]

Développer est un processus qui transforme un produit de facteurs en une somme de termes. C'est simple à faire. Les calculs peuvent être longs.

Exemple : Développer l'expression : $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Factoriser est le processus inverse, qui transforme une somme de termes en un produit de facteurs. C'est généralement plus compliqué à faire que de développer, mais plus utile.

Exemple : factoriser l'expression : $x^2 + 5x + 6$

Voici deux utilisations fréquentes de la factorisation :

1) **Factoriser peut servir à résoudre des équations**

Résolvez l'équation : $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

2) **Factoriser peut servir à simplifier des fractions**

Simplifiez la fraction : $\frac{x^3+5x^2+6x}{x+3}$

De manière générale, on cherche **toujours** à obtenir le **nombre maximum de facteurs possible**.

Exemple : $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$ est une factorisation incomplète car il n'y a que deux facteurs

alors que:

$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$ est une factorisation complète, car trois facteurs est le nombre maximum possible.

[8] Voir Brochure du Collège Voltaire, §7

Techniques de factorisation :

Il n'existe pas de recette pour factoriser à coup sûr une expression, mais uniquement divers moyens que l'on doit essayer successivement.

Voici les principaux moyens :

1) **Factorisation par mise en évidence**
C'est le processus inverse de la distributivité : $AB + AC = A(B + C)$

Factoriser : $x^3y + xy^3$

Factoriser : $(x - y)(3a + 5b) + (x - y)(a - 2b)$

2) **Factorisation par groupement de termes :**
C'est le processus inverse de la double distributivité :

$$\underbrace{A \cdot C + A \cdot D}_{1er\ groupe} + \underbrace{B \cdot C + B \cdot D}_{2ème\ groupe} = A \cdot (C + D) + B \cdot (C + D) = \underbrace{(A + B) \cdot (C + D)}_{Produit\ de\ deux\ facteurs}$$

Remarquons que deux factorisations successives par mise en évidence ont été effectuées.

Factoriser : $ax - by + ay - bx$

Factoriser : $x^3 + x^2 + x + 1$

3) **Factorisation à l'aide des identités remarquables :**

Factoriser :

(a) $4x^2 + 12x + 9$

(b) $x^2 - \frac{10}{6}x + \frac{25}{36}$

(c) $x^3y - xy^3$

(d) $x^2 - 3x - 70$

Souvent, il faut combiner les trois méthodes pour factoriser toute l'expression algébrique

Factoriser :

(a) $(x + 1)^3 - 4(x + 1)$

(b) $4x^2 - 9 + (x + 5)(2x - 3)$

➢ ***Algèbre[9] Série 10***

[9] Besoin de plus d'exercices ? **http://www.gomaths.ch/** ---> Algèbre ---> Calcul littéral ---> factorisation

§11. Équations de degré deux[10]

Une équation de degré deux peut être écrite sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$

Le théorème suivant nous permettra de résoudre de nombreuses sortes d'équations :

Théorème du produit égal à zéro[11]:
Si A et B sont des expressions algébriques,
Alors $A \cdot B = 0$ si et seulement si $A = 0 \; ou \; B = 0$

Il s'ensuit que si $ax^2 + bx + c$ peut être écrit comme le produit de deux polynômes du premier degré, des solutions peuvent être trouvées en posant que chaque facteur est égal à zéri, comme on le montre dans les deux exemples suivants. Cette technique est appelée la **méthode de factorisation**.

Exemple 1 : Résoudre : $(x-2)(x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \; ou \; x + 3 = 0$ *Appliquer directement le théorème du produit égal à zéro*

$\Leftrightarrow x = 2 \; ou \; x = -3$ *Résoudre par rapport à* x

$$S = \{-3; 2\}$$

Exemple 2 : Résoudre $3x^2 = 10 - x$

Pour utiliser la méthode de factorisation, il est essentiel que le nombre zéro apparaisse d'un côté de l'équation.

