Analyse Série 4

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles quadrillées.

Exercice 1 :

a) Dans un repère orthonormé (1 unité = 2 largeurs de carré), tracer le plus précisément possible la fonction $f(x) = \begin{cases} (x+5)^2 - 3, si\ x < -3 \\ -x - 2, si\ -3 \leq x < 3 \\ \frac{2}{3}x, si\ x \geq 3 \end{cases}$

b) Déterminer par calcul et graphiquement les limites suivantes :

$$\lim_{x \to -5} f(x);\ \lim_{x \to -3} f(x);\ \lim_{x \to 0} f(x);\ \lim_{x \to 3} f(x)$$

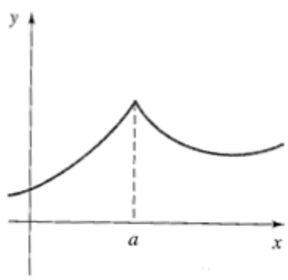
c) Vrai ou faux ?

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ existe.
3. La $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ existe.
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{-3\}$.
5. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{3\}$.
6. La fonction f est continue pour $x = -3$.

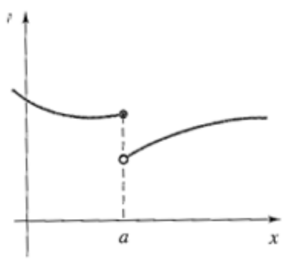
Exercice 2 :

Pour chacune des fonctions décrites par son graphique, vérifier à l'aide de la définition de la continuité d'une fonction, si elle est continue au point d'abscisse $x = a$. Si elle est discontinue en $x = a$, dire pourquoi.

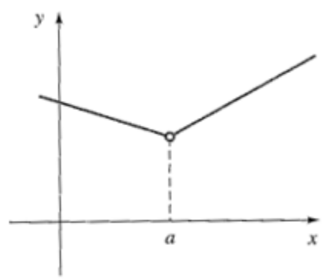
a)



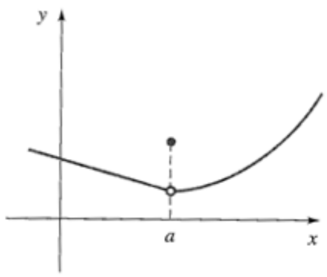
b)



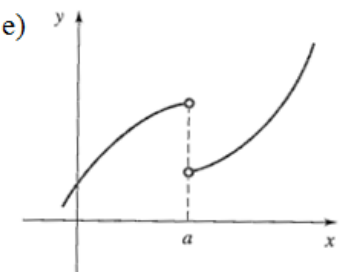
c)



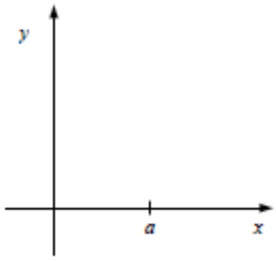
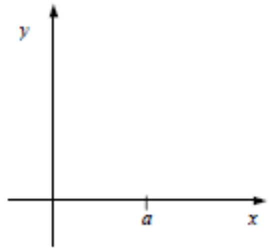
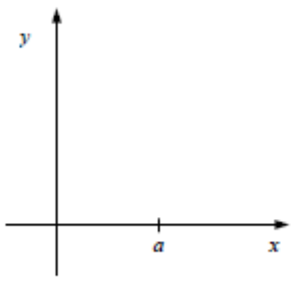
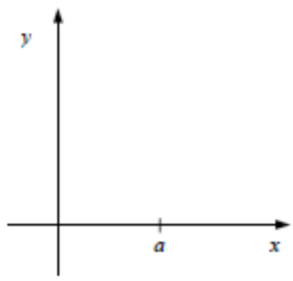
d)



e)



Exercice 3:
Complétez les graphiques suivants selon les indications et déterminez lesquelles de ces fonctions sont continues en a.

