# Analyse Série 6

**Ne pas résoudre les exercices sur l'énoncé. Répondre sur des feuilles quadrillées.**

## Exercice 1 :

a) calculer la dérivée de $f$ en $a$, puis l'équation de la droite tangente à $f$ au point $\big(a; f(a)\big)$

1) $f(x) = x^3$
2) $f(x) = \sqrt{x}$
3) $f(x) = \frac{1}{x}$
4) $f(x) = -3x + 1$
5) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$
6) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b) A partir des fonctions 1), 2) et 3), compléter : "**si $\boldsymbol{f(x)} =$... alors $\boldsymbol{f'(a)} =$...** "

## Exercice 2 : On considère la fonction $f$ définie par $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x + 3}$

a) Calculer le nombre dérivé de $f$ en 2.
b) Calculer l'équation de la droite $T$, tangente à $f$ au point $\big(2; f(2)\big)$.
c) Dans un repère orthonormé, représenter $f$ et $T$
d) Calculer l'équation de la droite $T$, tangente à $f$ au point $\big(a; f(a)\big)$
e) En vous aidant de la signification géométrique de $f'(a)$, déterminer le sommet de la parabole.
f) Calculer en quel(s) point(s) $\big(a; f(a)\big)$ la tangente à $f$ perpendiculaire à la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}x + 1$
   Déterminer alors l'équation de cette (ces) tangente(s); représenter ensuite cette (ces) tangente(s) ainsi que $f$ et la droite $y = -\frac{1}{4}x + 1$ dans un seul repère.
g) Calculer pour quelle(s) valeur(s) de $a$, la tangente à $f$ au point $\big(a; f(a)\big)$ contient le point $(2; 4)$
   Déterminer alors l'équation de cette (ces) tangente(s); représenter ensuite cette (ces) tangente(s) ainsi que $f$ dans un seul repère.

## Exercice 3 : On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = |x|$

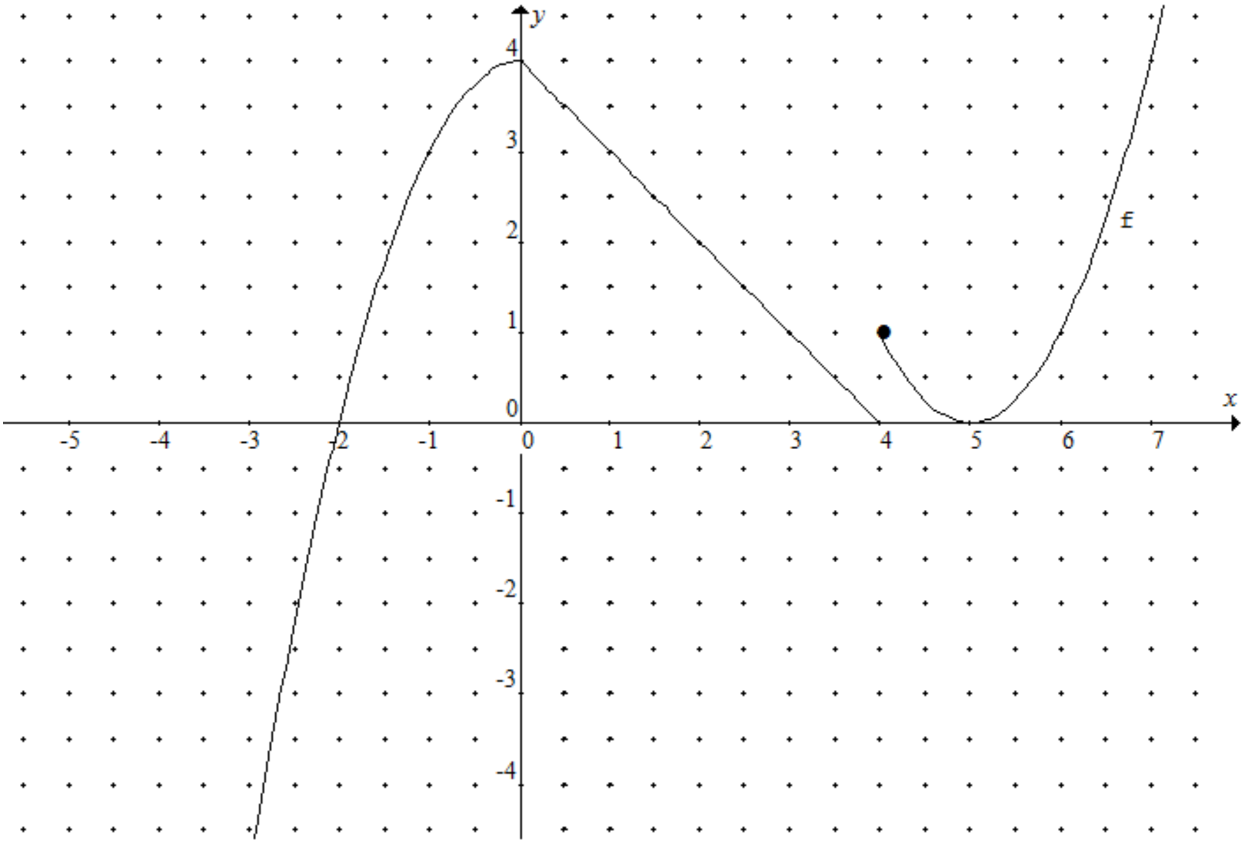
a) Représenter $f$, puis, **d'après le dessin**, décider si $f$ est dérivable en $-2$
   Même question en remplaçant $-2$ par 3 puis par 0.
b) Décider **par calcul** si $f$ est dérivable en $-2$, puis en 3 et enfin 0.