Ainsi, nous procédons comme suit:

$3x^2 = 10 - x$ Donné

$\Leftrightarrow 3x^2 + x - 10 = 0$ additionner $x - 10$

$\Leftrightarrow (3x-5)(x+2) = 0$ Factoriser

$\Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \; et \; x + 2 = 0$ Théorème du produit égal à zéro

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \;\; et \;\; x = -2$ Résoudre par rapport à x

$$S = \left\{-2; \frac{5}{3}\right\}$$

Exemple 3 : Résoudre l'équation $x^2 + 16 = 8x$

➢ ***Brochure du collège Voltaire, §8***

[10] Voir Brochure du Collège Voltaire, §8 & §9
[11] Appelé aussi *Théorème du produit nul*

Nous pouvons aussi résoudre des équations de la forme $\boxed{\boldsymbol{A^2 - B^2 = 0}}$ à l'aide de la troisième identité. Développons cette partie avec trois exemples :

A l'aide des identités remarquables, nous savons résoudre certaines équations du second degré :

(1) $(2x+1)^2 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow [(2x+1)-2][(2x+1)+2] = 0$
$\Leftrightarrow (2x+1-2)(2x+1+2) = 0$
$\Leftrightarrow (2x-1)(2x+3) = 0$
soit $2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ soit $2x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$
$S = \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}$

(2) $(3x-1)^2 - 16 = 0$

(3) $(x+1)^2 - 5 = 0$

Souvent, l'équation ne se présentera pas sous cette forme $A^2 - B^2 = 0$ mais il sera possible de la faire apparaître. La méthode à utiliser s'appelle « **compléter le carré** »

Exemple *:* Résoudre l'équation : $x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 = 0$ Faire apparaitre le début de $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 = 0$ Faire apparaitre entièrement l'identité

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 \cdot \frac{4}{4} = 0$ Faire apparaitre l'identité factoriser et simplifier la constante

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$ Appliquer l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2 = 0$ Comparaison : $a = x - \frac{5}{2}$ et $b = \sqrt{\frac{13}{4}}$

$\Leftrightarrow \left[\left(x - \frac{5}{2}\right) - \sqrt{\frac{13}{4}}\right]\left[\left(x - \frac{5}{2}\right) + \sqrt{\frac{13}{4}}\right] = 0$ Théorème du produit nul

$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ ou $x = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$ Résoudre par rapport à x

$$S = \left\{\frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right\}$$

Exemple : Résoudre l'équation $4x^2 + x - 3 = 0$

➢ ***Série 11 exercice 1 & Brochure du collège Voltaire, §9***

Avec cette méthode, on obtient une formule qui permet de résoudre des équations du 2e degré :

Soit l'équation $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$

Notons $\Delta = \boldsymbol{b^2-4ac}$, appelé le **discriminant** de l'équation.
Le discriminant peut être utilisé pour déterminer la nature des racines (= solutions) de l'équation.

Si $a \neq 0$, les racines de l'équation sont données par

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Remarque :

- Si $\Delta = 0$, alors $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors il n'existe pas pas de x_1 ni de x_2 car la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas dans l'ensemble des nombres réels.

Exemple : Résoudre l'équation $4x^2+x-3=0$ Nous avons : $a=4; b=1: c=-3$

Calculons : $\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\cdot4\cdot(-3) = 1+48 = 49 > 0$
Nous avons donc les solutions :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+7}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-7}{8} = -\frac{8}{8} = -1$$

$$S = \left\{-1; \frac{3}{4}\right\}$$

Preuve :

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0$$

soit $x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ soit $x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \Leftrightarrow x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$S = \left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

CQFD

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Polynômes

Polynôme du deuxième degré à coefficients réels

$P(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

Les *zéros du polynôme* P sont les solutions de l'*équation du deuxième degré* $P(x) = 0$

Zéros et factorisation

L'expression $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ est le *discriminant* de P.