 *a)* $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mais pas $f(a)$	 *b)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, mais $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
 *c)* $f(a)$ existe, mais pas $\lim_{x\to a} f(x)$	 *d)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exercice 4 :
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes et leurs éventuels points de discontinuité :

a) $f(x) = \begin{cases} -x, si\ x < 0 \\ 2x, si\ x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, si\ x < 2 \\ 7, si\ x = 2 \\ x^2 + 1, si\ x > 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1}, si\ x < -1 \\ 0, si\ x = -1 \\ 1 - x, si\ x > -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, si\ x \neq 1 \\ 3, si\ x = 1 \end{cases}$

Exercice 5 :
Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x-2}{x^2-x-6}, si\ x \neq -2 \\ \lambda, si\ x = -2 \end{cases}$ Déterminer toutes les valeurs de λ telles que la fonction soit continue en $x = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{2x^2-7x-4}, si\ x \neq 4 \\ \lambda, si\ x = 4 \end{cases}$ Déterminer toutes les valeurs de λ telles que la fonction soit continue en $x = 4$

Exercice 6 :

Esquisser le graphique d'un fonction qui soit continue partout sauf en $x = 2$.

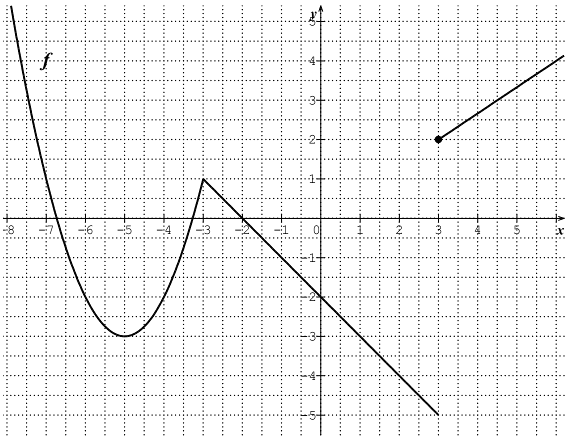
Exercice 7 :

Inventer une fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$
(Donner son expression algébrique)

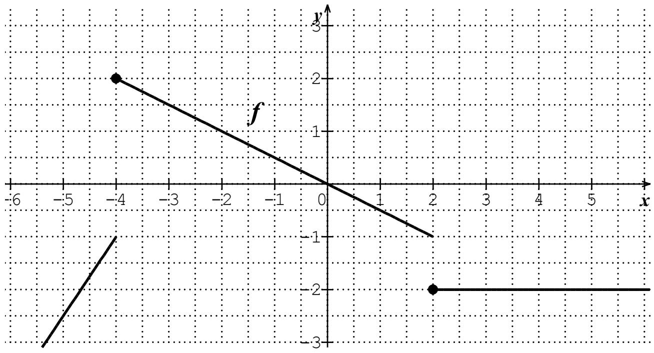
Exercice 8 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer, au vu de son graphique, les intervalles sur lesquels la fonction est continue :

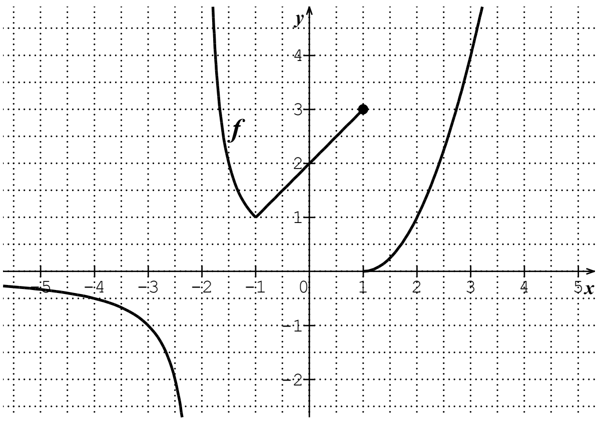
a)



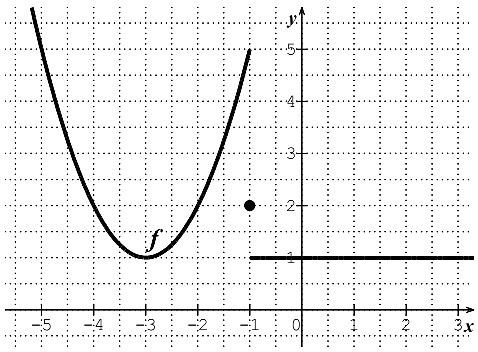
b)



