Analyse Série 9

Ne rien écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles à part !

Exercice 1 :

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

a) Sur quel domaine f est-elle croissante ?
b) Quels sont les extremums de f ? (Préciser s'il s'agit de minimums ou de maximums)

Exercice 2 :

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f qui est continue sur son domaine et qui admet une limite infinie en -1.

x		-2		-1		0		1		4	
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	/	$-$	/	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		/		2		3		1	

a) Compléter le tableau
b) Esquisser le graphe de f
c) Indiquer quels sont ses extremums

Exercice 3 :

Etude de la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x-1}$

a) Déterminer le domaine de la fonction f
b) Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction f
c) Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction f
d) Déterminer le tableau de signes de la fonction f
e) Déterminer si la fonction admet des asymptotes *(**verticale & oblique**)* avec justification *(par calculs et tableau de signes de δ)* pour le comportement de f autour de ces asymptotes et donner leurs équations.
f) Calculer la dérivée de f, montrer que $f'(x) = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$
g) Déterminer le domaine de définition de f', les zéros de f' et le tableau de variation de f
h) Représenter graphiquement la fonction à partir des points a) à g) au **Crayon**

Exercice 4 :

Soit la fonction $\boldsymbol{f(x)} = \frac{(x-2)^2}{x^2-4x}$

a) Calculer la dérivée de f et montrer que $\boldsymbol{f'(x)} = -\frac{5}{(x-2)^2}$
b) Élaborer le tableau de variations de f et le tableau de signes de f
c) Quelles sont les limites de f en 0^+ ? en 0^- ? en 4^+ ? en 4^- ?
d) Calculer les limites de f en ∞
e) A partir des résultats obtenus, tracer le graphique de f.

Exercice 5 :

Déterminer le domaine de définition pour calculer toutes les asymptotes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{3x^2-5x+3}{x-1}$
b) $f(x) = \frac{(x^2-4)}{3x^2}$
c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$
d) $f(x) = \sqrt{x}$

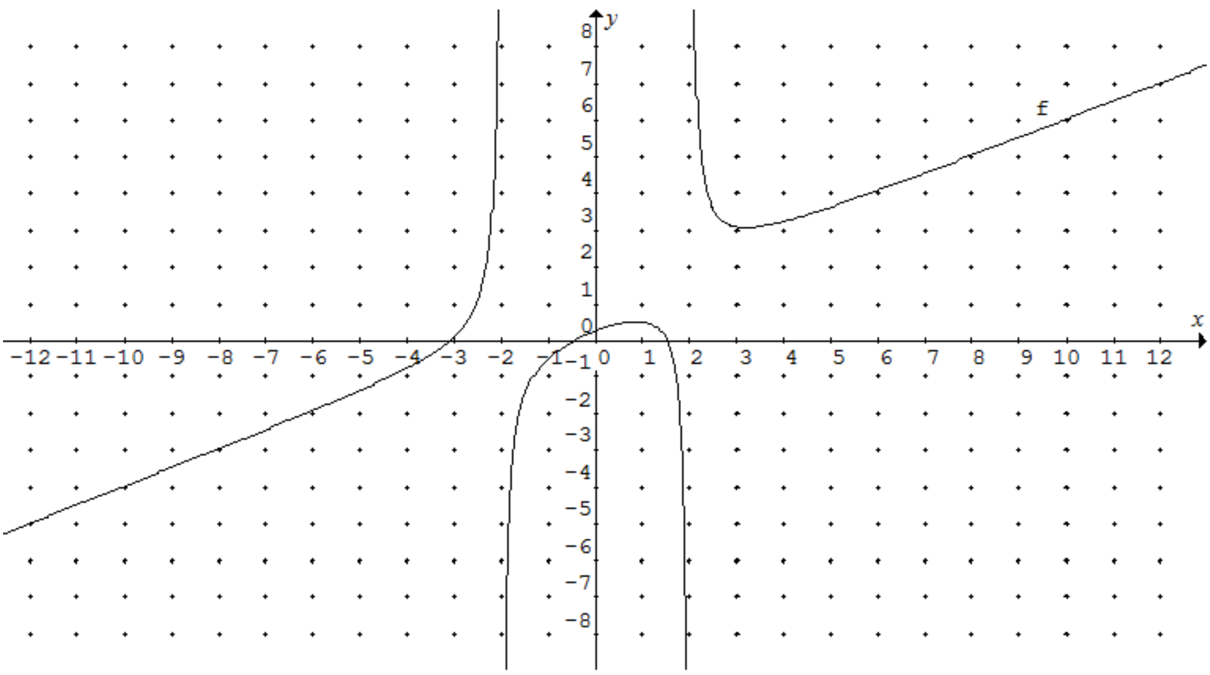
Exercice 6 :

Étudier la fonction $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ et la représenter graphiquement

($D_f, Z_f, f(0), D_{f'}, Z_{f'}$, tableau de signes de f, tableau de variations de f, AV, AO)

Exercice 7 :

Retrouver le tableau des variations et les asymptotes de la fonction f représentée ci-dessous



Exercice 8 :

