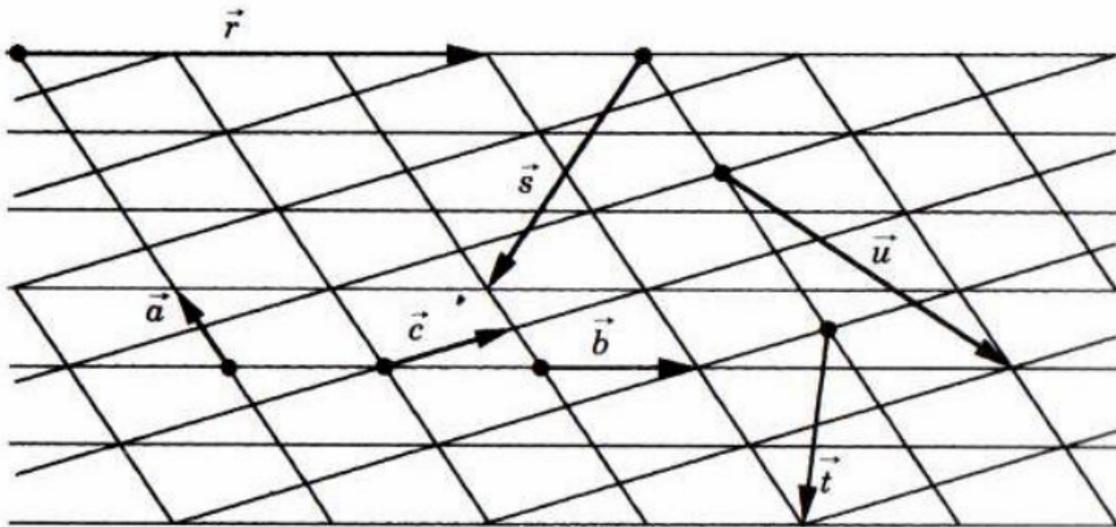


Géométrie vectorielle Série 2

Exercice 1 : Considérons les vecteurs représentés dans la figure suivante :



a) Construire les vecteurs :

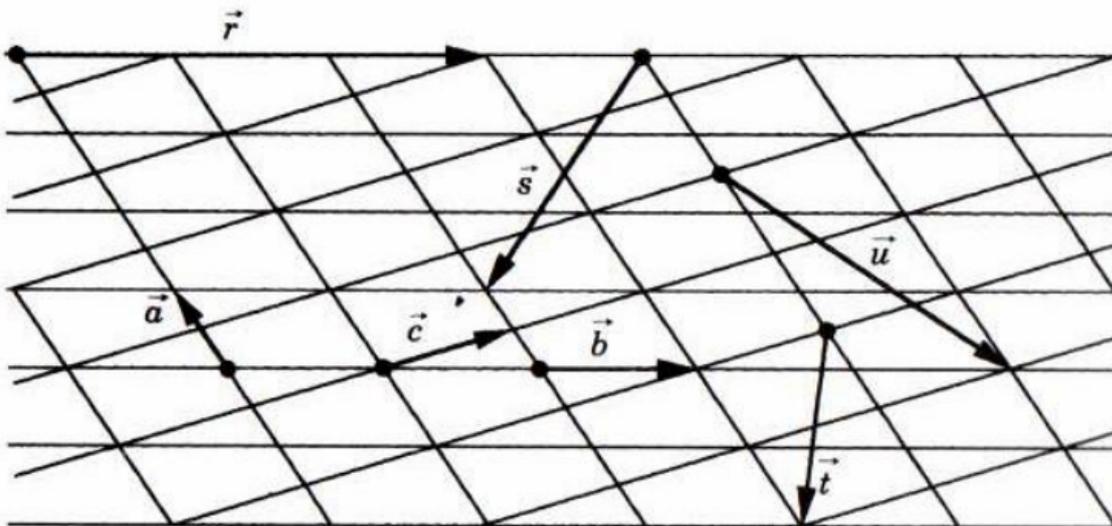
$$\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}, \quad \vec{e} = -2\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{f} = \frac{1}{2}(3\vec{a} - \vec{b}) - \frac{7}{2}\vec{c}$$

b) Exprimer les vecteurs $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ et \vec{u} comme combinaisons linéaires de \vec{a} et \vec{b}

c) Exprimer les vecteurs $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ et \vec{u} comme combinaisons linéaires de \vec{a} et \vec{c}

d) Construire les vecteurs ci-dessous et les exprimer comme combinaisons linéaires de \vec{a} et \vec{b}

$$\vec{x} = 2\vec{t} - \vec{u} + \vec{s}; \quad \vec{y} = -2\vec{r} + \vec{t} + 3\vec{c}; \quad \vec{z} = \frac{4}{3}\vec{r} + \frac{3}{2}\vec{s} - \vec{u}$$



Exercice 2 : Recopier (décalquer) les vecteurs sur une feuille blanche pour faire l'exercice.