Si $\Delta > 0$, le polynôme P admet deux zéros réels

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

et on a l'identité

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Si $\Delta = 0$, le polynôme P admet un seul zéro réel

$$\boxed{x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}}$$

et on a l'identité

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

Si $\Delta < 0$, le polynôme P n'admet pas de zéro réel et n'est pas décomposable en un produit de polynômes du premier degré à coefficients réels.

P admet cependant deux zéros complexes conjugués $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Relations de Viète

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}} \quad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 + x = 2$

➢ ***Retour aux exercices pour tester la formule : Algèbre Série 11 & Brochure §9***

§12. Résumé des trois formes d'équations de degré 2

Pour illustrer ce résumé et ces méthodes, reprenons un exemple du chapitre des fonctions, p.23:

$$\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x+1)(x-7)=\frac{1}{2}(x-3)^2-8$$

Comment passer d'une forme à l'autre ?

Nous avons complété ces égalités avec les propriétés des paraboles, ici, nous allons les retrouver avec l'aide de la factorisation et de la complétion du carré ou du développement.

a) Première égalité : $\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x+1)(x-7)$

$$\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x^2-6x-7)=\frac{1}{2}(x-7)(x+1)$$

Mise en évidence de $\frac{1}{2}$ 4e identité remarquable Méthode : factorisation

b) Deuxième égalité : $\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x-3)^2-8$

$$\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}(x^2-6x-7)=\frac{1}{2}(x^2-2\cdot3\cdot x+3^2-3^2-7)=\frac{1}{2}[(x-3)^2-16]$$
$$=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{1}{2}\cdot16=\frac{1}{2}(x-3)^2-8$$

Mise en évidence de $\frac{1}{2}$ 2e identité Méthode : compléter le carré

Quelle méthode utiliser pour résoudre des équations avec ces 3 formes ?

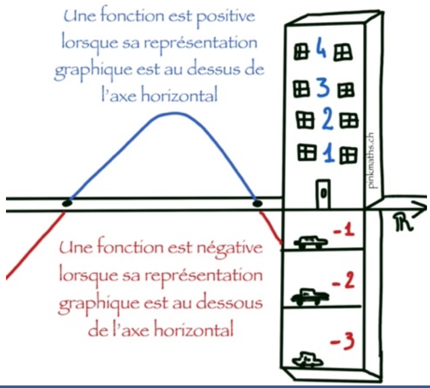
$\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{7}{2}=0$	$\frac{1}{2}(x+1)(x-7)=0$	$\frac{1}{2}(x-3)^2-8=0$
Multiplier par 2 pour ne plus avoir de fraction : $x^2-6x-7=0$ **Méthode du discriminant ou identités remarquables pour factoriser :** $\Delta=(-6)^2-4\cdot1\cdot(-7)=64$ $x_1=-1$ et $x_2=7$ Ensemble solution : $S=\{-1;7\}$	**Théorème du produit nul** (Algèbre p.25) Soit $x+1=0$ donc $x=-1$ Soit $x-7=0$ donc $x=7$ Ensemble solution : $S=\{-1;7\}$	Multiplication par 2 pour ne plus avoir la fraction : $(x-3)^2-16=0$ **Factorisation à l'aide de la 3e identité remarquable** (Algèbre p.22) $[(x-3)-4][(x-3)+4]=0$ $(x-7)(x+1)=0$ **Théorème du produit nul** Soit $x+1=0$ donc $x=-1$ Soit $x-7=0$ donc $x=7$ Ensemble solution : $S=\{-1;7\}$

➢ ***Algèbre Série 11 & Brochure du collège Voltaire §9***

§13. Inéquations de degré deux[12]

Définition : On dit qu'une fonction est :

- **Positive** si sa représentation graphique est au-dessus de l'axe horizontal.
- **Négative** si sa représentation graphique est en-dessous de l'axe horizontal.
- **Nulle** si sa représentation graphique est sur de l'axe horizontal.