Etudier uniquement la courbure (convexité et concavité) de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

- ***Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM p. 132 ex 4.18 et 4.19***

Rappel : Une étude de fonction comprend les points suivants :

a) Déterminer le domaine de la fonction f

b) Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction f

c) Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction f

d) Déterminer le tableau de signes de la fonction f

e) Déterminer si la fonction admet des asymptotes *(**verticale & oblique**)* avec justification *(par calculs et tableau de signes de δ)* pour le comportement de f autour de ces asymptotes et donner leurs équations.

f) Calculer la dérivée de f, le domaine de définition de f' et les zéros de f'

g) Déterminer le tableau de variation de f

h) Représenter graphiquement la fonction à partir des points a) à g) au **Crayon**

Exercice 9 :

Etudier complètement la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Exercice 10 :

Etudier complètement la fonction $f(x) = \frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$

On donne : $f'(x) = \frac{2-x}{(x-1)^3}$ et $f''(x) = \frac{2x-5}{(x-1)^4}$ *(à vérifier)*

Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM

Extrema : p. 132 ex 4.17 & p.131 ex 4.13
Croissance : p.13 ex 4.6
Étude de fonction: p.135-136 ex 4.38

Solutions Analyse Série 9 :

Exercice 1 :

$$f'(x) = 3(x-3)(x+1)$$

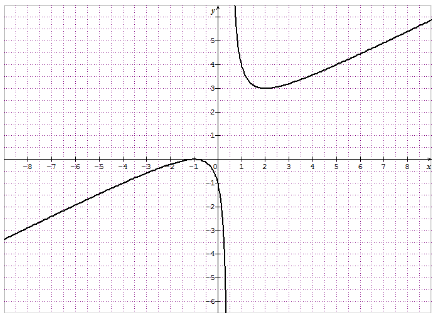
a) f est croissante sur le domaine : $]-\infty;-1] \cup [3;\infty[$

b) $(-1;12)$ est un Maximum de f et $(3;-20)$ est un minimum de f

Exercice 3 :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, Z_f = \{-1\}, D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, Z_{f'} = \{-1;2\},$

x		-1		$1/2$		2	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	0 Max	↘	/	↘	2 min	↗

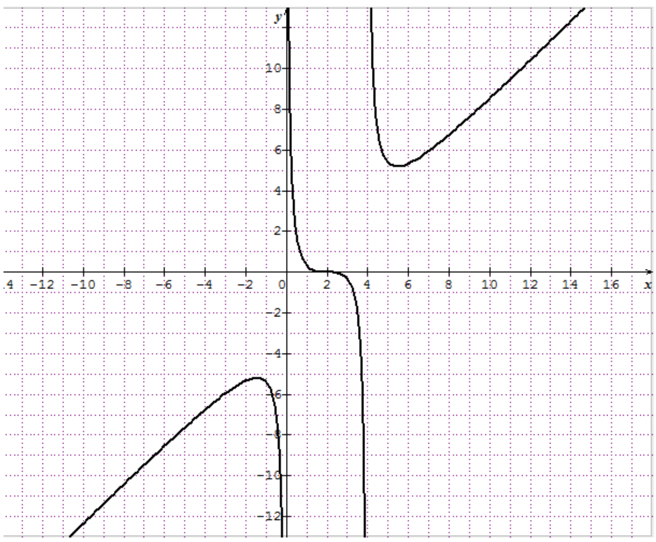


Exercice 4 :

$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^* \setminus \{4\} \quad Z_f = \{2\}, Z_{f'} = \{-2\sqrt{3}+2; 2; 2\sqrt{3}+2\} \cong \{-1{,}46; 2; 5{,}46\}$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty \quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x		$-2\sqrt{3}+2$		0		2		4		$2\sqrt{3}+2$	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	-5,2 Max	↘	AV	↘	0 PC	↘	AV	↘	5,2 min	↗



Exercice 5 :

