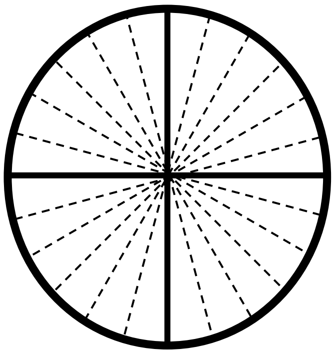
Trigonométrie



Utilisez ces formes pour noter des formules et des questions

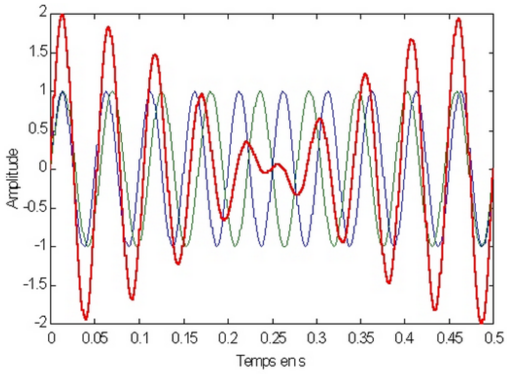
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Introduction

Ce chapitre est important pour l'ensemble des 4 années du collège mais aussi pour des applications dans différents domaines.

- En première année, vous avez étudié les formules de bases dans le triangle rectangle.
- En deuxième année, vous reprendrez ce chapitre et étudierez des **fonctions trigonométriques** (attention à tous les liens qu'il faudra faire entre les chapitres !).
- Ces fonctions seront ensuite étudiées en 3e et 4^{e}.

Les fonctions trigonométriques sont utiles dans le domaine de la **musique** et du **son** en général. En effet, le son se propage sous forme d'ondes sinusoïdales (qui a la forme d'un sinus). Ces fonctions trigonométriques sont aussi utiles en **électricité**. Vous retrouverez aussi les fonctions trigonométriques dans le cours de **physique**.



Matériel :

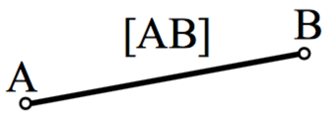
- Ce polycopié de cours
- Les Séries intitulées : « Trigonométrie Série … » (TS1, etc.)
- Le livre de la CRM : « Notions élémentaires » (Cours et exercices)
- Le formulaire et table CRM (Pour les épreuves)
- Des feuilles quadrilles (ou cahier)
- Un compas
- Une calculatrice (non PRO)

1. Rappel de trigonométrie[1]

1.1 Quelques définitions de géométrie :

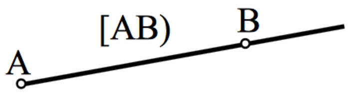
Définition : Un ***segment de droite*** est la portion de droite limitée par deux points.
On notera $[AB]$ le segment de droite limitée par les deux points A et B.

Illustration :



Définition : Une ***demi-droite*** est une portion de droite limitée par un point.
On notera $[AB)$ la demi-droite limitée par le point A, passant par le point B.

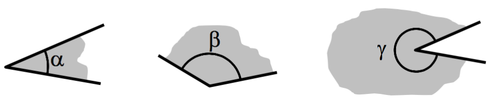
Illustration :



Définition : Les extrémités d'un segment de droite et l'extrémité d'une demi-droite sont appelés ***sommets***.
A et B sont les sommets du segment $[AB]$
A est le sommet de la demi-droite $[AB)$

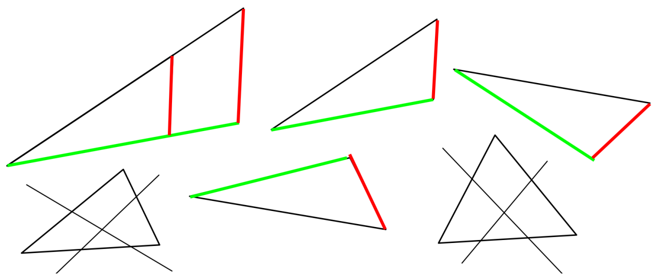
Définition : Un ***angle*** est une portion de plan limitée par deux demi-droites de même sommet. Il se mesure en ***degré***, qui est basé sur une subdivision d'un disque en 360 angles de même grandeur.

Illustration :



Définition : Deux triangles sont ***semblables*** s'ils ont trois angles respectivement égaux. (deux angles égaux suffisent)
Les côtés joignant les angles de même valeur sont dits ***homologues***.