On donne trois points non alignés O, A et B .

a) Construire les points C, D et E tels que: $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.

Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?

b) Construire les points F, G et H tels que:

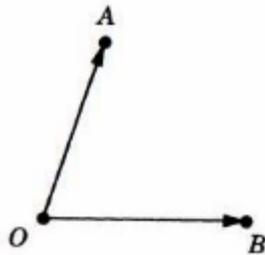
$$\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?

c) Construire les points I, J, K et L tels que:

$$\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble pour points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?



Exercice 3 :

Relativement à une base de V_2 , on donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

Exercice 4 : Relativement à une base de V_2 , on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

Exercice 5 :

a) Trouver deux nombres λ et μ tels que $\vec{x} = \lambda\vec{e}_1 + \mu\vec{e}_2$.

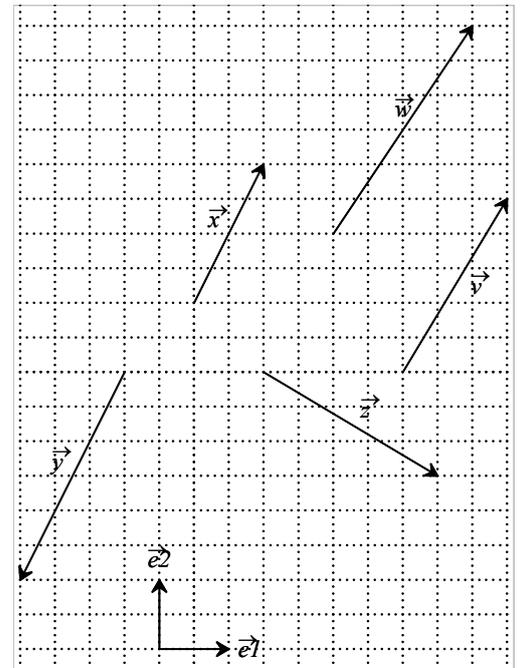
b) Trouver deux nombres α et β tels que $\vec{z} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$.

c) Trouver un nombre k tel que $\vec{y} = k\vec{x}$.

d) Trouver un nombre h tel que $\vec{x} = h\vec{y}$.

e) Trouver un nombre a tel que $\vec{w} = a\vec{v}$.

f) Trouver deux nombres δ et ε tels que $\vec{z} = \delta\vec{x} + \varepsilon\vec{w}$.

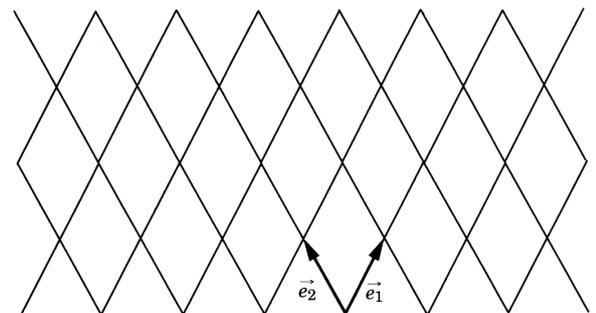


Exercice 6 : Soit $\mathcal{B}(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ une base de V_2 .

a) Dessiner un représentant des vecteurs suivants

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Dessiner un représentant des vecteurs $\vec{v} = \vec{b} + \vec{c}$ et $\vec{u} = 3\vec{b} + 2\vec{c}$ puis donner leurs composantes dans la base \mathcal{B} .

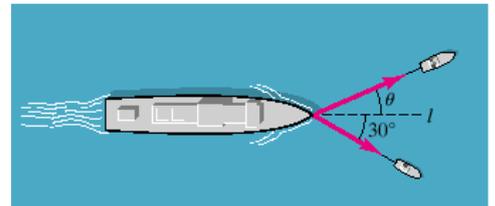


Exercice 7 : Calculer la norme des vecteurs suivants :

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} \quad \vec{b} = -4\vec{j} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$$

Exercice 8 : On donne les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminer le nombre réel k pour que le vecteur $\vec{a} + k\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$.

