$$B(n;p) = C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$n =$

$p =$

$k =$

Probabilités

La fonction f est appelée ***densité de probabilité*** attachée à la variable aléatoire X si elle vérifie les conditions suivantes :

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

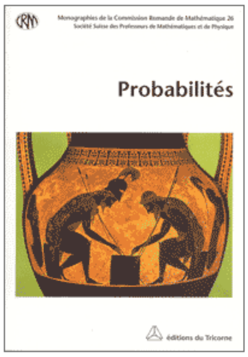
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \big(E(X)\big)^2$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Matériel :



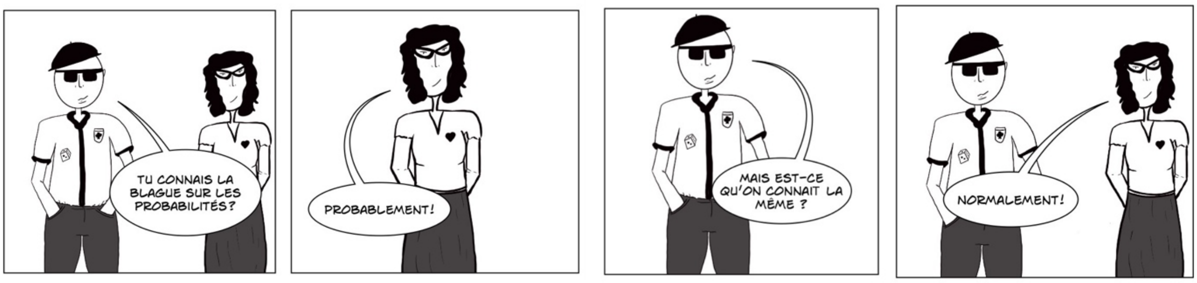
- Monographie CRM n°26 : *Probabilités*, pour la théorie et les exercices <u>en cours</u>
- Formulaires et tables CRM, pour **les épreuves** (et cours)
- Ce polycopié pour la théorie
- Les séries intitulées "Probabilités Série ... "
- Cours de Calcul des probabilités de 3e pour prérequis.

En 3ème année, nous cherchions à résoudre des problèmes de la forme :

- De combien de manières peut-on tirer 5 cartes d'un jeu de 36 cartes ? (et en rajoutant des contraintes : que des figures, qu'une seule couleur, etc.)
- Quelle est la probabilité d'obtenir r trois fois de suite un 6 lorsque l'on lance un dé normal (équilibré) ?

Cette année, nous allons résoudre d'autres types de problèmes :

- *Un arrêt de tram est desservi toutes les 10 minutes. Notons X la variable aléatoire indiquant le temps d'attente (en minutes) jusqu'à l'arrivée du prochain tram lorsque nous nous rendons à l'arrêt sans tenir compte de l'horaire. Quelle est la probabilité d'attendre entre 6 et 8 minutes ?*



Exercices :

a) On lance un dé 2 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 1 fois un six ?

b) On lance un dé 3 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 fois un six ?

c) On lance un dé 8 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 5 fois un six.

1. La loi binomiale

Exemple : *On lance un dé 8 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 5 fois un six.*
Imaginons tout d'abord qu'on obtienne 5 fois six (S) au début. On a alors :

$$P(SSSSS\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Les six peuvent évidemment être répartis autrement ($S\bar{S}SS\bar{S}S\bar{S}S$ par exemple). Or il y a $C_5^8 = \binom{8}{5}$ manières différentes de répartir les 5 S dans 8 places. On a finalement :

$$P = C_5^8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cong 0{,}42\%$$

Généralisons ce résultat :

On répète n fois une même épreuve (les épreuves successives étant indépendantes[1]) et on cherche la probabilité P qu'un événement de probabilité p apparaisse k fois. On a :

$$P = C_k^n\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

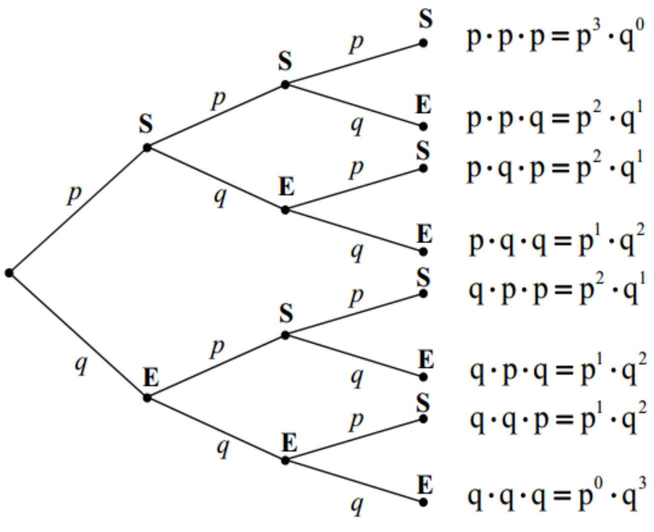
Nous appellerons cette formule la ***loi binomiale*** et nous noterons :

$$\boldsymbol{B(n;p) = C_k^n\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}, \qquad \boldsymbol{C_k^n = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

C'est donc la probabilité d'obtenir $\boldsymbol{k}$ **succès** lors de $\boldsymbol{n}$ **épreuves** avec $\boldsymbol{p}$ = **probabilité de succès lors d'une épreuve.**
On peut noter : $q = 1-p = probabilité\ d'échec$ (E) lors d'une épreuve
La formule devient :

$$\boldsymbol{B(k;n;p) = C_k^n\cdot p^k\cdot q^{n-k}}$$

Illustration de la formule avec $n = 3$:



$k = 0 : p^0\cdot q^3 = 1\cdot p^0\cdot q^{3-0} = C_0^3\cdot p^0\cdot(1-p)^{3-0}$

$k = 1 : 3p^1\cdot q^2 = 3\cdot p^1\cdot q^{3-1} = C_1^3\cdot 1\cdot(1-p)^{3-1}$

[1] Rappel: On dit que deux événements A et B d'un univers U sont ***indépendants*** si $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Exercice :

Quelle est la probabilité d'obtenir 7 piles en lançant 10 fois une pièce de monnaie ?

Exercice :

Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois un 6 en jetant 5 fois un dé ?

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Loi binomiale

Cette loi s'applique aux épreuves de type tirages avec remise.

On note A un événement de probabilité p. La variable aléatoire X indique le nombre de fois que A se réalise lors de n tirages avec remise (épreuves successives indépendantes).

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$, et on a

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

➢ ***Probabilités Série 1***

1. Variables aléatoires discrètes

Dans les applications des probabilités, en particulier à propos des jeux de hasard étudiés par Blaise Pascal et Pierre de Fermat, on s'intéresse à des variables comme le montant d'un gain ou d'une perte, dont les valeurs sont déterminées par le hasard.

Définitions : Soit U un univers fini.