Exemples et contre-exemples :

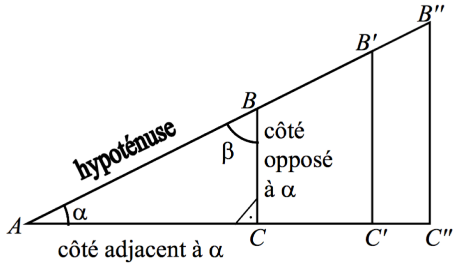


[1] Les illustrations sont tirées du cours de Bernard Gisin

Théorème de Thalès :

<u>**Si**</u> ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles semblables,

<u>**Alors**</u> : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$.



Rappelons que la somme des angles d'un triangle vaut 180°.
En particulier, dans un triangle rectangle, la somme $\alpha + \beta$ des deux angles aigus vaut 90°.

En conséquence, dans un triangle rectangle, les rapports $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$, $\frac{BC}{AC}$ ne dépendent que de la mesure de l'angle α.

Compléter : $\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{\quad}{AB''}$ $\qquad \frac{AC}{AB} = \frac{\quad}{AB'} = \underline{\qquad}$ $\qquad \frac{BC}{AC} = \underline{\qquad} = \underline{\qquad}$

Cette remarque permet les définitions de la page suivante.

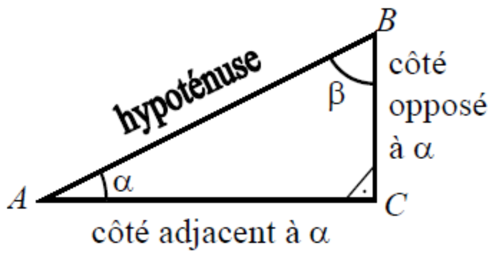
Cadre constant dans ce chapitre :

ABC désigne les sommets d'un triangle rectangle

L'angle de sommet C sera l'angle droit

α désignera la mesure de l'angle de sommet A

β désignera la mesure de l'angle de sommet B



Définition :
Le plus long côté du triangle rectangle s'appelle :

Les autres côtés du triangle s'appellent :

Le côté à α est le côté [AC].

Le côté à α est le côté [BC].

Le côté à β est le côté [AC].

Le côté à β est le côté [BC].

Les trois côtés sont reliés par la formule : par le théorème de Pythagore.

1.2 Les définitions de trigonométrie

Selon le théorème de Thalès, les rapports $\frac{BC}{AB}$, $\frac{AC}{AB}$ et $\frac{BC}{AC}$ ne dépendent que de l'angle α.

$\mathbf{sin}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{BC}{AB} = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \alpha}{longueur\ de\ l'hypothénuse}$	On dit : "sinus de alpha"
$\mathbf{cos}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{AC}{AB} = \frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \alpha}{longueur\ de\ l'hypothénuse}$	On dit : "cosinus de alpha"
$\mathbf{tan}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{BC}{AC} = \frac{longueur\ du\ côté\ opposé\ à\ \alpha}{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ \alpha}$	On dit : "tangente de alpha"

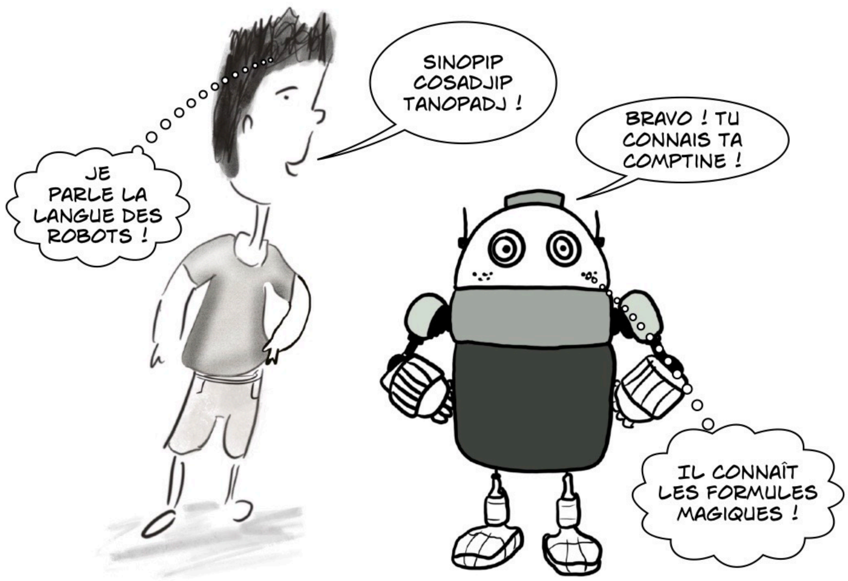
Truc mnémotechnique pour s'en souvenir :

"sin op hyp
cos adj hyp
tan op adj"

