Analyse Série 7

Ne pas écrire sur l'énoncé !

Il est important de refaire les exercices avant une épreuve pour vérifier si on arrive à bien se poser les bonnes questions.

Exercice 1 :

a) Représenter soigneusement la parabole d'équation $f(x) = x^2 - 4x$ dans un repère orthonormé
b) A partir du graphique obtenu, déterminer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
c) Calculer $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(4)$
d) Calculer $f'(a)$ pour un réel a quelconque
e) Déterminer graphiquement puis par calcul un nombre a tel que $f'(a) = -1$.

Exercice 2 :

Soit les fonctions $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, si\ x \leq 1 \\ x^2, si\ x > 1 \end{cases}$ et $g(x) = |x| = \begin{cases} x, si\ x \geq 0 \\ -x, si\ x < 0 \end{cases}$

a) Représenter f et g dans un repère orthonormé (1 unité = 2 carrés)
b) Déterminer graphiquement puis par calcul $f'(1^-)$ et $f'(1^+)$
c) Déterminer graphiquement puis par calcul $g'(0^-)$ et $g'(0^+)$
d) Que constatez-vous ?

Exercice 3 :

Considérons les fonctions $f(x) = -2x + 7$ $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = 2x^3$

a) Calculer $f'(2)$ et la pente de la tangente à f en $a = 2$
b) Calculer $f'(0)$ et la pente de la tangente à f en $a = 0$
c) Calculer f' la fonction dérivée de f
d) Pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction f n'est-elle pas dérivable ?
e) Indiquer le domaine de définition de f'
f) Représenter sur le même repère orthonormé f et f'. Que remarque-t-on ?
g) Mêmes questions mais pour les fonctions g et h.

Attention à la notation ! N'oubliez pas les limites, égalités et cohérence entre graphique et algèbre.

Posez-vous les bonnes questions :

- Si on change les valeurs numériques d'un exercice, est-ce que je sais comment résoudre les énoncés ?
- Si cet exercice apparîssait en épreuve, est-ce que que… ?

Exercice 4 :

a) Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$\boldsymbol{f_1(x) = x; \quad f_2(x) = x^2\,; f_3(x) = x^3\;; f_4(x) = x^4}$$

b) Quelle conjecture (affirmation que l'on pense être vraie) peut-on faire quant à la dérivée de x^n ?

c) Vérifier cette conjecture pour $n = -2, n = -1, n = 0$ et $n = 1/2$ à partir de la définition de la dérivée.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercice 5 :

a) Est-ce que les fonctions suivantes sont continues en $a = 1$?, dérivables en $a = 1$? Justifiez

$$f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, si\ x \geq 1 \\ x^2, si\ x < 1 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2, si\ x \geq 1 \\ x^3, si\ x < 1 \end{cases} \qquad j(x) = \begin{cases} x^2 + 1, si\ x < 1 \\ 2, si\ x \geq 1 \end{cases}$$

b) Existe-t-il un lien entre continuité et dérivabilité ?

Exercice 6 :

Trouver l'expression algébrique d'une fonction qui :

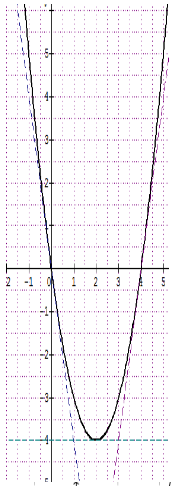
a) est dérivable en $a = 2$ et continue en $a = 2$.

b) est continue en $a = 2$ et dérivable en $a = 2$.

c) n'est pas dérivable en $a = 2$ et continue en $a = 2$.

d) n'est pas continue en $a = 2$ et dérivable en $a = 2$.

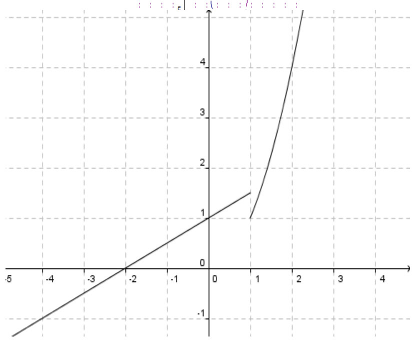
Solutions Analyse Série 7 :



Ex 1 :

b)&c) $f'(0) = -4; f'(2) = 0; f'(4) = 4$ d) $f'(a) = 2a - 4$ e) $a = \frac{3}{2}$

Ex 2 :



b) $f'(1^-) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\frac{1}{2}x+1-\left(\frac{1}{2}+1\right)}{x-1} = \frac{1}{2}$

et $f'(1^+) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-\left(\frac{1}{2}+1\right)}{x-1} = \frac{-\frac{1}{2}}{0^+} = -\infty$

donc $f'(1)$ n'existe pas.

d) f ni dérivable ni continue en $a = 1$

c) $g'(0^-) - 1$ et $g'(0^+) = 1$ donc g n'est pas dérivable en 0. d) g est continue mais non dérivable en 0.

Ex 3 : g) $f' < 0$ et f décroissante / $g' < 0$ et g décroissante / $h' > 0$ et h croissante

	a)	b)	c)	d)	e)
f	$f'(2) = -2$	$f'(0) = -2$	$f'(a) = -2$	f dérivable $\forall a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
g	$g'(2) = -\frac{1}{4}$	$g'(0) \notin \mathbb{R}$	$g'(a) = -\frac{1}{a^2}$	g dérivable $\forall a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
h	$h'(2) = 24$	$h'(0) = 0$	$h'(a) = 6a^2$	$h$dérivable $\forall a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Ex 4: a) $f_1'(a) = 1$ $f_2'(a) = 2a$ $f_3'(a) = 3a^2$ $f_4'(a) = 4a^3$ b) $f_n(x) = x^n$ alors $f_n'(x) = nx^{n-1}$

c) $f'_{-2}(a) = -\frac{2}{a^3}$ $f'_{-1}(a) = -\frac{1}{a^2}$ $f_0'(a) = 0$ $f'_{\frac{1}{2}}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

Ex 5: b) une fonction dérivable en a implique continue en a mais pas le contraire.

	f	g	h	j
Continue en $a = 1$	Oui	Oui	Oui	Oui
Dérivable en $a = 1$	oui	oui	non	non

Ex 6: a) $f(x) = x$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = |x - 2|$ d) impossible car dérivable en a implique continue en a