- On appelle ***variable aléatoire*** une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue possible.
- Si l'ensemble des valeurs de cette fonction est fini ou dénombrable, on dit que cette variable aléatoire est ***discrète***. On note X une variable aléatoire discrète et $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ les valeurs qu'elle prend.
- On appelle ***loi de probabilité*** ou ***distribution*** de la variable aléatoire X l'ensemble de tous les couples $(x_i; p_i)$, où p_i est la probabilité associée à x_i. On note : $p_i = P(X = x_i)$.
  On a $\sum_i p_i = 1$

Exemple 1 : *On jette une pièce de monnaie deux fois de suite.*

L'univers est : $U = \{(p;p),(p;f),(f;p),(f;f)\}$.
Notons X *la variable aléatoire indiquant le nombre de faces obtenues.*

$$X: \begin{cases} (p;p) \mapsto 0 \\ (p;f) \mapsto 1 \\ (f;p) \mapsto 1 \\ (f;f) \mapsto 2 \end{cases}$$

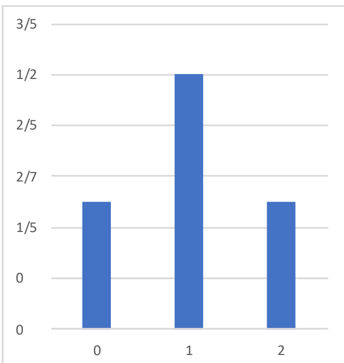
Cette variable aléatoire peut prendre diverses valeurs : il s'agit donc bien d'une variable. Comme la valeur que prend X *dépend de l'issue réalisée donc du hasard,* X *est donc aléatoire. De plus, comme* X *ne peut prendre que trois valeurs* ($0, 1$ *ou* 2)*, elle est discrète. Il est possible de calculer la probabilité que la variable aléatoire prenne une valeur donnée. Par exemple la probabilité que* X *prenne la valeur* 0 *est* $\frac{1}{4}$.

Nous pouvons établir le tableau de distribution de X *:*

x_i	0	1	2	Σ
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

On remarque que $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$.

On peut visualiser cette distribution à l'aide d'un diagramme en bâtons :



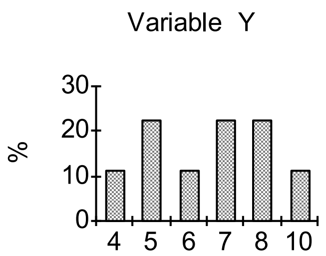
Exemple 2 : *Une urne contient trois boules numérotées* $2{,}3$ *et* 5.
On tire successivement avec remise deux boules de cette urne.
On a : $U = \{(2;2),(2;3),(2;5),(3;2),(3;3),(3;5),(5;2),(5;3),(5;5)\}$

Notons Y *la variable aléatoire indiquant la somme des points obtenus.*
On remarque que Y *ne peut prendre que six valeurs (4,5,6,7, 8 ou 10). Elle est donc bien discrète.*

On obtient le tableau de distribution de Y*:*

y_i	4	5	6	7	8	10	Σ
p_i							

On remarque que $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}=1.$ *On a le diagramme en bâtons suivant :*



Exemple 3 : *Si on lance une fois un dé, on peut donner la loi de probabilité sous la forme d'un tableau :*

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Si on gagne 5 francs ou que l'on perd un franc suivant que 6 apparaisse ou non, le tableau de la distribution du gain devient :

x_i	-1	5
p_i	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Exercice *: On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés.* $U = \{(1;1);(1;2);\ldots;(6;6)\}$

Définissons une variable aléatoire X *par la fonction :* $X\colon\begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ (r;v) \longmapsto r+v \end{cases}$ *donc* $X(r;v) = r+v$
On dit que la variable aléatoire X *représente "la somme des deux dés". L'ensemble des valeurs que cette variable aléatoire peut prendre est évidemment :* $\{2;3;..;12\}$. *C'est l'ensemble des images de la fonction* X.

Etablir le tableau de distribution de X.

Quels sont les cas possibles ?

x_i	*les cas favorables*	*total*
2	$(1;1)$	1
3	$(1;2)$, $(2;1)$	2
4	$(1;3)$, $(2;2)$, $(3;1)$	3
5	$(1;4)$, $(2;3)$, $(3;2)$, $(4;1)$	4
6	$(1;5)$, $(2;4)$, $(3;3)$, $(4;2)$, $(5;1)$	5
7	$(1;6)$, $(2;5)$, $(3;4)$, $(4;3)$, $(5;2)$, $(6;1)$	6
8	$(2;6)$, $(3;5)$, $(4;4)$, $(5;3)$, $(6;2)$	5
9	…	…
10		
11		
12		

On obtient donc la loi de probabilités suivante :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(X = x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	0

On remarque par exemple que $P(X = 13) = 0$ car la valeur 13 est impossible pour l'expérience considérée.

Probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre deux réels a et b:

Par exemple, dans le tableau ci-dessus : $P(6 < x \leq 10) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} = \frac{18}{36}$

Mais ceci est équivalent à

$$P(6 < x \leq 10) = P(x \leq 10) - P(x \leq 6) =$$

$$\left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36}\right) - \left(\frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36}\right) = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36}$$

Et d'une manière générale, on a la relation :

$$\boxed{P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)}$$

- ***Probabilités Série 2 exercices 1 à 4***

2. Espérance, variance, écart-type

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_i, \dots$ On appelle ***moyenne*** ou ***espérance mathématique*** de X le nombre $E(X)$ défini par:

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_ix_i + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

L'espérance est aussi notée μ.

Exemple 1 :

Cent vingt élèves se sont présentés à un examen de mathématique. Les résultats enregistrés sont les suivants :

Notes x_i	2	3	4	5	6
Nombre d'élèves n_i	1	10	31	66	12
f_i	$\frac{1}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{66}{120}$	$\frac{12}{120}$

Le rapport $f_i = \frac{n_i}{120}$ est appelé la **fréquence** de la note x_i

On peut calculer la moyenne μ de l'examen de la manière suivante :

$$\mu = \frac{1 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 31 \cdot 4 + 66 \cdot 5 + 12 \cdot 6}{120} = \frac{1}{120} \cdot 2 + \frac{10}{120} \cdot 3 + \frac{31}{120} \cdot 4 + \frac{66}{120} \cdot 5 + \frac{12}{120} \cdot 6 = 4{,}65$$

Pour calculer cette **moyenne**, on peut multiplier chaque note par sa fréquence et en faire la somme.

On a donc : $\mu = \sum_{i=1}^{n} f_ix_i$

Ce tableau peut être vu comme une loi de probabilité puisque $\sum_i f_i = 1$ et les fréquences considérées comme des probabilités.

On les notera p_i. On a alors :

Notes x_i	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{1}{120}$	$\frac{10}{120}$	$\frac{31}{120}$	$\frac{66}{120}$	$\frac{12}{120}$	

Remarque : Cette moyenne ne dépendant pas du nombre n de lancers. Il est possible de compléter le tableau de distribution de X pour y faire figurer l'espérance mathématique.

Exemple 2 : *Les dés honnêtes et les autres :*

On lance un dé une fois. Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre de points affichés par le dé.

Une telle distribution est dite uniforme.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Considérons maintenant un dé pipé, c'est-à-dire déséquilibré dans le but de faire apparaître certaines faces plus souvent que d'autres.

Notons Y la variable aléatoire indiquant le nombre de points affiché par ce nouveau dé et supposons que la distribution de Y soit donnée par le tableau ci-dessous.

y_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$

Question :

En lançant un très grand nombre de fois l'un ou l'autre de ces dés, quelle sera en moyenne le nombre de points obtenus ?