« **sin op ip** » : **sin**us = **op**posé sur **hyp**oténuse

« **cos adj ip** » : **cos**inus = **adj**acent sur **hyp**oténuse

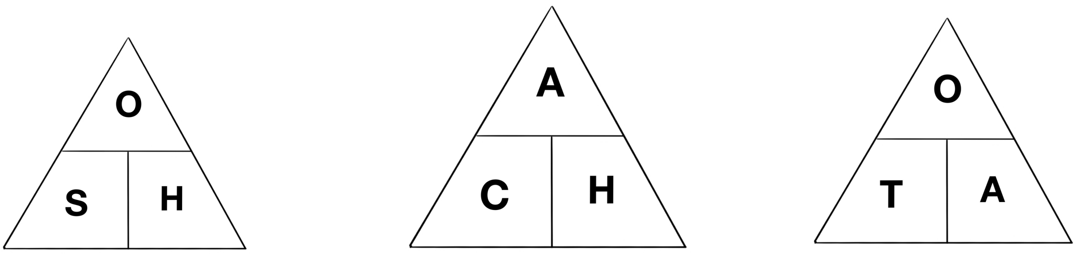
« **tang op adj** » : **tang**ente = **op**posé sur **adj**acent



Autre truc mnémotechnique :

"SOH CAH TOA" :

"SOH": $\boldsymbol{S}inus = \frac{\boldsymbol{O}pposé}{\boldsymbol{H}ypothénuse}$ "CAH" : $\boldsymbol{C}osinus = \frac{\boldsymbol{A}djacent}{\boldsymbol{H}ypothénuse}$ "TOA" : $\boldsymbol{T}angente = \frac{\boldsymbol{O}pposé}{\boldsymbol{A}djacent}$



Avant l'apparition de bonnes calculatrices, les élèves et scientifiques en général utilisaient des tables de valeurs. Ces formules sont programmées dans vos calculatrices. Il faudra donc ne pas oublier de vous munir de cet outil précieux en trigonométrie !

Deg.	Radians	Sin	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Tang.	Cotg	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cos		
0	0,0000	0,0000	Infini	0,000	Infini	1,000	1,0000	1,5708*	90
1	0,0175*	0,0175*	57,30*	0,0175*	57,29*	1,000	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349*	28,65	0,0349	28,64*	1,001*	0,9994*	1,5359*	88
3	0,0524*	0,0523	19,11*	0,0524	19,08	1,001*	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698*	14,34*	0,0699	14,30	1 002	0,9976*	1,5010*	86
5	0,0873*	0,0872*	11,47	0,0875*	11,43	1,004*	0,9962*	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	9,567*	0,1051	9,514	1,006*	0,9945	1,4661*	84
7	0,1222*	0,1219*	8,206*	0,1228*	8,144	1,008*	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392*	7,185	0,1405	7,115	1,010*	0,9903*	1,4312*	82
9	0,1571*	0,1564	6,392	0,1584*	6,314*	1,012	0,9877*	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	5,759*	0,1763	5,671	1,015	0,9848	1,3963*	80
11	0,1920*	0,1908	5,241*	0,1944*	5,145*	1,019*	0 9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	4,810*	0,2126*	4,705*	1,022	0,9781	1,3614*	78
13	0,2269*	0,2250*	4,445	0,2309*	4,331	1,026	0,9744*	1,3439	77
14	0,2443	0 2419	4,134*	0,2493	4,011*	1,031*	0,9703*	1,3265*	76
15	0,2618*	0,2588	3,864*	0,2679	3,732	1,035	0,9659	1,3090*	75
16	0,2793*	0,2756	3,628*	0,2867	3,487	1,040	0,9613*	1,2915	74
17	0,2967	0,2924*	3,420	0,3057	3,271*	1,046*	0,9563	1,2741*	73
18	0,3142*	0,3090	3,236	0,3249	3,078*	1,051	0,9511*	1,2566	72
19	0,3316	0,3256*	3,072*	0,3443	2,904	1,058*	0,9455	1,2392*	71
20	0,3491*	0,3420	2,924*	0,3640*	2,747	1,064	0,9397*	1,2217	70
21	0,3665	0,3584*	2,790	0,3839*	2,605	1,071	0,9336*	1,2043*	69
22	0,3840*	0,3746	2,669	0,4040	2,475	1,079*	0,9272*	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	2,559	0,4245*	2,356*	1,086	0,9205	1,1694*	67
24	0,4189*	0,4067	2,459*	0,4452	2,246	1,095*	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	2,366	0,4663	2,145*	1,103	0,9063	1,1345*	65
26	0,4538*	0,4384*	2,281	0,4877	2,050	1,113*	0,8988*	[illegible]	64
27	0,4712	0,4540*	2,203*	0,5095	1,963*	1,122	0,8910	1,0996*	63
28	0,4887*	0,4695*	2,130	0 5317	1,881*	1,133*	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	2,063*	0,5543	1,804	1,143	0,8746	1,0647*	61
30	0,5236*	0,5000	2,000	0,5774*	1,732	1,155*	0,8660	1,0472*	60
31	0,5411*	0,5150	1,942*	0,6009*	1,664	1,167*	0,8572*	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	1,887	0,6249*	1,600	1,179	0,8480	1,0123*	58
33	0,5760*	0,5446	1,836	0,6494	1,540*	1,192	0,8387*	0,9948	57
34	0,5934	0,5592*	1,788	0,6745	1,483*	1,206	0,8290	0,9774*	56
35	0,6109*	0,5736*	1,743	0,7002	1,428	1,221*	0,8192*	0,9599	55
36	0,6283	0,5878*	1,701	0,7265	1,376	1,236	0,8090	0,9425*	54
37	0,6458*	0,6018	1,662*	0,7536*	1,327	1,252	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157*	1,624	0,7813*	1,280*	1,269	0,7880	0,9076*	52
39	0,6807*	0,6293	1,589	0,8098*	1,235*	1,287*	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428*	1,556*	0,8391*	1,192*	1,305	0,7660	0,8727*	50
41	0,7156*	0,6561*	1,524	0,8693*	1,150	1,325	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	1,494	0,9004	1,111*	1,346*	0,7431	0,8378*	48
43	0,7505*	0,6820*	1,466	0,9325	1 072	1,367	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947*	1,440*	0,9657*	1,036*	1,390	0,7193	0,8029*	46
45	0,7854*	0,7071	1,414	1,0000	1,000	1,414	0,7071	0,7854*	45
		Cos	$\frac{1}{\text{Cos}}$	Cotg	Tang.	$\frac{1}{\text{Sin}}$	Sin	Radians	Deg.