## Exercice 4 :

a) Représenter soigneusement la parabole d'équation $f(x) = x(x-4)$
b) A partir du graphique obtenu, déterminer $f'(0), f'(2)$ et $f'(4)$
c) Calculer $f'(0), f'(2)$ et $f'(4)$
d) Calculer $f'(a)$ pour un réel $a$ quelconque
e) Déterminer graphiquement puis par calcul un nombre $a$ tel que $f'(a) = -1$

## Exercice 5 :

La fonction représentée ci-dessous est $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2; si\ x \leq 0 \\ 4 - x; si\ 0 < x < 4 \\ (x-5)^2; si\ x \geq 4 \end{cases}$




a) Déterminer graphiquement puis par calcul $f'(-1), f'(2)$ et $f'(5)$
b) Quels sont les points en lesquels $f$ n'est pas dérivable ?
c) calculer $f'(0^-)$ et $f'(0^+)$ et donner une interprétation graphique de ces résultats.
d) Même questions que sous c) mais en $4^-$ et en $4^+$.
e) Sur quel domaine la dérivée de $f$ est-elle positive ou nulle ?

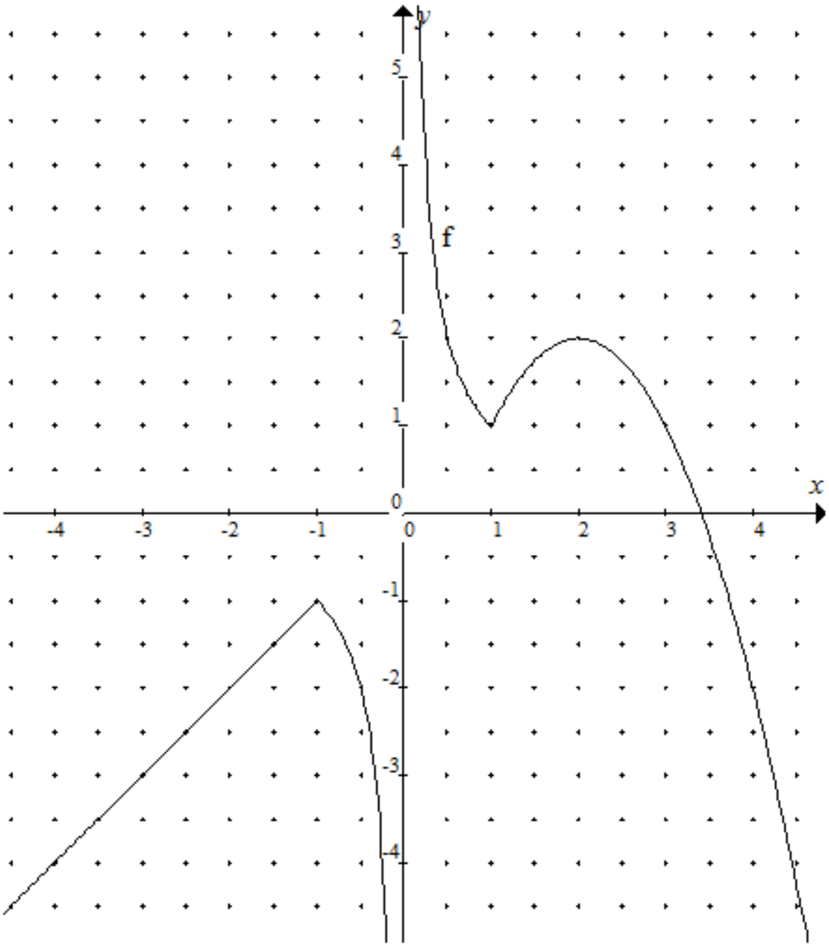
## Exercice 6 : Calculer la dérivée de $f$ au point $a$.