- Commençons avec le dé équilibré : En lançant n fois ce dé, nous devrions obtenir théoriquement : $\frac{n}{6}$ fois le 1, $\frac{n}{6}$ fois le 2, ... et $\frac{n}{6}$ fois le 6

  La moyenne des points serait donc :

$$\mu_X = \frac{\frac{n}{6}\cdot 1 + \frac{n}{6}\cdot 2 + \frac{n}{6}\cdot 3 + \frac{n}{6}\cdot 4 + \frac{n}{6}\cdot 5 + \frac{n}{6}\cdot 6}{n} = \frac{7}{2} = 3,5$$

- En utilisant un dé pipé, cette moyenne serait alors :

$$\mu_Y = \frac{n\cdot\frac{2}{18}\cdot 1 + n\cdot\frac{2}{18}\cdot 2 + n\cdot\frac{3}{18}\cdot 3 + n\cdot\frac{3}{18}\cdot 4 + n\cdot\frac{4}{18}\cdot 5 + n\cdot\frac{4}{18}\cdot 6}{n} = \frac{71}{18} \cong 3,94$$

En moyenne, nous pouvons nous attendre à obtenir environ $0,44$ points de plus avec le dé pipé qu'avec le dé équilibré.

Remarque : Ces moyennes ne dépendant pas du nombre n de lancers. Il est possible de compléter le tableau de distribution de X pour y faire figurer l'espérance mathématique.

Pour le dé équilibré :

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	Σ
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
$p_i \cdot x_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{21}{6} = 3{,}5$

Pour le dé pipé :

y_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	Σ
p_i	$\frac{2}{18}$	$\frac{2}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{4}{18}$	1
$p_i \cdot Y$	$\frac{2}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{12}{18}$	$\frac{20}{18}$	$\frac{24}{18}$	$\frac{71}{18} \cong 3{,}94$

Définitions :

- La ***variance*** de X, notée $V(X)$ est, en notant $\mu = E(X)$:

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-m)^2$$

- ***L'écart-type*** de X, noté $\sigma(X)$ est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (même unité que X)

Pour introduire cette notion, nous allons étudier un exemple :

Exemple :

Considérons les résultats de deux examens donnés par les tableaux suivants :

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{66}{100}$	$\frac{10}{100}$

y_i	4	5	6
q_i	$\frac{36}{100}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{11}{100}$

On note X la variable aléatoire associée aux notes du premier examen et Y celle associée au deuxième. Calculons maintenant la moyenne de ces variables aléatoires :

$$\mu_X = \sum_i p_i x_i = 2\cdot\frac{1}{100} + 3\cdot\frac{9}{100} + 4\cdot\frac{14}{100} + 5\cdot\frac{66}{100} + 6\cdot\frac{10}{100} = 4{,}75$$

$$\mu_Y = \sum_i q_i y_i = 4\cdot\frac{36}{100} + 5\cdot\frac{53}{100} + 6\cdot\frac{11}{100} = 4{,}75$$

Les moyennes des deux examens sont identiques alors que les résultats sont différents.

Conclusion : *La moyenne ne donne pas d'information sur la dispersion des résultats autour de la moyenne.*

Pour l'estimer, on essaye de quantifier la manière dont les notes sont réparties autour de la moyenne.

On obtient :

$x_i - \mu_X$	$-2{,}75$	$-1{,}75$	$-0{,}75$	$0{,}25$	$1{,}25$
p_i	$\frac{1}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{66}{100}$	$\frac{10}{100}$

$y_i - \mu_Y$	$-0{,}75$	$0{,}25$	$1{,}25$
q_i	$\frac{36}{100}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{11}{100}$

Le calcul de la moyenne de ces écarts donne 0 *car les écarts négatifs sont exactement compensés par les écarts positifs, ce qui n'amène aucun renseignement sur la dispersion.*

On choisit de calculer ***le carré des écarts à la moyenne*** $(\boldsymbol{X-\mu})^2$.

On obtient alors les distributions suivantes :

$(x_i - \mu_X)^2$	$\frac{121}{16}$	$\frac{49}{16}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{16}$
p_i	$\frac{1}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{14}{100}$	$\frac{66}{100}$	$\frac{10}{100}$

$(y_i - \mu_Y)^2$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{25}{16}$
q_i	$\frac{36}{100}$	$\frac{53}{100}$	$\frac{11}{100}$

Calculons maintenant la moyenne de ces nouvelles variables aléatoires :

$$E[(X-\mu_X)^2] = \frac{121}{16}\cdot\frac{1}{100} + \frac{49}{16}\cdot\frac{9}{100} + \frac{9}{16}\cdot\frac{14}{100} + \frac{1}{16}\cdot\frac{66}{100} = \frac{1004}{1600} = 0{,}6275$$

$$E[(Y-\mu_Y)^2] = \frac{9}{16}\cdot\frac{36}{100} + \frac{1}{16}\cdot\frac{53}{100} + \frac{25}{16}\cdot\frac{11}{100} = \frac{652}{1600} = 0{,}4075$$

Ces nombres sont une mesure de la dispersion des notes autour de la moyenne. On voit que les notes du deuxième examen sont globalement plus proches de la moyenne.

Remarques :

- Il serait aussi possible de mesurer le degré de dispersion en remplaçant $(x_i-\mu)^2$ par $|x_i-\mu|$ dans la formule de la variance. Ce choix a été fait pour des raisons théoriques essentiellement.

- L'écart type est une mesure de la dispersion plus significative que la variance. En effet, si X est une variable aléatoire représentant une distance exprimée en mètres, $V(X)$ est en m^2 alors que l'écart type σ est bien, quant à lui, exprimé en mètres.

Formule de König :
$\boldsymbol{V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - \mu^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2}$

Rappels :

$$\boldsymbol{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_ix_i + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$$

$$\boldsymbol{V(X)} = E[(X-\mu)^2] = p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2$$

Preuve :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(p_ix_i^2 - 2\mu p_ix_i + \mu^2 p_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2\mu \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_ix_i}_{=\mu} + \mu^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_ix_i^2 - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Variable aléatoire

On note X une variable aléatoire, $E(X)$ sa moyenne ou espérance, $V(X)$ sa variance et $S(X)$ son écart type.

Autres notations : $M(X)$ ou μ pour la moyenne, $\mathrm{Var}(X)$ pour la variance, σ pour l'écart type.