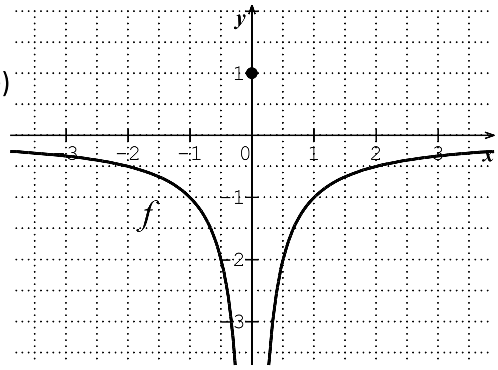
c)



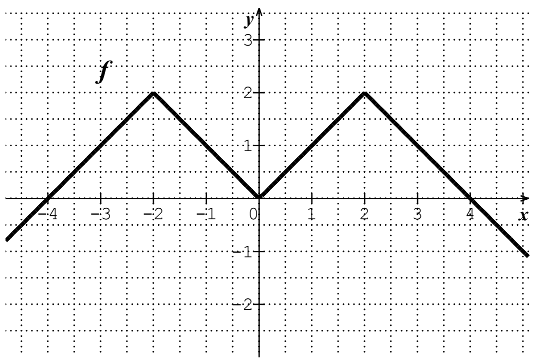
d)



e)

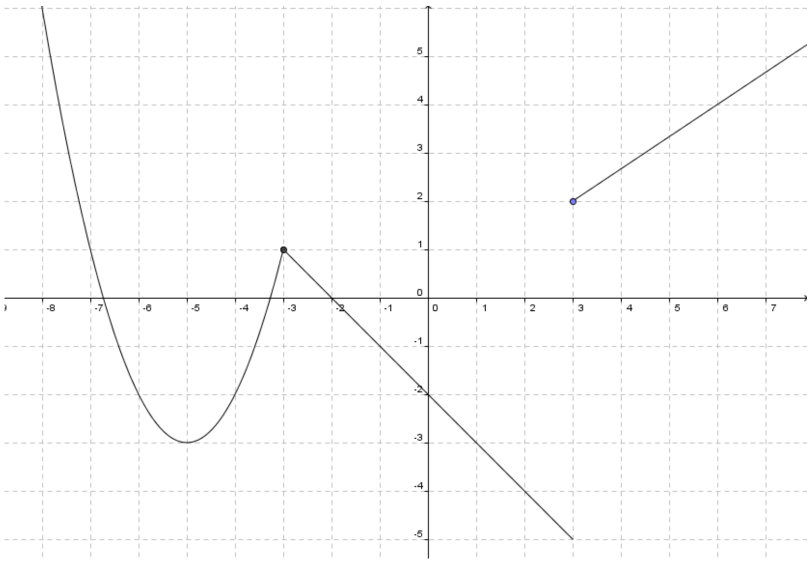


f)



Corrigé Analyse Série 4 :

Exercice 1 :



b) $\lim_{x\to-5} f(x) = -3$; $\lim_{x\to-3} f(x) = 1$; $\lim_{x\to0} f(x) = -2$;

$\lim_{x\to3} f(x)$ $n'existe\ pas$ car:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2$$

donc $\lim_{x\to3^-} f(x) \neq \lim_{x\to3^+} f(x)$

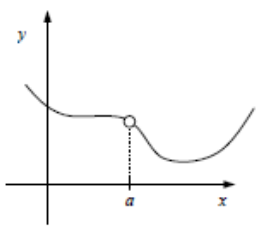
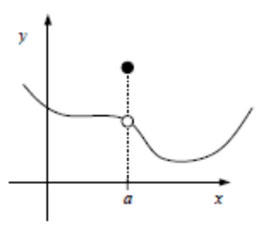
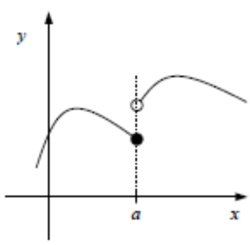
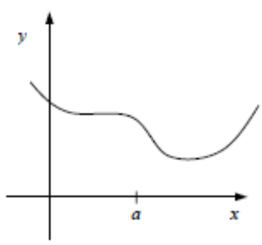
c) 1. faux. pas continue en 3 donc pas continue sur sur $\mathbb{R}$ 2. vrai 3.vrai 4. faux 5. vrai 6. vrai