1er degré : $f(x) = ax + b$ est une droite où a est la pente et b est l'ordonnée à l'origine.

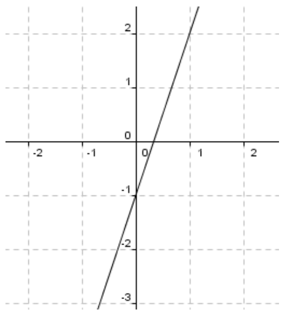
- Si $a > 0$: la droite est croissante
- Si $a < 0$: la droite est décroissante
- Si $a = 0$: la droite est constante

Exemple 1 : Déterminer le signe de la fonction $f(x) = 3x - 1$

1) Chercher lorsque la fonction est nulle :

$$3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

2) Vu que la pente est de 3, elle est positive, la fonction sera une droite croissante.
3) Tracer grossièrement la fonction :



On remarque que : - avant $\frac{1}{3}$, la fonction est en dessous de l'axe horizontal,
- à $x = \frac{1}{3}$, la fonction coupe l'axe horizontal et
- après $\frac{1}{3}$ la fonction est au-dessus de l'axe horizontal.

4) Tableau de signes :

	$]-\infty; 1/3[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3}; +\infty[$
$f(x) = 3x - 1$	$-$	0	$+$

5) Si on a l'inéquation $f(x) < 0$, on peut alors répondre : $S =]-\infty; 1/3[$
Si on a l'inéquation $f(x) \geq 0$, on peut alors répondre : $S = [\frac{1}{3}; +\infty[$

Exercice : Construire le tableau de signes de la fonction $g(x) = -4x + 8$ et résoudre $g(x) < 0$

[12] Voir Brochure du Collège Voltaire, §9

Second degré :

Avec la factorisation d'une équation du second degré et la règle des signes, nous pouvons résoudre des inéquations du second degré.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Méthode 1 :

A l'aide de la factorisation, nous pouvons utiliser une ligne de plus dans le tableau de signes et faire ensuite appel à la règle des signes.

Règles des signes :

$$(+1)(-1) = \frac{+1}{-1} = (-1)(+1) = \frac{-1}{+1} = -1 \qquad (+1)(+1) = \frac{+1}{+1} = (-1)(-1) = \frac{-1}{-1} = +1$$

Exemple : $f(x) = (1 - x)(x - 2) = -(x - 1)(x - 2)$

On a le tableau de signes suivant :

$1 - x$					
$x - 2$					
$(x - 1)(x - 2)$					

On peut ainsi résoudre les inéquations suivantes :

- $f(x) \geq 0$ en lisant le tableau de signes : $S =$
- $f(x) < 0$ on a : $S =$
- Ou encore : $f(x) > 0$: $S =$

Remarques :

- Avec cette méthode, nous pouvons résoudre des inéquations dès que nous connaissons une factorisation de la fonction.
- Si l'énoncé n'est pas sous forme factorisée, il faudra commencer par factoriser l'expression puis ensuite on pourra appliquer la méthode

Résumé Méthode 1 :

1. Factoriser
2. Étudier les droites (croissante, décroissance, résoudre à zéro)
3. Tableau de signe
4. Donner la solution

Exercice : Résoudre $(2x-1)(3-x)>0$ et donner l'ensemble solution.

Exercice : Résoudre $4x^2-1>0$ et donner l'ensemble solution.