Variable aléatoire discrète

Si la variable aléatoire X prend les valeurs x_1, x_2, x_3, ... avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ... telles que $\boxed{\sum_i p_i = 1}$, alors

$E(X) = \sum_i p_ix_i$	$V(X) = \sum_i p_i\big(x_i - E(X)\big)^2 = \sum_i p_ix_i^2 - E^2(X)$	$S(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : *Un jeu consiste à lancer un palet aussi près que possible d'une ligne située à 10 m du lanceur. En moyenne, un joueur obtient les résultats (arrondis) suivants : il lance à 2 m de la ligne de référence 4 fois sur 10, à 1 m de cette ligne 5 fois sur 10 et sur cette ligne une fois sur 10. Calculer la distance moyenne des jets de ce joueur, sa variance et son écart type.*

On a :

$\boldsymbol{x_i}$	2	1	0	Σ
$\boldsymbol{p_i}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	1
$\boldsymbol{p_i x_i}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{5}{10}$	0	$\frac{13}{10} = 1{,}3 = E(X)$
$\boldsymbol{p_i x_i^2}$	$\frac{16}{10}$	$\frac{5}{10}$	0	$\frac{21}{10} = 2{,}1 = E(X^2)$

$$\mathrm{E(X)} = 2\mathrm{m} \cdot \frac{4}{10} + 1\mathrm{m} \cdot \frac{5}{10} + 0\mathrm{m} \cdot \frac{1}{10} = \frac{13}{10}\mathrm{m} = 1{,}3\mathrm{m}$$

$$\mathrm{V(X)} = (2\mathrm{m} - 1{,}3\mathrm{m})^2 \cdot \frac{4}{10} + (1\mathrm{m} - 1{,}3\mathrm{m})^2 \cdot \frac{5}{10} + (0\mathrm{m} - 1{,}3\mathrm{m})^2 \cdot \frac{1}{10}$$

$$= (0{,}7\mathrm{m})^2 \cdot \frac{4}{10} + (-0{,}3\mathrm{m})^2 \cdot \frac{5}{10} + (-1{,}3\mathrm{m})^2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}49\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1}{10} + 0{,}09\mathrm{m}^2 \cdot \frac{5}{10} + 1{,}69\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}41\mathrm{m}^2$$

Avec la formule de König, le calcul de la variance est plus simple :

$$\mathbf{V(X)} = \mathbf{E}\left(\mathbf{X}^2\right) - \mathbf{E(X)}^2 = (2\mathrm{m})^2 \cdot \frac{4}{10} + (1\mathrm{m})^2 \cdot \frac{5}{10} + (0\mathrm{m})^2 \cdot \frac{1}{10} - (1{,}3\mathrm{m})^2$$

$$= 4\mathrm{m}^2 \cdot \frac{4}{10} + 1\mathrm{m}^2 \cdot \frac{5}{10} - 1{,}69\mathrm{m}^2 = 1{,}6\mathrm{m}^2 + 0{,}5\mathrm{m}^2 - 1{,}69\mathrm{m}^2 = 0{,}41\mathrm{m}^2$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} = \sqrt{0{,}41\ \mathrm{m}^2} = 0{,}6403\ \mathrm{m}$$

On voit que la variance est exprimée en m^2, ce qui ne permet pas de comparer avec les valeurs prises par la variable aléatoire X. Par contre, l'écart type σ est exprimé en mètres, ce qui permet cette comparaison.

➢ ***Probabilités Série 2 exercices 5 à 12***

Que peut-on encore trouver dans la table CRM ?

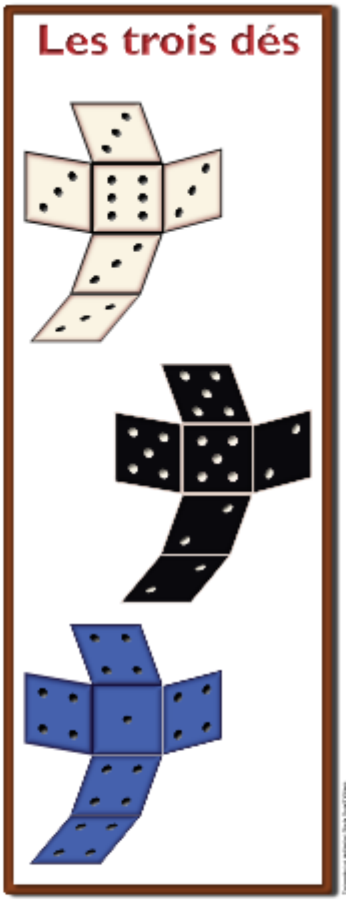
Propriétés de la moyenne et de la variance

On note X et Y deux variables aléatoires, k un réel et K la variable aléatoire constante correspondante, c'est-à-dire telle que $P(K = k) = 1$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$E(KX) = kE(X)$	$E(K) = k$	$E(X+K) = E(X) + k$
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)\,E(Y)$			

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$	$V(KX) = k^2V(X)$	$V(K) = 0$	$V(X+K) = V(X)$
Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$			

Exercice : Déterminer la distribution, l'espérance, la variance et l'écart-type pour les trois dés suivants :



Cas particulier de la loi binomiale :

Considérons une série de n épreuves successives indépendantes.

Pour chacune de ces n épreuves, nous avons deux possibilités : soit l'événement A se réalise avec une probabilité p, soit l'événement A ne se réalise pas. On a: $p(A) = p$ et $p(\bar{A}) = 1 - p$.

Notons X la variable aléatoire indiquant le nombre k de réalisations de l'événement A dans la série de n épreuves. Nous savons que $p(X = k) = C_k^n p^k\,(1-p)^{n-k}, k = 0,1,2, \dots, n$.

Question : Quelle est l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale ?

Exemple : *Dans une famille de $n = 4$ enfants, on admet que la probabilité d'avoir un garçon est de $p = \frac{1}{2}$.*

Si X représente le nombre de garçons parmi les 4 enfants, alors on a:

$$P(X=0) = \frac{4!}{0!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625$$

$$P(X=1) = \frac{4!}{1!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}25$$

$$P(X=2) = \frac{4!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}375$$

$$P(X=3) = \frac{4!}{3!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0{,}25$$

$$P(X=4) = \frac{4!}{0!\,4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0{,}0625$$

Remarque : X suit une loi binomiale.

On a: $E(X) = 0{,}25 + 2\cdot 0{,}375 + 3\cdot 0{,}25 + 4\cdot 0{,}0625 = 2$ *(normal !)* $V(X) = 1$ $\sigma(X) = 1$

Proposition :

Dans le cas de la loi binomiale, on a: $E(X) = np$; $V(X) = np(1-p)$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Sans démonstration.

Vérification dans notre exemple :

$E(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ *et* $V(X) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$

- **Probabilités Série 2 exercices 13 à 15**

3. Variables aléatoires continues

Définition :

Une ***variable aléatoire*** X est dite **continue** si l'ensemble des valeurs qu'elle prend est un intervalle réel.