L'astérisque indique que le dernier chiffre est pris par excès.

<u>Remarque concernant la calculatrice :</u> Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions Sinus, Cosinus et Tangente.

<u>Attention :</u> Un angle peut être exprimé autrement qu'en degrés. *(C'est ce que nous allons étudier cette année)* Quand vous calculerez le sinus, le cosinus ou la tangente d'un angle en degrés sur la calculatrice, vous devrez vous assurer d'avoir sélectionné le mode de calcul d'angles en degrés.

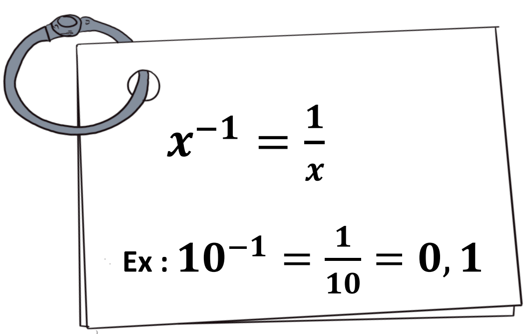
<u>Remarques concernant la calculatrice :</u>

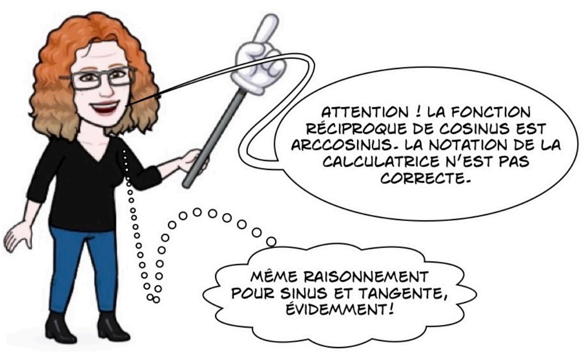
Chaque calculatrice possède des touches permettant de calculer des approximations numériques des fonctions sinus, cosinus et tangente. Elles permettent aussi d'effectuer le calcul inverse, c.-à.-d. de calculer un angle si l'on connaît le rapport des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle.

