Probabilités Série 3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \qquad , sinon \end{cases}$$

a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
b) Calculer $P(1 \leq X \leq 1{,}5)$ et $P(X \geq 1{,}5)$.
c) Calculer $E(X)$.
d) Calculer $V(X)$.

Exercice 2 :

M. Carrel reçoit chaque semaine son ami M. Schmid pour une partie d'échec, mais ce dernier n'est pas très ponctuel. M. Carrel a pu établir que le retard X (en minutes) de son ami est une variable aléatoire continue qui peut être décrite par la fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{900}, si\ 0 \leq x < 30 \\ \frac{60 - x}{900}, si\ 30 \leq x < 60 \\ 0 \qquad , sinon \end{cases}$$

a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
b) Quelle est la probabilité que M. Schmid ait moins d'un quart d'heure de retard ?
c) Combien de fois par année en moyenne M. Schmid a-t-il plus de trois quarts d'heure de retard ?
d) Calculer le retard moyen de M. Schmid.
e) Calculer l'écart-type.

Exercice 3 :

La taille X (en cm) atteinte par une espèce végétale k jours après sa sortie de terre ($k < 100$) est une variable aléatoire qui a comme fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{k^3}\left(kx - x^2\right) & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
b) Quelle est, k jours après sa sortie de terre, la taille moyenne de l'espèce ?
c) Quelle probabilité y a-t-il pour une plante sortie de terre depuis 20 jours que sa taille soit inférieure à 6 cm ?

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \begin{cases} kx^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1) Pour quelle valeur de k, f est-elle une densité de probabilité ?
2) Représenter la fonction f. *(1 unité = 10 carrés)*
3) Trouver sa fonction de répartition et la représenter. *(1 unité = 10 carrés)*
4) Calculer $P(0 \leq X \leq 2)$ et $P(X \geq 1)$.

Exercice 5 :

La durée de vie d'un appareil électronique bon marché est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est la fonction f.

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{3}{32}\left(4x - x^2\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

x est exprimé en années.

1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. *(Fonction de répartition)*
3) Représenter graphiquement f. *(Choisir judicieusement le repère !)*
4) Calculer E(X).
5) Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 1);\ P(X > 3);\ P(1 \leq X < 3);\ P(1 \leq X \leq 10);\ P(X \leq 10).$$

Exercice 6 :

Soit X la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en heures, au guichet de la poste des Charmilles.

La loi de probabilité associée à cette variable est donnée par la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

x est exprimé en heures.

1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2) Quelle est la probabilité que le client attende moins de 20 minutes ?
3) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 30 minutes et une heure ?

Exercice 7 :

La durée de vie d'un téléphone portable est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est une fonction de la forme :

$$f \,:\, x \mapsto \begin{cases} \lambda(9-x^2) & \text{si } x \in [0;3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

x est exprimée en années.

1) Calculer λ de sorte que f soit effectivement une densité de probabilité.

2) Calculer la probabilité qu'un téléphone fonctionne :
   a) plus de deux ans ;
   b) moins de quatre ans ;
   c) entre un et deux ans.

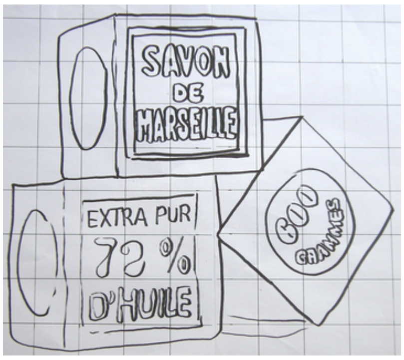
Exercice 8 :

La durée de vie, exprimée en jours, d'un savon de Marseille a une densité de probabilité donnée par la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}}, si\ t \geq 0 \\ 0, si\ t < 0 \end{cases}$$

a) Quelle est la probabilité qu'un tel savon dure entre 10 et 25 jours ?

b) Quelle est la probabilité qu'un tel savon dure moins de 8 jours ?