Exemple : *la "marmite" (Course de l'escalade)*

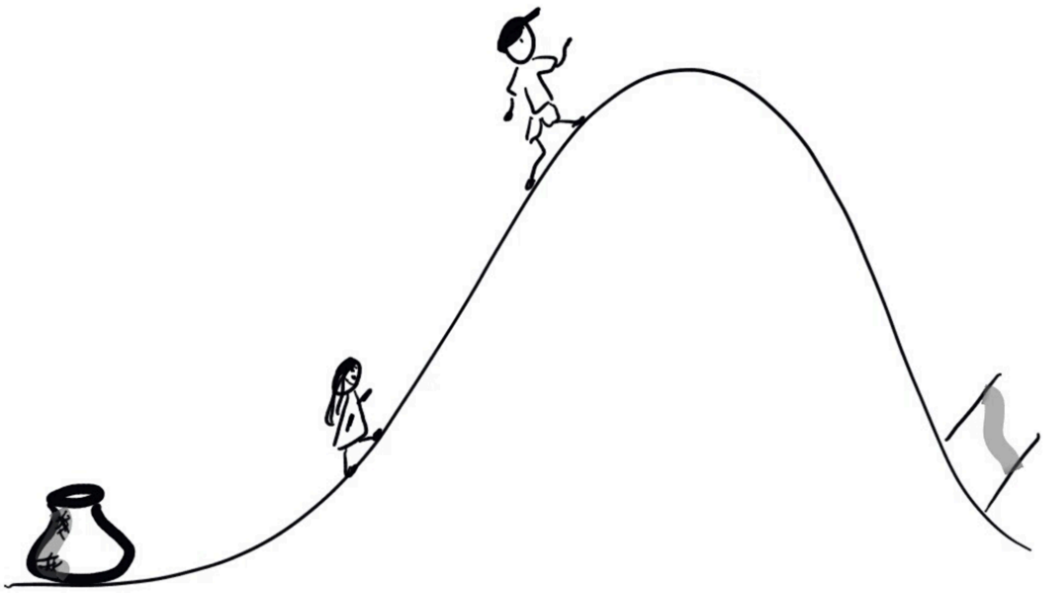
Notons X la variable indiquant le temps exact (en minutes) que met un concurrent choisi au hasard pour terminer la course de l'escalade.

Il est évident que $p(X = 2) = 0$ car il n'est pas possible de terminer cette course en 2 minutes.

D'autre part, $p(X = 80) = 0$. Cette probabilité est elle aussi nulle, même s'il est effectivement possible de terminer cette course en 80 minutes. Cela tient au fait qu'il y a une infinité de valeurs possibles pour X: si nous attribuons une probabilité non nulle à chacune de ces valeurs, la somme de toutes ces probabilités dépasserait 100%.

Dans cette situation, nous avons des probabilités non nulles lorsqu'elles sont attribuées à des laps de temps, par exemple lorsqu'elles sont de la forme $p(79 < X < 81)$.

(Dans ce cas, "<" peut être remplacé par "≤" sans que la probabilité soit modifiée.)



De manière générale, ces calculs se font à l'aide de la notion de densité de probabilité.

Définition : La fonction f est appelée ***densité de probabilité*** attachée à la variable aléatoire X si elle vérifie les conditions suivantes :

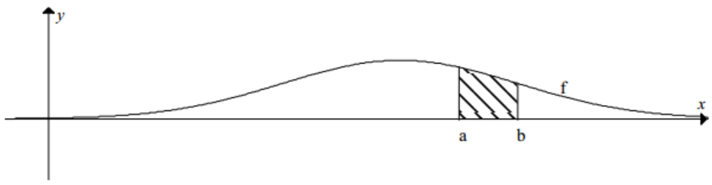
1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Propriété : $p(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

Définition : On appelle ***fonction de répartition*** *de la variable aléatoire X la fonction définie par :*

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Illustration :



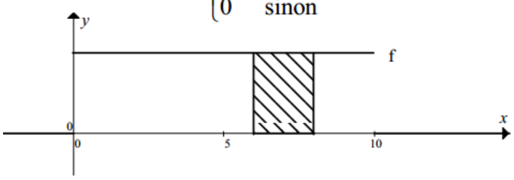
Remarques :

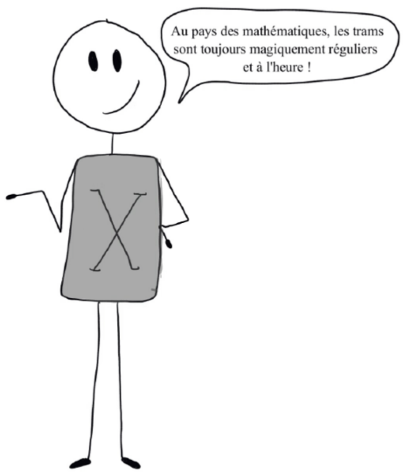
- La probabilité que X prenne une valeur comprise entre a et b correspond à l'aire du domaine hachuré.
- L'aire totale sous f mesure 1 (100%).
- $p(X = a) = \int_a^a f(x)dx = 0$.

Exemple :

Un arrêt de tram est desservi toutes les 10 minutes. Notons X la variable aléatoire indiquant le temps d'attente (en minutes) jusqu'à l'arrivée du prochain tram lorsque nous nous rendons à l'arrêt sans tenir compte de l'horaire.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$





Les probabilités suivantes sont évidentes :

- $p(X \leq 10) = 100\%$
- $p(X > 10) = 0$
- $p(X < 0) = 0$
- $p(X \leq 5) = 50\%$

La probabilité d'attendre entre 6 et 8 minutes est :

$$p(6 < X < 8) = \int_6^8 f(x)dx = \left[\frac{x}{10}\right]_6^8 = \frac{1}{5} = 20\%$$

Rappels du cas discret :

$$\boldsymbol{E(X)} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_ix_i + \cdots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

$$\boldsymbol{V(X)} = E[(X-\mu)^2] = p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-\mu)^2$$

Dans le cas continu, on remplace p_i par $f(x)dx$ et la somme par une intégrale.

On définit :

Si f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X, alors :

1) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \mu$
2) $V(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$
3) $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

La formule de König *est aussi valable :*

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \mu^2$$

Preuve :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2x\mu + \mu^2) f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \mu^2$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Variable aléatoire continue

On note f une fonction telle que $f(x) \geq 0$ pour tout x réel et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

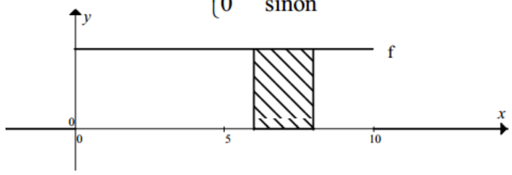
On dit que f est la *densité de probabilité* associée à la variable aléatoire continue X si $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

On dit que F est la *fonction de répartition* associée à X si $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$	$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(x - E(X)\right)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E^2(X)$
$S(X) = \sqrt{V(X)}$	

Exemples de calculs (reprise de l'exemple précédent, attente à l'arrêt de tram) :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



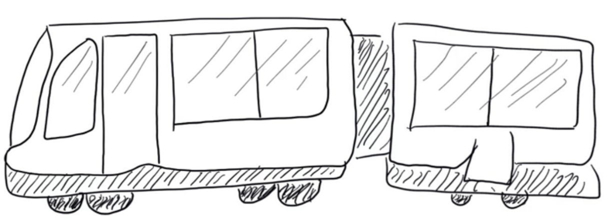
La fonction de répartition est :

$E(X) =$

L'attente moyenne est de minutes.