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{AB} \Rightarrow \alpha = \text{"}\sin^{-1}\left(\frac{\overline{BC}}{AB}\right)\text{"} = \mathbf{arcsin}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{BC}}}{\boldsymbol{AB}}\right) = l'angle\ oppos\acute{e} \text{ à } \overline{BC}$$

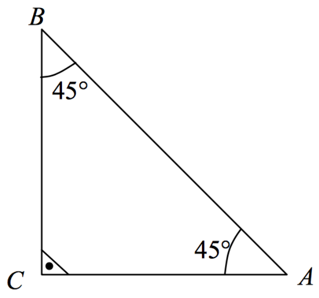
$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AC}}{AB} \Rightarrow \alpha = \text{"}\cos^{-1}\left(\frac{\overline{BC}}{AB}\right)\text{"} = \mathbf{arccos}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{AC}}}{\boldsymbol{AB}}\right) = l'angle\ oppos\acute{e} \text{ à } \overline{AC}$$

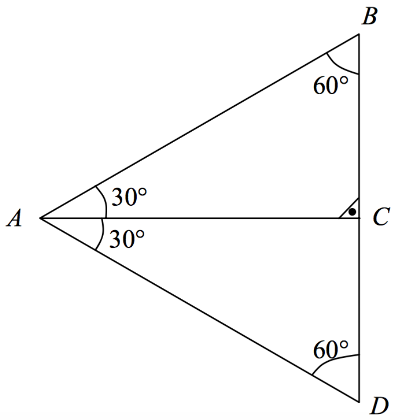
$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{AC} \Rightarrow \alpha = \text{"}\tan^{-1}\left(\frac{\overline{BC}}{AC}\right)\text{"} = \mathbf{arctan}\left(\frac{\overline{\boldsymbol{BC}}}{\boldsymbol{AC}}\right)$$





Exercice : En raisonnant sur les triangles suivants, déterminer les valeurs exactes de $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$ pour des angles α de 30°, 45° et 60°.



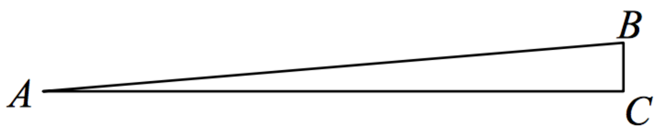


Exercice : Par une extension naturelle, il est raisonnable de définir les valeurs ci-dessous. Donnez ces valeurs avec des justifications.

$\sin(0°) =$ $\sin(90°) =$

$\cos(0°) =$ $\cos(90°) =$

$\tan(0°) =$ Pourquoi $\tan(90°)$ n'est-il pas défini ?

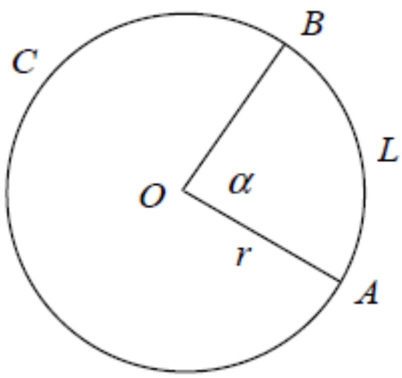


➤ ***Notions élémentaires p. 164 à 166 ex 1 à 19***

2. Mesure d'angles

Dans l'Antiquité, pour simplifier les problèmes de partage d'angles, on a divisé la circonférence du cercle en 360 parties égales, appelées degrés. Ce choix se justifiait par le fait que 360 a un grand nombre de diviseurs. En effet, 360 est divisible par $2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120 \; et \; 180$. Ce choix n'est pas toujours pratique. Une autre façon de mesurer un angle serait de prendre la longueur de l'arc correspondant. Toutefois cette longueur dépend du rayon du cercle.

Soit un cercle C de centre 0 et de rayon $\overline{0A}$.



L'angle au centre $\widehat{AOB}$ intercepte l'arc de cercle$\widehat{AB}$.

Notons : α : la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ (unité : le degré)

et L : la longueur $\widehat{AB}$ (unité : le centimètre).

Les grandeurs α et L sont proportionnelles ; d'où :

(1)
$$\frac{\boldsymbol{\alpha}°}{360°} = \frac{L}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

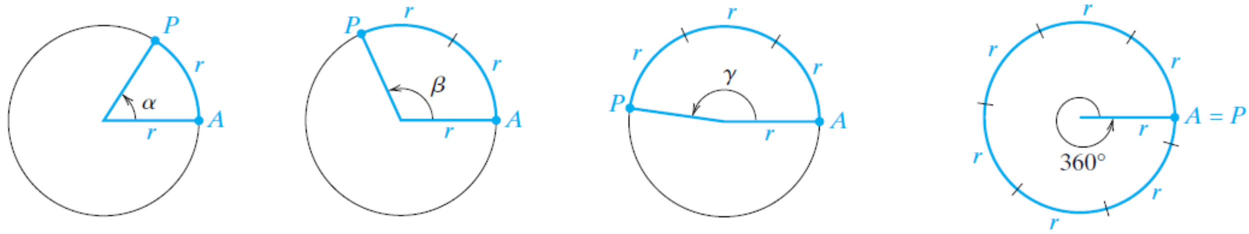
Exercice :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $r = 12 \; cm$. Un angle α, de sommet O intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc AB de longueur $L = 3{,}14 \; cm$.
Déterminer α en degrés. (On accepte l'approximation $\pi \approx 3{,}14$)

Définition :

Un **radian** est un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle.