a) $y = 3x - 2$ et $x = 1$

b) $y = \frac{1}{3}$ et $x = 0$

c) $x = 0$

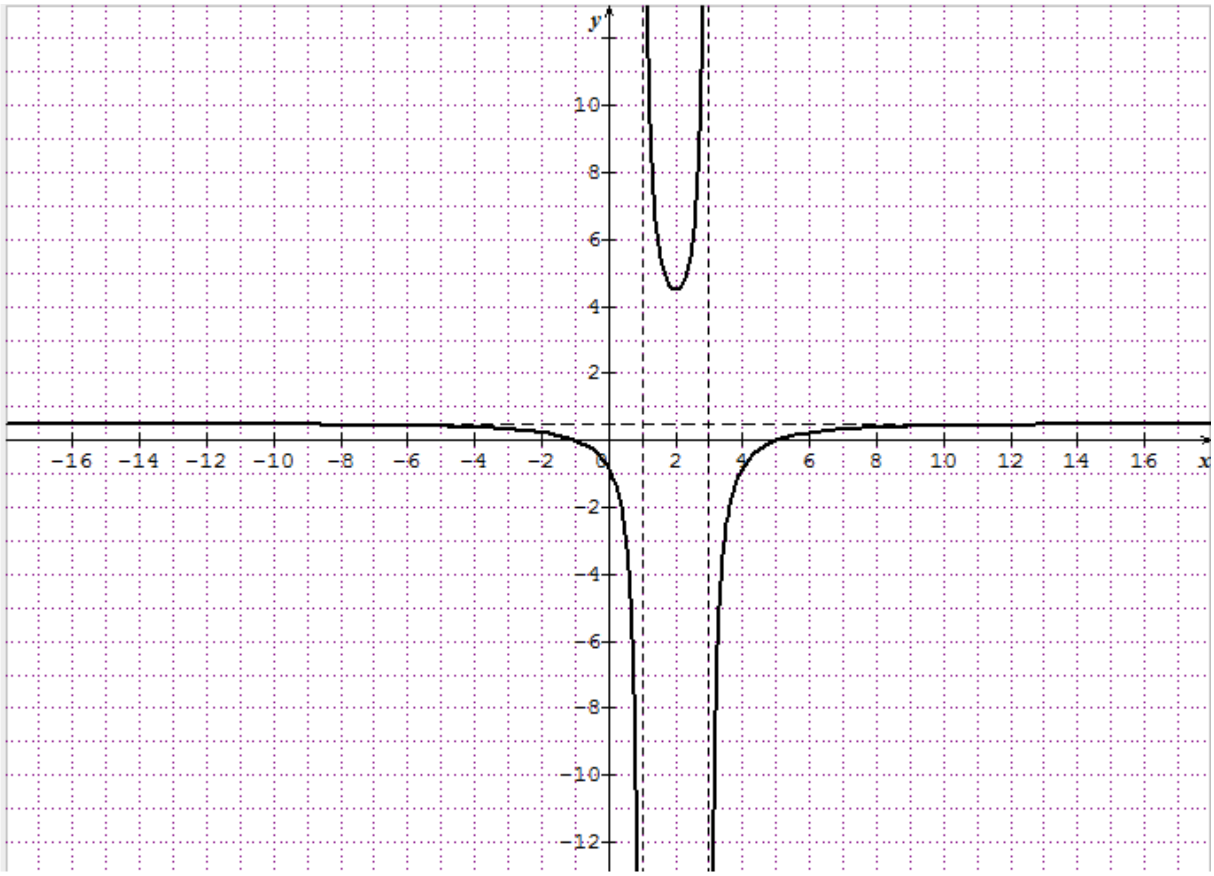
d) pas d'asymptote

Exercice 6 :

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{2(x-3)(x-1)} \qquad f'(x) = \frac{8(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

x		-1		1		2		3		5	
$f'(x)$	-	-	-	/	-	0	+	/	+	+	+
$f(x)$	↘	0	↘	AV	↘	4,5 min	↗	AV	↗	0	↗

AH: $y = \frac{1}{2}$ AV: $x = 1$ et $x = 3$



Exercice 7 :

x		– 3		– 2		– ½		1		3/2		2		3	
f '(x)	+	+	+		+	+	+	0	–	–	–		–	0	+
f(x)	↗	0	↗	AV	↗	0	↗	½ Max	↘	0	↘	AV	↘	3 Min	↗

AO: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Exercice 8 :

$$D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}, Z_f = \emptyset, Z_{f''} = \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x-1)^3}$$

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
f "(x)	+	0	–	0	+
f(x)	∪	$\frac{3}{4}$ PI	∩	$\frac{3}{4}$ PI	∪

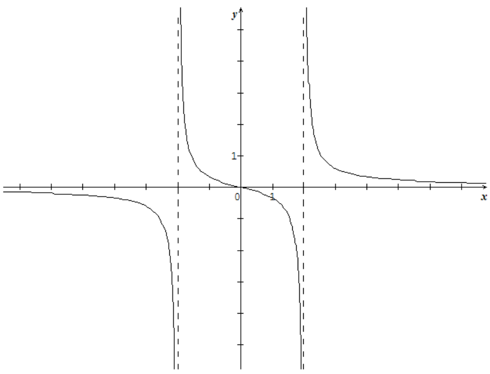
Exercice 9 :

$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$	$f'(x) = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2}$	$f''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
$Z_f = \{0\}$	$Z_{f'} = \emptyset$	$Z_{f''} = \{0\}$

AH: $y = 0$ AV: $x = -2$ et $x = 2$

x		– 2		0		2	
f '(x)	–		–	–	–		–
f(x)	↘	AV	↘	0	↘	AV	↘

x		– 2		0		2	
f "(x)	–		+	0	–		+
f(x)	∩		∪	0 PI	∩		∪



Exercice 10 :

x		0		1		$\frac{4}{3}$		2	
f '(x)	–	–	–		+	+	+	0	–
f(x)	↘	0	↘		↗	0	↗	2 Max	↘

x		0		1		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$	
f "(x)	–	–	–		–	–	–	0	+
f(x)	∩	0	∩		∩	0	∩	$\frac{35}{18}$ PI	∪

AV: $x = 1$ AH: $y = \frac{3}{2}$