$V(X) =$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \cong 2{,}89\ minutes$



➢ ***Probabilités Série 3 exercices 1 à 3***

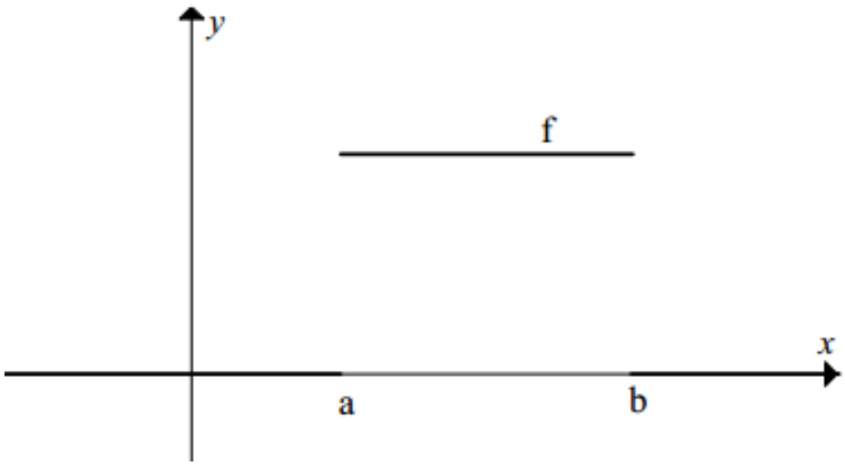
4. Quelques exemples de lois continues

5.1 La loi uniforme

On dit que la variable aléatoire X suit une loi uniforme de paramètres a et b si sa densité de probabilité est la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, si\ a \leq x \leq b \\ 0 \quad\quad , sinon \end{cases}$$

Illustration :



Sa **fonction de répartition** est : $F(x) = \begin{cases} 0 & ; si\ x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & ; si\ a \leq x \leq b \\ 1 & ; si\ x > b \end{cases}$

La moyenne de cette loi est : $\mu = \frac{a+b}{2}$ et sa variance est : $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Exercice :

a) Vérifier que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

b) Démontrer les formules de la moyenne et de la variance.

c) Vérifier la formule de la fonction de répartition.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

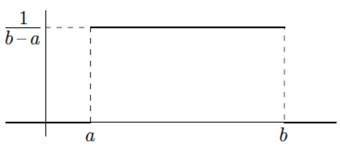
Quelques lois de probabilité continues

On note f la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X et F sa fonction de répartition.

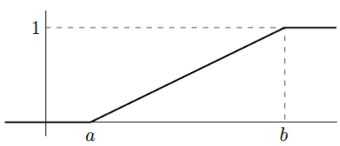
Loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme de paramètres a et b, notée $\mathcal{U}(a\,;b)$, si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



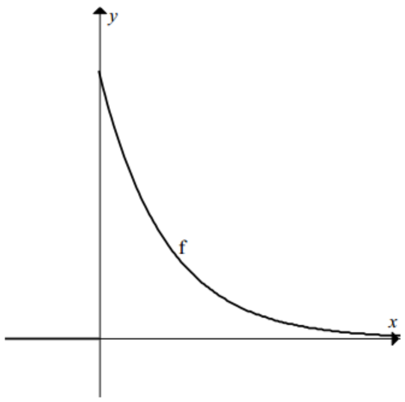
- ***Probabilités Série 3 exercices 1, 2, 4 et 6***

5.2 La loi exponentielle

On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) si sa densité de probabilité est la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, si\ x \geq 0 \\ 0, si\ x < 0 \end{cases}$$

Illustration :



La moyenne de cette loi est : $\mu = \frac{1}{\lambda}$ et sa variance est : $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

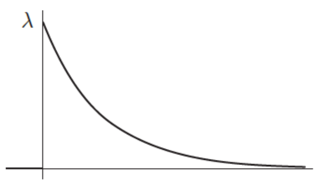
Exercice : Vérifier que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

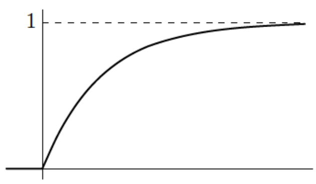
Loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ positif, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

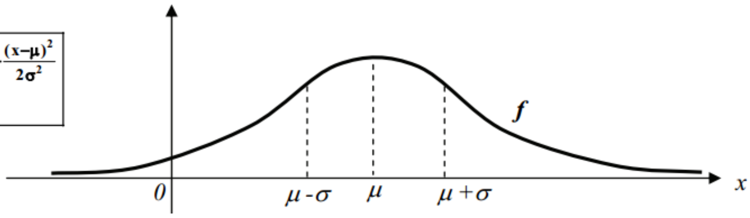


- ***Probabilités Série 3 exercices 6 et 8***

5.3 La loi normale de Laplace-gauss

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de moyenne μ et d'écart-type σ ($\sigma > 0$) si sa densité de probabilité est la fonction :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



Remarques :

- Cette loi se note en général $N(\mu; \sigma)$
- La fonction f est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par la moyenne μ
- Cette fonction est souvent appelée "courbe en cloche"
- La fonction f admet deux points d'inflexion (changement de courbure) en $\mu \pm \sigma$
- La fonction f est continue et possède donc des primitives mais il n'est pas possible d'exprimer ces primitives sous forme analytique.

Cette dernière remarque signifie que pour calculer la probabilité que X prenne une valeur située entre a et b, il faut calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ par des méthodes d'approximations successives.

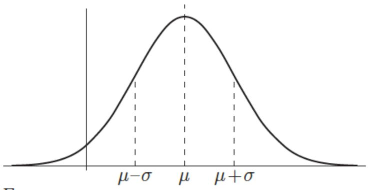
Les résultats de ces calculs se trouvent dans la table CRM pour la loi $N(0; 1)$ appelée loi normale centrée et réduite.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

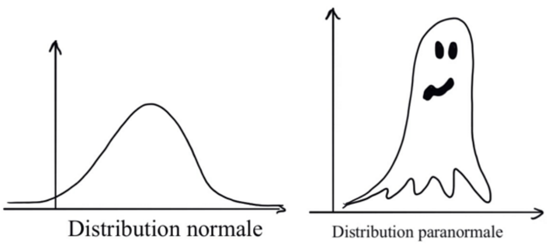
Loi normale de Laplace-Gauss

On dit que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, notée $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$, si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Il n'existe pas de forme analytique pour F.

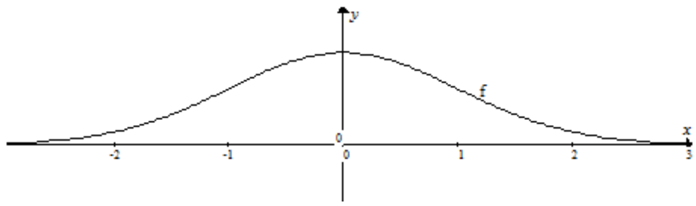


Moyenne et variance de quelques lois

	moyenne	variance
Loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$	np	$np(1-p)$
Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N; R\,; n)$	$\frac{nR}{N}$	$\frac{nR}{N}\left(1-\frac{R}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	λ	λ
Loi uniforme $\mathcal{U}(a\,;b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Loi normale $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$	μ	σ^2
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$	0	1

5.4 La loi normale centrée et réduite N(0 ;1)

La densité de probabilité est : $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$



La moyenne : $E(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$

La variance : $V(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} x^2\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} x dx = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}_{=1\ car\ f\ densité} = 1$

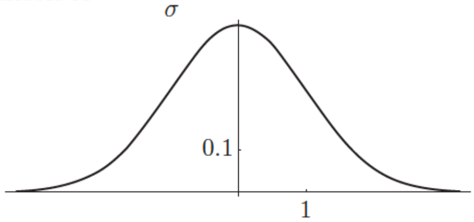
L'écart-type : $\sigma(X) = 1$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Loi normale centrée réduite

Toute loi normale peut être ramenée à une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1, notée $\mathcal{N}(0\,;1)$, moyennant le changement de variable $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