- **Algèbre Série 12 exercice 1 &Brochure du Collège Voltaire §9 ex 7 & 8**
- **Voir Livre *Notions élémentaires* pour plus d'exercices : p.80 ex 6 b) et e)**

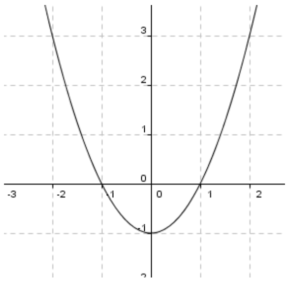
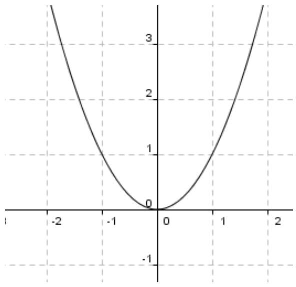
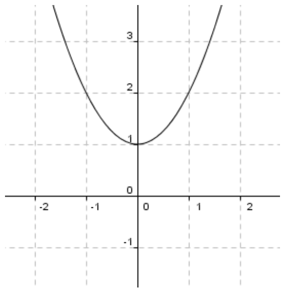
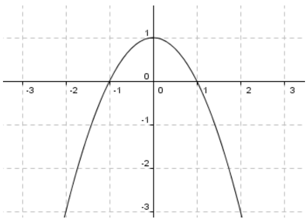
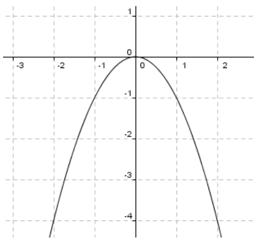
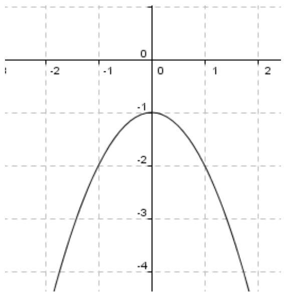
Méthode 2 :

Cette méthode permet d'économiser une ligne dans le tableau de signes.

La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ représente une parabole

- Si $a > 0$: la parabole est convexe (en forme de U)
- Si $a < 0$: la parabole est concave (en forme de ∩)

En fonction du discriminant, il y a trois situations possibles, illustrées dans le tableau suivant :

	$\Delta > 0$: **la parabole coupe deux fois l'axe horizontal.**	$\Delta =$ **0: la parabole coupe une fois l'axe horizontal**	$\Delta < 0$: **la parabole ne coupe jamais l'axe horizontal**
$\boldsymbol{a} > 0$ **Parabole convexe**	 Situation 1	 Situation 2	 Situation 3
$\boldsymbol{a} < 0$ **Parabole concave**	 Situation 4	 Situation 5	 Situation 6

Exercice : Résoudre $(2x - 1)(3 - x) > 0$ et donner l'ensemble solution.

Tableaux des situations :

Situation 1 :

	$]-\infty;x_1[$	x_1	$]x_1;x_2[$	x_2	$]x_2;+\infty[$
$f(x)$	+	0	-	0	+

Situation 4 :

	$]-\infty;x_1[$	x_1	$]x_1;x_2[$	x_2	$]x_2;+\infty[$
$f(x)$	-	0	+	0	-

Situation 2 :

	$]-\infty;x_1[$	x	$]x;+\infty[$
$f(x)$	+	0	+

Situation 5 :

	$]-\infty;x_1[$	x	$]x;+\infty[$
$f(x)$	-	0	-

Situation 3 :

	$]-\infty;+\infty[$
$f(x)$	+

Situation 6 :

	$]-\infty;+\infty[$
$f(x)$	-

➢ **Algèbre Série 12 exercice 2**

Exemple : Résoudre $x^2 - 9 < 0$

Remarque : La méthode 1 de résolution permet de résoudre aussi des inéquations sous forme de fractions. Puisque la règle des signes s'applique pour des multiplications ou des divisions.

Résoudre :

1) $\frac{x-2}{x^2+2x} \geq 0$

Est-ce que certaines valeurs de x posent problème ?