Pour déterminer la valeur en radians correspondant à $360°$, il faut déterminer le nombre de fois qu'un arc de cercle de longueur r peut être reporté le long d'une circonférence (voir dessin). Ce nombre n'est pas un entier ni même un nombre rationnel. Etant donné que la circonférence du cercle est de $2\pi r$, le nombre de fois que r unités peuvent être reportées est 2π.



Donc un angle qui vaut 2π radians correspond à $360°$, et on écrit : $360° = 2\pi\ radians$.

$\boldsymbol{\alpha°}$	$360°$	$180°$	$90°$	$45°$
Angle [rad]	2π			

On obtient alors la relation suivante :

(2)
$$\frac{\boldsymbol{\alpha°}}{\mathbf{360°}} = \frac{\boldsymbol{L\ [rad]}}{\boldsymbol{2\pi\ [rad]}}$$

Exercice :

Soit C un cercle de centre O et de rayon $r = 12\ cm$. Un angle α, de sommet O intercepte sur C un arc AB de longueur $L = 3{,}14\ cm$. Nous avons calculé que $\alpha = 15°$.
Déterminer α en radians. (On accepte l'approximation $\pi \approx 3{,}14$)

Pour simplifier cette expression, nous prendrons le radian pour nouvelle unité de mesure d'angle. Cette unité est définie par :

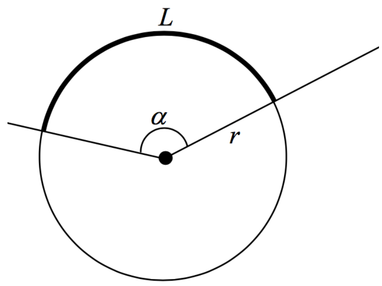
Un angle dont la mesure est **1 radian** est un angle au centre qui intercepte un radian ;
i.e. : un arc de cercle de longueur égale au rayon du cercle.

La mesure des angles en degrés est utilisée dans la pratique pour la navigation de surveillance et la conception d'équipements mécaniques.

Dans les applications scientifiques qui utilisent le calcul différentiel et intégral, on utilise généralement le radian.

Conversion : Si $\boldsymbol{\alpha_r}$ est la mesure en radians et α_d la mesure en degrés, la transformation d'unité est donnée par :

(3)
$$\boxed{\frac{\boldsymbol{\alpha_d}}{\mathbf{360°}} = \frac{\boldsymbol{\alpha_r}[\boldsymbol{rad}]}{\boldsymbol{2\pi}\,[\boldsymbol{rad}]}}$$



Exemples :

a) Transformer $\alpha_d = 30°$ en α_r :

b) Transformer $\alpha_r = \pi$ en α_d :

Définition : Le radian est une unité de mesure d'angle :

$$angle = \frac{L}{r}\ \ radians$$

Remarques :

- D'une manière générale, on exprime la valeur exacte d'un angle en radians par une fraction contenant le nombre π.

- Si $r = 1\ unité, alors\ l'angle\ en\ radians = L$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Trigonométrie plane

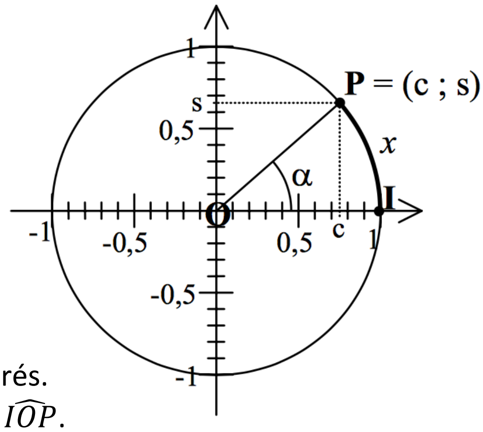
Conversion des mesures d'angles

On note respectivement d, r et g la mesure d'un angle en degrés, en radians et en grades.

Pour un même angle, on a $\boxed{\frac{d}{180} = \frac{r}{\pi} = \frac{g}{200}}$

- **Trigonométrie Série 1 ex 6 à 10 & 20 à 22**
- **Notions élémentaires, p.166 ex 20 et 21**

3. Cercle trigonométrique



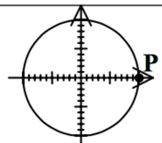
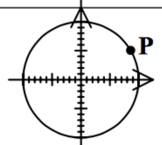
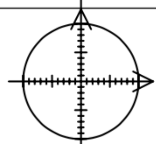
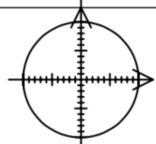
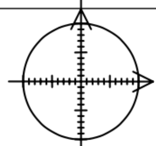
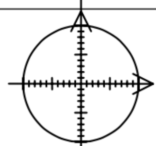
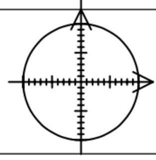
3.1 Coordonnées

Considérons un point P sur le cercle de rayon 1, centré à l'origine.
Notons O le centre du cercle, et I le point de coordonnées $(1; 0)$.