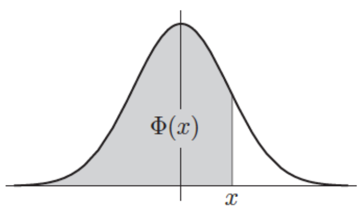


Il n'existe pas de forme analytique pour la fonction de répartition, notée Φ. On trouve les valeurs de $\Phi(x)$ dans les tables numériques (voir page 114).

$$\boxed{\Phi(x) = P(X^* \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$

Propriétés

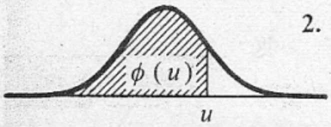
$P(a < X \le b) = P\Big(\frac{a-\mu}{\sigma} < X^* \le \frac{b-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\Big(\frac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{a-\mu}{\sigma}\Big)$
$P(X^* \le -x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
$P(-x < X^* \le x) = 2\Phi(x) - 1$



Loi normale $N(0\,;\,1)$ de Laplace-Gauss 15

1. Densité de probabilité $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$f(x)$	0.3989	0.3910	0.3683	0.3332	0.2897	0.2420	0.1942	0.1497	0.1109	0.0790	0.0540

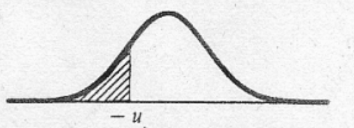


2. Fonction de répartition

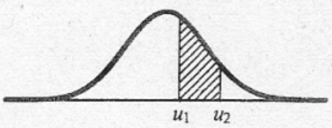
$$\phi(u) = P(U \leqslant u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)\,dx$$

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

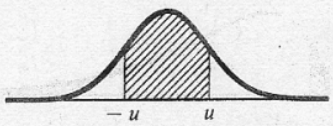
u	$\phi(u)$	u	$\phi(u)$	u	$\phi(u)$	u	$\phi(u)$	u	$\phi(u)$
2.50	0.993790	2.80	0.997445	3.10	0.999032	3.40	0.999663	3.70	0.999892
2.52	0.994132	2.82	0.997599	3.12	0.999096	3.42	0.999687	3.72	0.999900
2.54	0.994457	2.84	0.997744	3.14	0.999155	3.44	0.999709	3.74	0.999908
2.56	0.994766	2.86	0.997882	3.16	0.999211	3.46	0.999730	3.76	0.999915
2.58	0.995060	2.88	0.998012	3.18	0.999264	3.48	0.999749	3.78	0.999922
2.60	0.995339	2.90	0.998134	3.20	0.999313	3.50	0.999767	3.80	0.999928
2.62	0.995604	2.92	0.998250	3.22	0.999359	3.52	0.999784	3.82	0.999933
2.64	0.995855	2.94	0.998359	3.24	0.999402	3.54	0.999800	3.84	0.999938
2.66	0.996093	2.96	0.998462	3.26	0.999443	3.56	0.999815	3.86	0.999943
2.68	0.996319	2.98	0.998559	3.28	0.999481	3.58	0.999828	3.88	0.999948
2.70	0.996533	3.00	0.998650	3.30	0.999517	3.60	0.999841	3.90	0.999952
2.72	0.996736	3.02	0.998736	3.32	0.999550	3.62	0.999853	3.92	0.999956
2.74	0.996928	3.04	0.998817	3.34	0.999581	3.64	0.999864	3.94	0.999959
2.76	0.997110	3.06	0.998893	3.36	0.999610	3.66	0.999874	3.96	0.999963
2.78	0.997282	3.08	0.998965	3.38	0.999638	3.68	0.999883	3.98	0.999966



$P(U \leqslant -u) = \phi(-u) = 1 - \phi(u)$



$P(u_1 < U \leqslant u_2) = \phi(u_2) - \phi(u_1)$



$P(-u < U \leqslant u) = 2\,\phi(u) - 1$

Fonction de répartition Φ de la loi normale $N(0;1)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Utilisation de la table numérique de la loi normale centrée et réduite:

Cette table donne les valeurs de $p(X \leq a)$ pour "toutes" les valeurs positives de a.

Exemple: $p(X \leq 2{,}14) = 0{,}9838 = 98{,}38\%$

Nous pouvons ensuite en déduire que $p(X \geq 2{,}14) = 1 - 0{,}9838 = 0{,}0162 = 1{,}62\%$

En utilisant la symétrie de la courbe en cloche, nous pouvons ensuite remarquer que la probabilité que X *prenne des valeurs inférieures à* $-2{,}14$ *est aussi de* $1{,}62\%$

Exercice : Vérifier que si X suit une loi normale centrée et réduite, la probabilité $P(-1 < X < 1)$ est de $68{,}26\%$.

Une propriété importante pour les lois normales

Si X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ,
alors la loi $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée et réduite.

Exemple d'utilisation :

- *Supposons qu'en un endroit donné les températures du mois de juillet suivent une loi normale de 18,2°C de moyenne avec un écart-type de 3,6°C.*
  Sous ces conditions, quelle est la probabilité que la température, un jour de juillet, soit comprise entre 20°C et 25°C ?

Notons X la variable aléatoire indiquant la température en question.

Comme X suit une loi $N(18{,}2; 3{,}6)$, nous savons que la variable $Y = \frac{X-18{,}2}{3{,}6}$ suit une loi normale centrée et réduite $N(0; 1)$

Si $X = 25$ alors $Y = \frac{25-18{,}2}{3{,}6} = 1{,}89$

Si $X = 20$ alors $Y = \frac{20-18{,}2}{3{,}6} = 0{,}5$

Nous avons donc $P(20 < X < 25) = P(0{,}5 < Y < 1{,}89)$

De plus, $P(0{,}5 < Y < 1{,}89) = P(Y < 1{,}89) - P(Y < 0{,}5)$

En utilisant la table de la loi $N(0; 1)$, nous trouvons:

$P(Y < 1{,}89) - P(Y < 0{,}5) = 97{,}06\% - 69{,}15\% = 27{,}91\%$

- *Comment calculer la probabilité que cette même température soit inférieure à 15°C ?*

  15°C est une température inférieure de 3,2°C à la moyenne.
  La symétrie de la densité de probabilité nous permet d'écrire $p(X < 15) = P(X > 18{,}2 + 3{,}2)$.
  D'autre part, $p(X > 21{,}4) = 1 - p(X < 21{,}4)$
  Nous trouvons finalement 18,67%

➢ ***Probabilités Série 4***

5. 5 Approximation de la loi binomiale par la loi normale[2]

Il est possible d'approximer les probabilités obtenues par la loi binomiale en utilisant la loi normale.