- ***Algèbre Série 12 exercice 4***
- ***Notions élémentaires p.92 &p.98 ex 5***

Méthode 2 pour résolution d'inéquations de degré supérieur à 1 :

Exemples :

1) $x^2 - 3x - 40 \leq 0$
2) $x^3(1 - x^2) < 0$
3) $x^3(x^2 - 3x - 10) < 0$

Elles se résolvent par un tableau de signes, pour cela il faut rapidement représenter les fonctions présentes :

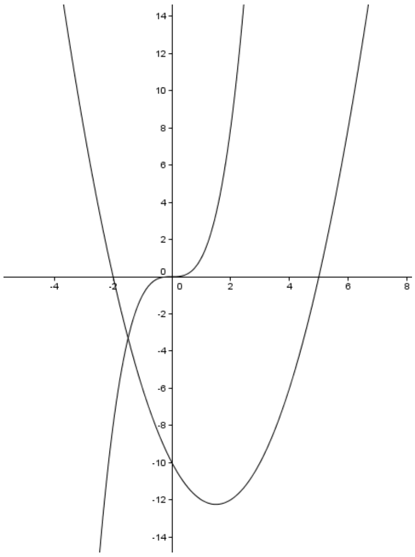
Développons l'exemple 3 :

$$x^3(x^2 - 3x - 10) < 0$$

On peut factoriser l'expression du second degré : $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$

Étudions les deux fonctions principales :

- x^3 est une fonction qui a son zéro en 0, qui est négative avant et positive après
- $x^2 - 3x - 10$ est une parabole convexe, de zéros: 5 et -2



On peut alors écrire le tableau de signe suivant :

		-2		0		5	
x^3	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 3x - 10$	+	0	-	-	-	0	+
$x^3(x^2 - 3x - 10)$	-	0	+	0	-	0	+

Il suffit alors de lire la solution dans la dernière ligne : $S =]-\infty; -2[\cup]0; 5[$

Résumé de la méthode :

1) Factoriser l'expression.

2) Étudier les différents facteurs (droites ou paraboles).

3) Établir un tableau des signes des différents facteurs.

4) Bilan des signes.

5) Donner la réponse.

Appliquons cette méthode à **un exemple** :

Résoudre : $x^2 - 16 < 0$

➢ ***Algèbre Série 12 exercice 3***

§14. Inéquations fractionnaires

Exemples :

1) $\frac{x+1}{x^2} > 0$

2) $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{1}{x+1}$

Méthode : 1) Étudier le domaine de l'inéquation.
2) Faire apparaitre zéro d'un côté de l'inégalité.
3) Simplifier les fractions pour en avoir une seule.
4) Étudier les facteurs dans un tableau de signes et en faire le bilan
5) Donner la solution.

Développons l'exemple 2) : $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{1}{x+1}$

(1) Déterminer le domaine de l'inéquation : $D_f =$

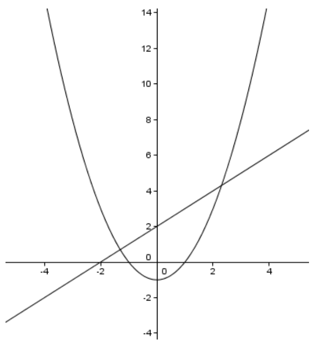
(2) Faire apparaître zéro d'un côté :

(3) Simplifier les factions (dénominateur commun) :

(4) On peut donc étudier les fonctions qui composent le numérateur et le dénominateur :

Représentons rapidement les deux fonctions :

- $x+2$: est une droite croissante, zéro en -2
- x^2-1: parabole convexe, zéros en -1 et 1



x		-2		-1		1	
$x+2$	-	0	+	+	+	+	+
x^2-1	+	+	+	0	-	0	+
$\frac{x+2}{x^2-1}$	-	0	+	/	-	/	+

(5) La solution est donc : $S =$

➢ ***Algèbre Série 12 exercice 4***

§15. Équations irrationnelles

Méthode :

(1) Isoler la racine
(2) Passer l'équation au carré
(3) Développer
(4) Faire apparaitre zéro
(5) Résoudre
(6) Vérifier la (les) solution(s)

Exemple : Résoudre $\sqrt{x+5}+x=+1$

➢ ***Notions élémentaires p. 62 ex 39***

Table des matières