Ce point P peut être déterminé de différentes manières :

1. Par ses coordonnées, que nous noterons : $(c; s)$
2. Par la grandeur de l'angle $\widehat{IOP}$, que nous noterons α en degrés.
3. Par la longueur x de l'arc de ce cercle intercepté par l'angle $\widehat{IOP}$.
   On a vu que $x = l'angle\ \widehat{IOP}\ exprimé\ en\ radians$.

Complétez le tableau suivant :

α	x	c	s	dessin de **P**
0°	0	1	0	
30°				
45°				
		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	$\frac{\pi}{2}$			
20°				
57,3°				
α°				
	x			

Quels liens constatez-vous entre α, x, c et s ?

3.2 Définitions :

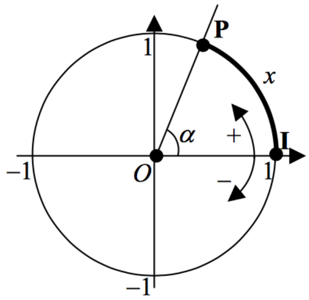
Remarquons que l'exercice qui précède montre que pour des angles α entre 0° et 90°, la première coordonnée du point P égale $\cos(\alpha)$ et que la deuxième coordonnée du point P égale $\sin(\alpha)$.

Avant de passer à la généralisation des définitions des fonctions trigonométriques, les deux définitions suivantes sont nécessaires.

Définitions :

Le ***cercle trigonométrique*** est le cercle de rayon 1, centré à l'origine.

L'abscisse curviligne x d'un point P sur le cercle trigonométrique est la distance à parcourir le long du cercle, en partant du point $I = (1; 0)$, pour arriver au point P. Elle est comptée positivement quand on se déplace dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, négativement quand on se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre.

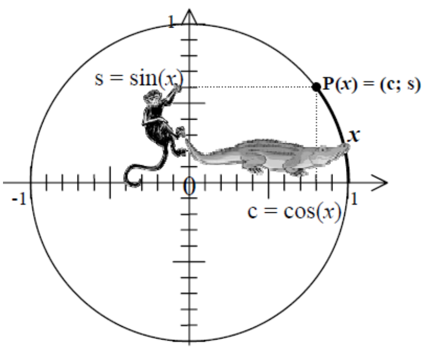


Elle coïncide avec la mesure de l'angle $\widehat{IOP}$ exprimée en ***radians***.

➢ ***Trigonométrie Série 2***

3.3 Généralisation des définitions des fonctions trigonométriques.

- La **fonction cosinus** est définie par : $\cos : \mathbb{R} \to [-1; 1]$
  $\mathbf{cos}(\boldsymbol{x}) = la\ première\ coordonnée\ du\ point\ P\ d'abscissecurviligne\ x$
- La **fonction sinus** est définie par : $\sin : \mathbb{R} \to [-1; 1]$
  $\mathbf{sin}\ (\mathbf{x}) = la\ deuxième\ coordonnée\ du\ point\ P\ d'abscissecurviligne\ x$
- La **fonction tangente** est définie par : $\tan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $\mathbf{tan}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})}{\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})}$ Elle n'est pas définie pour $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, où\ k \in \mathbb{Z}$
- La **fonction cotangente** est définie : $\mathbf{cot}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$



Truc mnémotechnique :
s = le **singe** qui grimpe
c = le **crocodile** qui rampe

3.4 Mesure principale d'un angle

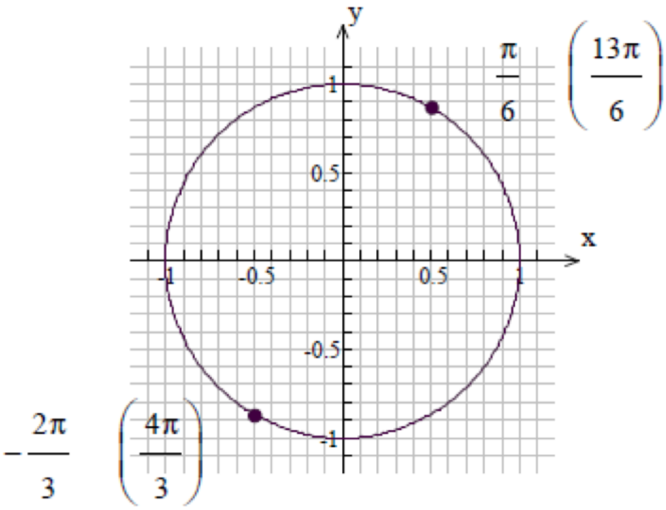
Définition :

L'angle $\widehat{IOP}$ a une infinité de mesures possibles. Si ces mesures sont exprimées en radians, alors une seule d'entre elles est comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure est appelée la ***mesure principale*** de l'angle $\widehat{IOP}$.