Exemple : Prenons une pièce de monnaie. On la lance 10 fois. Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de piles obtenu.

a) Quelle loi cette la variable aléatoire suit -elle ?

b) Calculer $P(X = 2) =$

c) Établir la distribution :

X												
p												

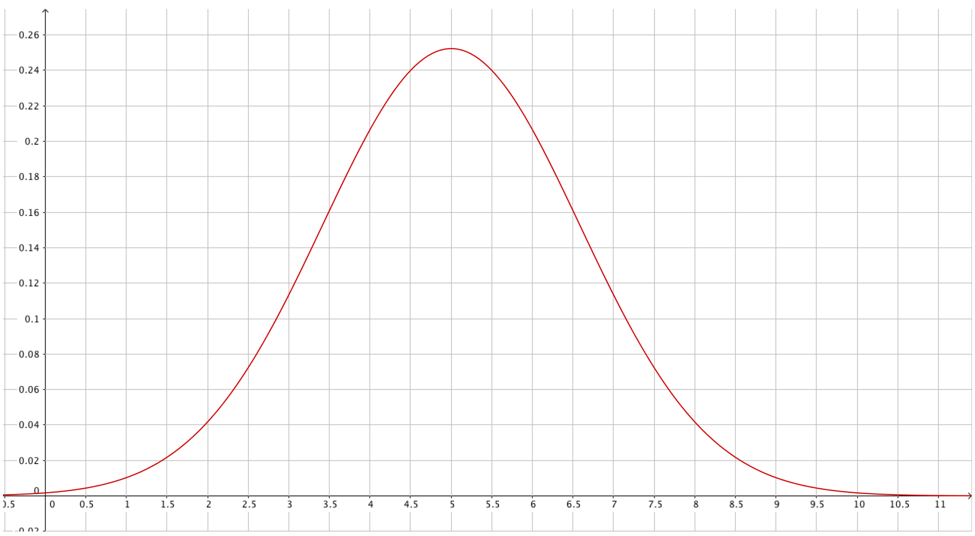
d) Calculer $\mu =$ et $\sigma =$

e) Représenter sur le graphique ci-dessous la distribution de cette variable aléatoire binomiale par un histogramme constitué de rectangles centrés en i, de longueur 1 et d'aire égale à la probabilité $p_i = P(X = i)$.

Considérons la représentation graphique de la loi normale :

$$f(x) = \frac{1}{1.5811\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{2\cdot 1.5811^2}}$$

de moyenne $\mu = 5$ et d'écart type : $\sigma = 1.5811$



Généralisation :

[2] Pages 108-11 du livre n°26 de la CRM

Théorème central limite :

Soit $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la somme de n variables aléatoires indépendantes de même moyenne μ et de même écart type σ.

La variable aléatoire $T^* = \frac{T - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$ si $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} P(T^* \leq x) = \Phi(x)$$

Ce théorème permet de calculer des probabilités liées à une somme de variables aléatoires. Il illustre le fait que beaucoup de phénomènes naturels suivent une distribution en forme de cloche .

Pour le cas de la loi binomiale, on a le théorème suivant :

Théorème :

<u>Si</u> X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec n grand (dans la pratique, on exige $\boldsymbol{np} \geq \mathbf{5}$ et $\boldsymbol{n}(\mathbf{1} - \boldsymbol{p}) \geq \mathbf{5}$),

<u>Alors</u>, on peut estimer $P(a \leq X \leq b)$ à l'aide de la loi normale $\mathcal{N}\left(np; \sqrt{np(1-p)}\right)$.

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Reprise de l'exemple :

f) Estimer $P(X = 2)$ par la loi normale de moyenne $\mu = 5$ et d'écart type 1.5811 :
$P(1{,}5 \leq X \leq 2{,}5) =$

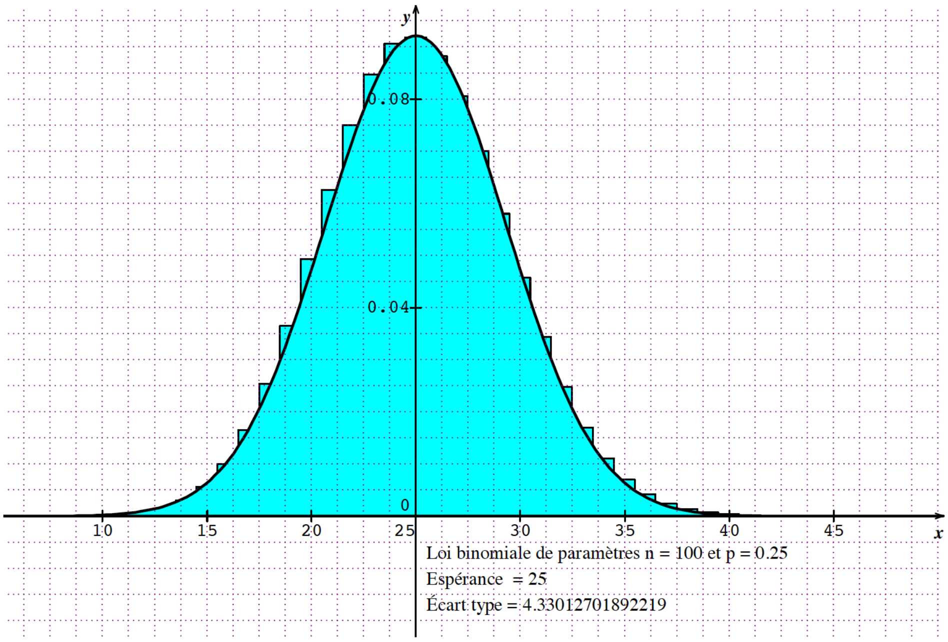
g) Pour estimer $P(3 \leq X \leq 6)$, on calcule :
$P(2{,}5 \leq X \leq 6{,}5) =$

avec la loi binomiale, on avait obtenu 0,7734.

Constat : la loi normale est une bonne approximation de la loi binomiale.

➢ ***Probabilités Série 5***

Exemple :



Sur le graphique ci-dessus, sont représentés :

- une courbe de Gauss,
- le diagramme en bâtons d'une loi binomiale.

Ces lois ont même moyenne (m = 25) et même écart-type (σ = 4,33).

Nous voyons dans cet exemple qu'une loi binomiale peut être approchée par la loi normale de même moyenne et de même écart-type. (Ce qui permet d'éviter de nombreux calculs !)

Une telle approximation est considérée comme bonne lorsque : $n \cdot p$ et $n \cdot (1 - p)$ sont supérieurs à 5. *Cf. formulaire CRM p. 106.*

Exemple :
On lance un dé régulier 180 fois.
Quelle est la probabilité d'obtenir entre 30 et 35 fois la face 4 ?
Le nombre X de 4 obtenus à l'issue des 180 lancers suit une loi binomiale : $n = 180$ *et* $p = 1/6$.
Les conditions $n \cdot p > 5$ *et* $n \cdot (1 - p) > 5$ *sont ici remplies et il est donc possible de considérer que X suit une loi normale.*

La moyenne est $m = n \cdot p = 30$ *et l'écart-type est* $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = 5$
Cette probabilité est de 34,13%.

Solution ex p.16 : La loi uniforme :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^b = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1$, ok

b)

$$m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2\cdot(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2}{2\cdot(b-a)} - \frac{a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{2\cdot(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - m^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - m^2 = \left.\frac{x^3}{3\cdot(b-a)}\right|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3}{3\cdot(b-a)} - \frac{a^3}{3\cdot(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-3b^2-3ab}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Solution Exercice p.17: La loi exponentielle :

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \left.-e^{-\lambda x}\right|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(-e^{-\lambda x}\right) + e^0 = 0+1 = 1$

Solution Exercice p.22:

$$p(-1 < X < 1) = 2p(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268 = 68{,}268\%$$

Table des matières