1) $f(x) = 2x^2 - x + 3, a = 1\ et\ a\ quelconque$
2) $f(x) = \frac{1}{x}, a = 10\ et\ a\ quelconque$
3) $f(x) = 7 - 2x, a\ quelconque$
4) $f(x) = \frac{2x}{x+3}, a = -2\ et\ a\ quelconque$
5) $f(x) = \sqrt{x} + 3, a\ quelconque$
6) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1}, a = -2$

## Exercice 7 : Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1; si\ x \leq 1 \\ x^2; si\ x > 1 \end{cases}$

1) Représenter $f$ (1 unité = 2 carrés)
2) Déterminer graphiquement $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$
3) Déterminer par calcul $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$.

## Exercice 8 :




1) Compléter :

$f'(-2) =$ ...........

$f'(3) =$ ...........

2) Quels sont les points en lesquels $f$ n'est pas dérivable ?

3) Déterminer : $f'(1^-); f'(1^+); f'(-1^-)$ et $f'(-1^+)$

4) Quels sont les points en lesquels $f$ admet une tangente de pente $-2$ ?

5) Quelle est la solution de l'équation $f'(a) = 0$ ?

---

## Exercice 9 : Calculer l'équation de la droite tangente au graphe de $f$ en $a$

1) $f(x) = 4x - x^2; a = 1 \; et \; a = 2$

2) $f(x) = \frac{x-1}{x}; a = -1$

---

## Exercice 10 : $f(x) = \frac{1}{2x}$ de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$.

1) Calculer $f'(a)$ pour un point $a$ quelconque de $\mathbb{R}^*$
2) Quels sont les points $a$ en lesquels $f$ admet une tangente de pente $-2$ ?
3) Calculer l'équation de chacune de ces tangentes.

---

## Exercice 11 : $f(x) = (x-2)^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1) Représenter $f$ ainsi que ses tangentes de pentes 1 ou $-1$
2) Calculer l'équation de la tangente de pente $-1$
3) Est-ce que $g(x) = 2x - \frac{9}{2}$ est une tangente à $f$ ? (Justifier par calcul)

---

## Exercice 12 : $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

Quelles sont les tangentes à $f$ qui contiennent le point $P(1; -3)$ ?

# Corrigé Analyse Série 6

## Ex 1: a)

1) $f'(a) = 3a^2$ et $y = 3a^2x - 2a^3$

2) $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ et $y = \frac{1}{2\sqrt{a}}x + \frac{a}{2\sqrt{a}}$

3) $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$ et $x = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$

4) $f'(a) = -3$ et $y = -3x + 1$

5) $f'(a) = -\frac{2}{(2a-3)^2}$
et $y = -\frac{2}{(2a-3)^2}x + (4a-3)/(2a-3)^2$

6) $f'(a) = \frac{a^2-2a}{(a-1)^2}$

et $y = \frac{(a^2-2a)}{(a-1)^2}x + \frac{a^2}{(a-1)^2}$

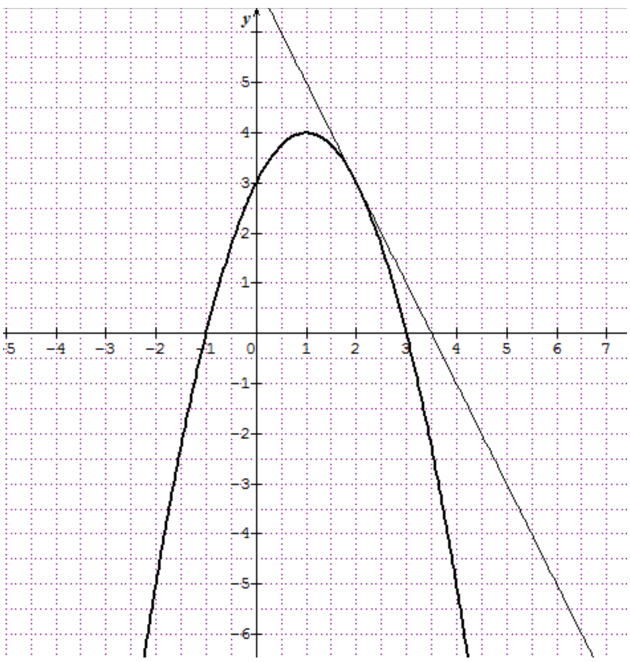
b) Si $f(x) = x^n$ alors $f'(a) = na^{n-1}$