Solutions Probabilités Série 3 :

Exercice 1 : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & \text{si } 0\le x\le 2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ a) 1) $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, ok

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{0}^{2}\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2=1$, ok b) $P(1\le X\le 1{,}5)=\int\limits_{1}^{1,5}\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^{1,5}=\frac{1{,}5^2}{4}-\frac{1}{4}=0{,}3125$

$P(X\ge 1{,}5)=\int\limits_{1,5}^{2}\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^2}{4}\right|_{1,5}^{2}=\frac{2^2}{4}-\frac{1{,}5^2}{4}=0{,}4375$

c) $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int\limits_{0}^{2}x\cdot\frac{x}{2}dx=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}=1{,}33$

d) $V(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-\left(E(X)\right)^2=\int\limits_{0}^{2}x^2\cdot\frac{x}{2}dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2-\frac{16}{9}=\frac{16}{8}-\frac{16}{9}=\frac{16}{72}=0{,}22$

Exercice 2 : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{900} & \text{si } 0\le x<30\\ \dfrac{60-x}{900} & \text{si } 30\le x<60\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ a) 1) $f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, ok

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int\limits_{0}^{30}\frac{x}{900}dx+\int\limits_{30}^{60}\frac{60-x}{900}dx=\left.\frac{x^2}{1800}\right|_0^{30}+\left.\left(\frac{60x}{900}-\frac{x^2}{1800}\right)\right|_{30}^{60}=1$, ok

b) $P(0\le X\le 15)=\int\limits_{0}^{15}\frac{x}{900}dx=\left.\frac{x^2}{1800}\right|_0^{15}=\frac{15^2}{1800}=0{,}125=12{,}5\%$

c) n=52, $P(45\le X\le 60)=\int\limits_{45}^{60}\frac{60-x}{900}dx=\left.\left(\frac{60x}{900}-\frac{x^2}{1800}\right)\right|_{45}^{60}=0{,}125=12{,}5\%$

c'est une loi binomiale $\Rightarrow E(X)=n\cdot p=52\cdot 0{,}125=6{,}5\ \textit{fois}!$

d) $E(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)dx=\int\limits_{0}^{30}x\cdot\frac{x}{900}dx+\int\limits_{30}^{60}x\cdot\frac{(60-x)}{900}dx=\left.\frac{x^3}{2700}\right|_0^{30}+\left.\left(\frac{30x^2}{900}-\frac{x^3}{2700}\right)\right|_{30}^{60}=30$ minutes

$V(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)dx-\left(E(X)\right)^2=\int\limits_{0}^{30}x^2\cdot\frac{x}{900}dx+\int\limits_{30}^{60}x^2\cdot\frac{60-x}{900}dx-30^2$

e) $=\left.\frac{x^4}{3600}\right|_0^{30}+\left.\left(\frac{20x^3}{900}-\frac{x^4}{3600}\right)\right|_{30}^{60}-900=1050-900=150$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{150}=12{,}2$ minutes

Exercice 3 :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{k^3}\left(kx-x^2\right) & \text{si } 0\le x\le k\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

a) 1) $f(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, ok 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^k \frac{6\left(kx-x^2\right)}{k^3}dx=\left(\frac{3x^2}{k^2}-\frac{2x^3}{k^3}\right)\Bigg|_0^k=\frac{3k^2}{k^2}-\frac{2k^3}{k^3}=1$, ok

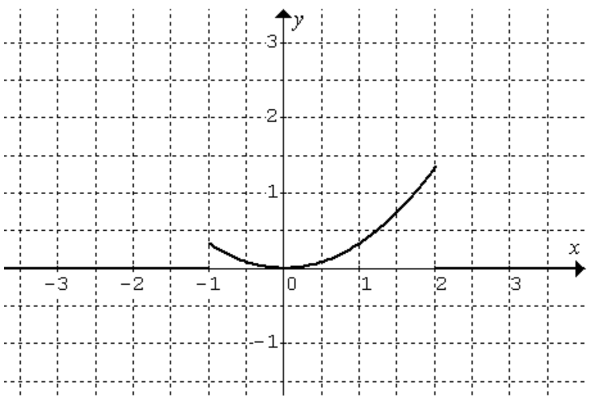
b) $E(X)=\int_0^k x\cdot\frac{6}{k^3}\cdot\left(kx-x^2\right)dx=\left(\frac{2x^3}{k^2}-\frac{3x^4}{2k^3}\right)\Bigg|_0^k=\frac{k}{2}\ (cm)$

c) $P(0\le X\le 6)=\int_0^6 \frac{6}{20^3}\cdot\left(20x-x^2\right)dx=\left(\frac{60x^2}{20^3}-\frac{2x^3}{20^3}\right)\Bigg|_0^6=0{,}216=21{,}6\%$