Exercice 9 : La figure ci-dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port. La trajectoire que suit ce navire est rectiligne. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 [N] sur son câble et fait un angle θ avec la trajectoire du navire. Le plus petit génère une force de 16'000 [N] et fait un angle de 30° avec la trajectoire du navire.



Calculer l'angle θ .

EXERCICES A FAIRE SUR UNE FEUILLE A PART ET NON SUR L'ENONCE

Exercice 10 : Soient A, B, C, D, E et F des points quelconques du plan. Compléter, si possible

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} =$

c) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} =$

e) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} =$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} =$

d) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} =$

f) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} =$

Exercice 11 : Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.

Montrez l'égalité suivante $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Exercice 12 : Compléter les égalités suivantes **sur une feuille quadrillée:**

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

d) $5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

e) $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 6,5 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} =$

f) $-\frac{3}{4} \begin{pmatrix} 6,8 \\ 2/3 \end{pmatrix} =$

Exercice 13 : Déterminer le couple $(x; y)$ qui vérifie:

a) $(3; -1) + (x; y) = (2; 0)$

c) $(x; y) + (x; y) = (6; -2)$

b) $(3; -2) + (x; y) = (-3; 2)$

Exercice 14 :

Déterminer le réel λ qui vérifie :

a) $\lambda(5; 6) = (10; 12)$

c) $\lambda(2; 3) = (3; 2)$

b) $\lambda(-4; 0) = (4; 0)$

Exercice 15 :

Dans \mathbb{R}^2 on considère $\vec{x} = (2; 3)$; $\vec{y} = (-1; 0)$ et $\vec{z} = (2; -3)$.

Calculer : $\vec{e} = \vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{f} = -2\vec{x} + \vec{z}$ et $\vec{g} = \vec{x} + 2\vec{y} - 0,3\vec{z}$.

Exercice 16 :

Montrer que : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, où $A = (-3; 1)$; $B = (1; 3)$; $C = (4; 1)$ et $D = (2; 0)$.

Exercice 17 :

Dans \mathbb{R}^2 on considère $A = (2; 1)$; $B = (6; 4)$ et $C = (2; 6)$.

a) $\|\overrightarrow{AB}\| =$

b) $\|\overrightarrow{AC}\| =$

c) Déduisez de ce qui précède que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 18 :

Dans \mathbb{R}^2 on considère :

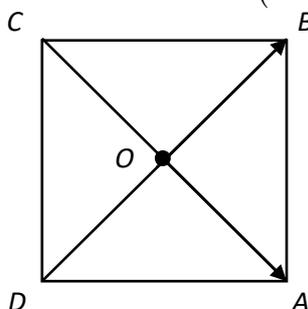
a) $A = (0; 0)$; $B = (-11; 3)$ et $C = (-8; -2)$. Montrer que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

b) $A(0; 0)$; $B(6; 8)$ et $C(3 + 4\sqrt{3}; 4 - 3\sqrt{3})$. Montrer que ABC est équilatéral.

Exercice 19 :

Soit ABCD un carré de centre O. Déterminer dans la base $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ les composantes des vecteurs :

\overrightarrow{OC} , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{BD} , et \overrightarrow{DA} .



Corrigé Géométrie vectorielle Série 2 :

Exercice 2 :

a) La droite (OA) b) La droite parallèle à (OA) passant par B c) La droite (AB)

Exercice 3 : $\alpha = 3$ et $\beta = 2$ **Exercice 4 :** \vec{e} est colinéaire à tous. $/\vec{a}, \vec{d}$ et \vec{h} / \vec{b} et \vec{i} / \vec{c} et \vec{g}

Exercice 5 : a) $\lambda = 1, \mu = 2$ b) $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{2}$ c) $k = -\frac{3}{2}$ d) $h = -\frac{2}{3}$ e) \emptyset f) $\delta = -\frac{21}{2}, \varepsilon = \frac{13}{2}$

Exercice 6 : $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **Exercice 7 :** $\|\vec{a}\| = 5, \|\vec{b}\| = 4, \|\vec{c}\| \cong 8,544; \|\vec{d}\| = 1$

Exercice 8 : $k_1 = \frac{3}{2}$ et $k_2 = -\frac{23}{10}$ **Exercice 9 :** $\sin^{-1}(0,4) \approx 23,6^\circ$

Exercice 10 : a) \overrightarrow{AB} b) \overrightarrow{AF} c) \overrightarrow{AB} d) on ne peut rien faire e) $\vec{0}$ f) $2 \cdot \overrightarrow{EB}$

Exercice 11 :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donc l'égalité de la première ligne est vraie.