## Ex 2:

a) $f'(2) = -2$

b) $y = -2x + 7$

c)



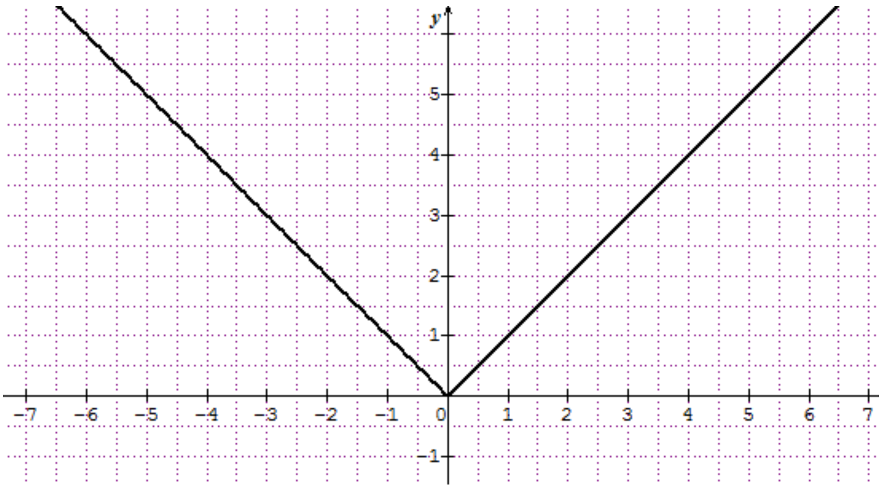
d) $y = \underbrace{(-2a+2)}_{pente}x \underbrace{+a^2+3}_{o\ \grave{a}\ l'o.}$

e) $f'(a) = 0$ donc $-2a + 2 = 0$ on trouve $a = 1$et donc le sommet est en $(1; 4)$ car $f(1) = 4$

f) $a = -1$ donc $(-1; 0)$ et $y = 4x + 4$
(droites perpendiculaires si pentes inverses et opposées l'une de l'autre)

g) $a = 1$ et $a = 3$ donc $T_{(1;4)}(x) = 4$ et $T_{(3;0)}(x) = -4x + 12$

## Ex 3:




- $f$ dérivable en $-2$ et on trouve: $f'(-2) = -1$
- $f$ dérivable en 3 et on trouve: $f'(3) = 1$
- $f$ pas dérivable en 0 car:

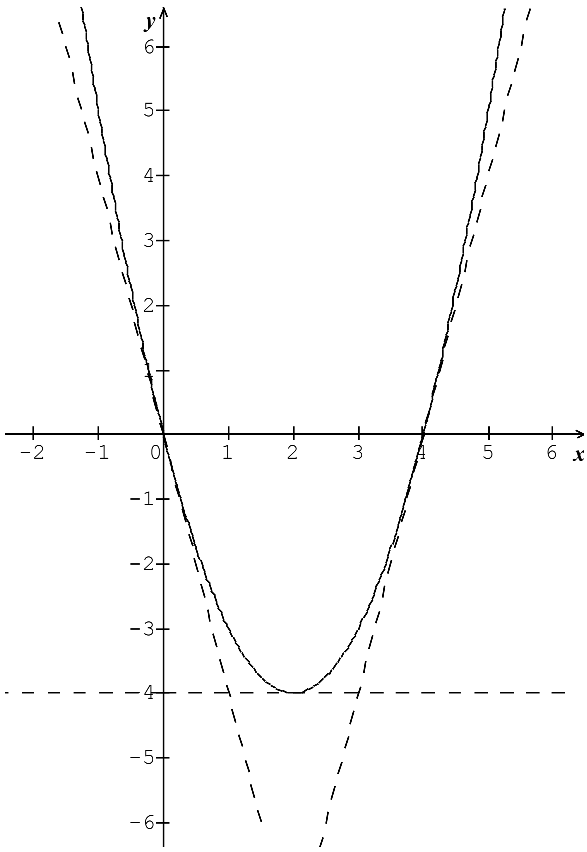
$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas.