Exercice 4 :

1) $\int_{-1}^{2} kx^2dx\overset{!}{=}1 \quad\Rightarrow\quad \int_{-1}^{2} kx^2dx=\frac{k}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}=\frac{8k}{3}+\frac{k}{3}=\frac{9k}{3}=3k \qquad 3k=1 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{3}$

2)

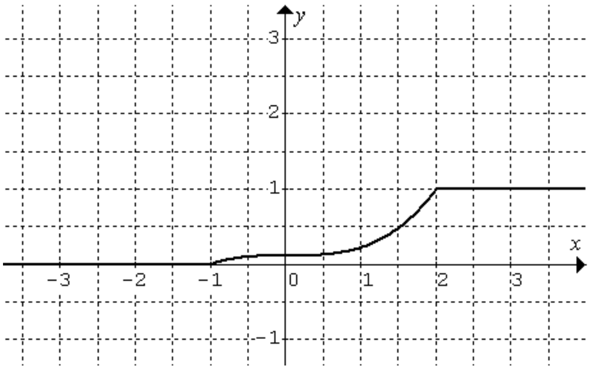


3) $F:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{si } x<-1\\ \frac{1}{9}x^3+c & \text{si } -1\le x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$

$\frac{1}{9}(-1)^3+c=0 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{9}$

$\frac{1}{9}(2)^3+c=1 \quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{9}$

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9} & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



4) $P(0 \le X \le 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ $\qquad P(X \ge 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

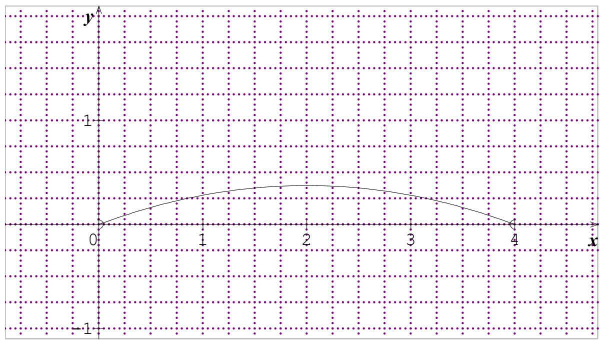
Exercice 5 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{3}{32}\left(4x - x^2\right) & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

a) f est positive entre 0 et 4 et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^4 \frac{3}{32}\left(4x - x^2\right)dx = \left(\frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32}\right)\Bigg|_0^4 = 3 - 2 = 1,$$

ok



b) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3 & \text{si} \quad 0 \le x \le 4 \\ 1 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

c) Parabole de sommet $\left(2;\frac{3}{8}\right)$

d) $m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{32}\left(4x - x^2\right)dx = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{128}\right)\Bigg|_0^4 = 8 - 6 = 2$

e) $\frac{5}{32}\ ;\ \frac{5}{32}\ ;\ \frac{22}{32}\ ;\ \frac{27}{32}\ ;\ 1$

Exercice 6 : f(x) = $\begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ 2e^{-2x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$

a) $f(x) \ge 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a 2e^{-2x}dx = \lim_{a\to\infty}\left[-e^{-2x}\right]_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(-e^{-2a}\right)+1 = 1$$

f est donc bien une densité de probabilité.

b) 48,66 %

c) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx = \left[-e^{-2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = -e^{-2} + e^{-1}$ = 23,25 %

Exercice 7 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda(9-x^2) & \text{si } x \in [0;3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 \lambda(9-x^2)dx = \left[\lambda\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_0^3 = 18\lambda$ Il faut donc choisir λ = $\frac{1}{18}$

2) a) P(X > 2) = $\int_2^3 \frac{1}{18}(9-x^2)dx = \left[\frac{1}{18}\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_2^3 = 1 - \frac{23}{27} = \frac{4}{27} \cong 14,81\%$

P(X < 4) = 1

P(1 < X <2) = $\int_1^2 \frac{1}{18}(9-x^2)dx = \left[\frac{1}{18}\left(9x - \frac{1}{3}x^3\right)\right]_1^2 = \frac{23}{27} - \frac{13}{27} = \frac{10}{27} \cong 37,04\%$

Exercice 8 : a) 28,58%% b) 55,07%