Exercice 12 :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5/6 \\ 7/4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 8,5 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -5,1 \\ -0,5 \end{pmatrix}$

Exercice 13 :

a) $(-1; 1)$

b) $(-6; 4)$

c) $(3; -1)$

Exercice 14 :

a) $k \cdot \langle 5; 6 \rangle = \langle 10; 12 \rangle \Leftrightarrow k = 2$

b) $k \cdot \langle -4; 0 \rangle = \langle 4; 0 \rangle \Leftrightarrow k = -1$

c) $k \cdot \langle 2; 3 \rangle = \langle 3; 2 \rangle \Leftrightarrow 2k = 3$ et $3k = 2$, ce n'est pas possible.

Exercice 15 :

$$\vec{x} = \langle 2; 3 \rangle ; \vec{y} = \langle -1; 0 \rangle \text{ et } \vec{z} = \langle 2; -3 \rangle$$

$$\vec{e} = \vec{x} + 2\vec{y} = \langle 2; 3 \rangle + 2 \cdot \langle -1; 0 \rangle = \langle 2 + 2 \cdot (-1); 3 + 2 \cdot 0 \rangle = \langle 0; 3 \rangle$$

$$\vec{f} = -2\vec{x} + \vec{z} = -2 \cdot \langle 2; 3 \rangle + \langle 2; -3 \rangle = \langle -2 \cdot 2 + 2; -2 \cdot 3 - 3 \rangle = \langle -2; -9 \rangle$$

$$\vec{g} = \vec{x} + 2\vec{y} - 0,3\vec{z} = \langle 2; 3 \rangle + 2 \cdot \langle -1; 0 \rangle - 0,3 \cdot \langle 2; -3 \rangle = \langle 2 + 2 \cdot (-1) - 0,3 \cdot 2; 3 + 2 \cdot 0 - 0,3 \cdot (-3) \rangle = \langle -0,6; 3,9 \rangle$$

Exercice 16 :

$$A = \langle -3; 1 \rangle ; B = \langle 1; 3 \rangle ; C = \langle 4; 1 \rangle \text{ et } D = \langle 2; 0 \rangle$$

Montrons que : $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \langle 1; 3 \rangle - \langle -3; 1 \rangle = \langle 4; 2 \rangle$$

$$\overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = \langle 2; 0 \rangle - \langle 4; 1 \rangle = \langle -2; -1 \rangle = -0,5 \cdot \langle 4; 2 \rangle = -0,5 \cdot \overline{AB}$$

Puisque les vecteurs \overline{AB} et \overline{CD} sont multiples l'un de l'autre, ils sont parallèles.

Exercice 17 :

$$A = \langle 2; 1 \rangle ; B = \langle 6; 4 \rangle \text{ et } C = \langle 2; 6 \rangle$$

$$\text{a) } \|\overline{AB}\| = \|\langle 6; 4 \rangle - \langle 2; 1 \rangle\| = \|\langle 4; 3 \rangle\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{b) } \|\overline{AC}\| = \|\langle 2; 6 \rangle - \langle 2; 1 \rangle\| = \|\langle 0; 5 \rangle\| = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$$

c) Puisque les côtés $[AB]$ et $[AC]$ sont de même longueur, le triangle est isocèle.

Exercice 18 :

$$A = \langle 0; 0 \rangle ; B = \langle 6; 8 \rangle \text{ et } C = \langle 3 + 4 \cdot \sqrt{3}; 4 - 3 \cdot \sqrt{3} \rangle$$

a) Pour montrer que le triangle ABC est équilatéral, il faut montrer que la longueur des trois côtés est la même.

$$\|\overline{AB}\| = \|\langle 6; 8 \rangle\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\|\overline{AC}\| = \|\langle 3 + 4 \cdot \sqrt{3}; 4 - 3 \cdot \sqrt{3} \rangle\| = \sqrt{(3 + 4 \cdot \sqrt{3})^2 + (4 - 3 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\|\overline{BC}\| = \|\langle 3 + 4 \cdot \sqrt{3}; 4 - 3 \cdot \sqrt{3} \rangle - \langle 6; 8 \rangle\| = \sqrt{(-3 + 4 \cdot \sqrt{3})^2 + (-4 - 3 \cdot \sqrt{3})^2} = \sqrt{100} = 10$$

Le triangle ABC est équilatéral, car les trois côtés sont de même longueur.

Exercice 19 :

$$\overline{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overline{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \overline{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \overline{BD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \overline{DA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$