Exercice 2 :

a) Continue b) Discontinue car $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas c) Discontinue car $f(a)$ n'existe pas
d) Discontinue car $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$ e) Discontinue car $f(a)$ n'existe pas et $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas

Exercice 3 :

Les possibilités de compléter les graphiques suivants selon les indications sont infinies. Seul compte le comportement de la fonction au voisinage de a.
Seul la fonction du graphique d) satisfait les conditions de continuité en $x = a$, donc c'est la seule qui est continue en $x = a$.

 *a)* $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, mais pas $f(a)$	 *b)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, mais $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$
 *c)* $f(a)$ existe, mais pas $\lim_{x\to a} f(x)$	 *d)* $f(a)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$ existent, et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Exercice 4 :

a) $D_f = \mathbb{R}$. Cette fonction est continue en tout $x \neq 0$, car elle est polynomiale au voisinage de ces valeurs. Reste à l'étudier au voisinage de $x = 0$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$, donc elle est aussi continue en $x = 0$. Conclusion, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

b) $D_f = \mathbb{R}$. f est discontinue en 2 car la limite de $f(x)$ en 2 n'existe pas (différente à gauche et à droite)

c) $D_f = \mathbb{R}$. f est discontinue en -1 car la limite en-1 de $f(x)$ n'existe pas.

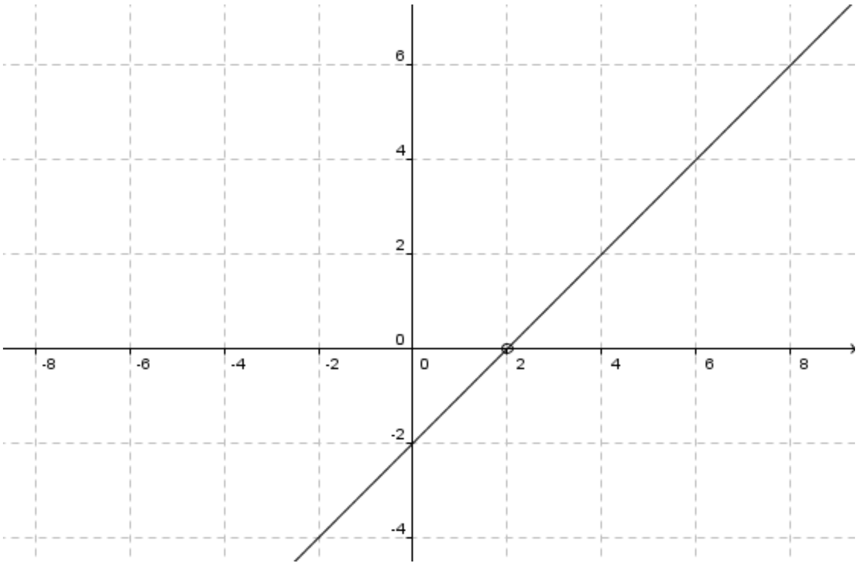
d) $D_f = \mathbb{R}$. pas de point de discontinuité. En $x = 1$, l'image vaut 3, la limite vaut 3 donc comme égalité entre l'image et la limite : la fonction est continue en 1.

Exercice 5 :

a) Pour que f soit continue en $x = -2$, λ doit être égal à 1. Ainsi : $f(-2) = 1$ et $\lim_{x \to -2} f(x) = 1$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

b) $\lambda = 0$ pour que f soit continue en $x = 4$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Exercice 6 :



Exercice 7 :

$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2}$

Exercice 8 :

a) $[-8; 3[$ (ou $]-\infty; 3[$) et $[3; +\infty[$
b) $]-\infty; -4[$; $[-4; 2[$ et $[2; +\infty[$
c) $]-\infty; -2[$; $]-2; 1]$ et $]1; +\infty[$
d) $]-\infty; -1[$ et $]-1; +\infty[$
e) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ou $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$
f) $\mathbb{R}$