## Exercice 4:

b) et c) $f'(0) = -4$ ; $f'(2) = 0; f'(4) = 4$

d) $2a - 4$

e) $a = \frac{3}{2}$




## Exercice 5:

a) $f'(-1) = 2; f'(2) = -1; f'(5) = 0$

b) $f$ n'est pas dérivable en 0 ($f$ est anguleuse)
et en 4 ($f$ est discontinue)

c) $f'(0^-) = 0$ $et$ $f'(0^+) = -1$

d) $f'(4^-) = \infty$ $et$ $f'(4^+) = -2$

e) $]-\infty; 0[ \cup [5; \infty[$

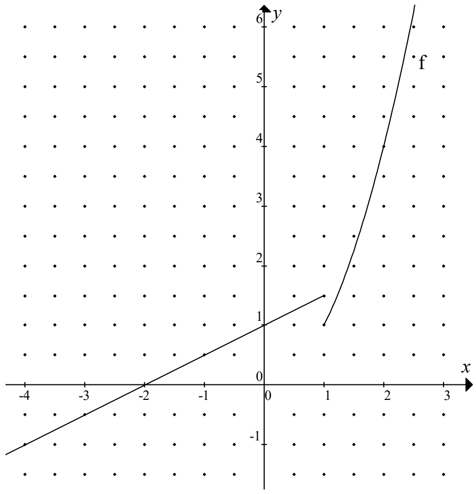
## Exercice 6:

1) $3$ $et$ $4a - 1$ 2) $-\frac{1}{100}$ $et$ $-\frac{1}{a^2}$

3) $-2$ 4) $6$ $et$ $\frac{6}{(a+3)^2}$ 5) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ 6) $0$

## Exercice 7:

$$f'(1^-) = \frac{1}{2} \qquad et \quad f'(1^+) = -\infty$$




## Exercice 8:

1) $f'(-2) = 1\ et\ f'(3) = -2$

2) $-1; 0\ et\ 1$

3) $f'(1^-) = -1\ ; f'(1^+) = 2; f'(-1^-) = 1\ et\ f'(-1^+) = -1$

4) en $-0{,}7$; en $0{,}7$ et en $3$

5) $S = \{2\}$

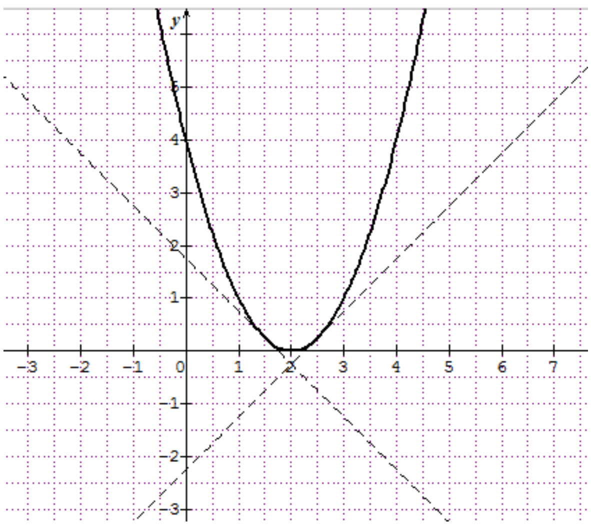
## Exercice 9:

1) $T_1(x) = 2x + 1,\quad T_2(x) = 4$ 2) $T_{-1}(x) = x + 3$

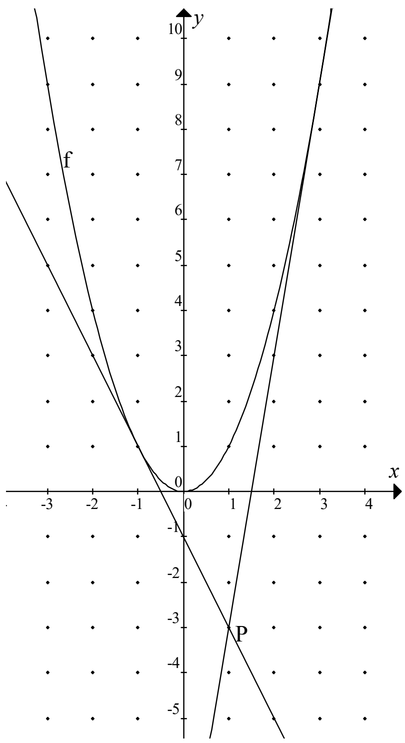
## Exercice 10:

1) $f'(a) = -\frac{1}{2a^2}$ 2) $a = \pm\frac{1}{2}$ 3) $T_{-\frac{1}{2}}(x) = -2x - 2$ $T_{\frac{1}{2}}(x) = -2x + 2$

## Exercice 11:




2) $T_{\frac{3}{2}}(x) = -x + \frac{7}{4}$ 3) Non: la seule tangente de pente 2 est: $T_3(x) = 2x - 5$




## Exercice 12:

$f'(a) = 2a \quad T_a(x) = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$

Il faut que $(1; -3)$ soit un point de $T_a$ donc que $T_a(1) = -3$
On trouve: $a = -1$ ou $a = 3$

$T_{-1}(x) = -2x - 1\ et\ T_3(x) = 6x - 9$