Remarque : La mesure principale d'un angle pat est π, par convention. (on avait le choix entre π et $-\pi$)

Exemples :

a. Un angle de mesure $\frac{4\pi}{3}$ $radian$ a pour mesure principale $-\frac{2\pi}{3}radian$.
b. Un angle de mesure $\frac{13\pi}{6}$ $radian$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{6}$ $radian$.



Exercice : Donnez les mesures principales des angles suivants et les placer sur le cercle

$\frac{7\pi}{3} =$

$-\frac{15\pi}{2} =$

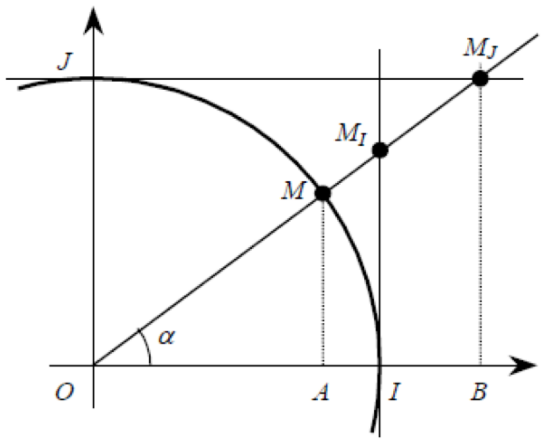
Conclusion : Deux arcs de même origine ont même extrémité si la différence de leurs mesures algébrique est : ……………………., où $k \in \mathbb{Z}$.

3.5 Interprétation géométrique

Peut-on établir un lien entre les expressions sinus, cosinus, tangente et cotangente pour un angle donné ?

On voit sur le croquis ci-dessous qu'il existe trois triangles semblables :

$\Delta OAM \approx \Delta OIM_I \approx \Delta OBM_J$

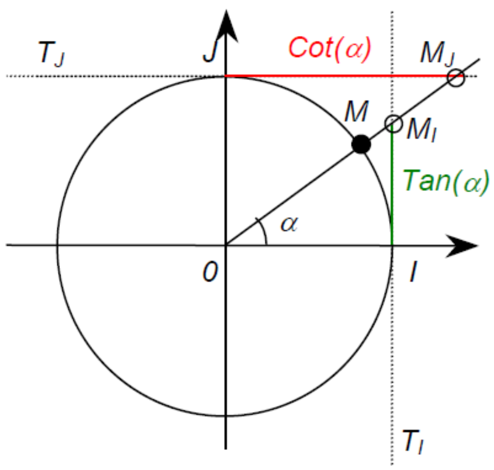


En effet, ils possèdent tous un angle α et un angle droit.

Appliquons le théorème de Thalès :

- $\frac{OA}{OI} = \frac{OM}{OM_I} = \frac{AM}{IM_I} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)}{1} = \left(\frac{1}{OM_I}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{IM_I} \Leftrightarrow IM_I = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$
- $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OM_J} = \frac{AM}{BM_J} \Leftrightarrow \frac{\cos(\alpha)}{OB} = \left(\frac{1}{OM_J}\right) = \frac{\sin(\alpha)}{1} \Leftrightarrow OB = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \mathrm{JM_J} = \cot(\alpha)$

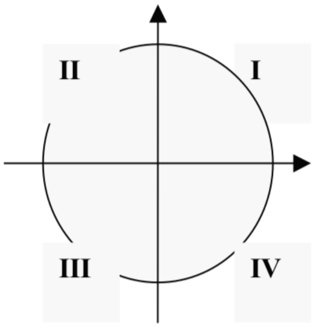
En résumé :



➢ ***Trigonométrie Série 3 ex 3 à 7***

4. Symétries

Les quatre quadrants du cercle trigonométrique sont :



Remplissez le tableau suivant en indiquant le signe de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ suivant le quadrant dans lequel se trouve le point $P(x)$ d'abscisse curviligne x :

$P(x) \in$	I	II	III	IV
sin(*x*)				
cos(*x*)				
tan(*x*)				

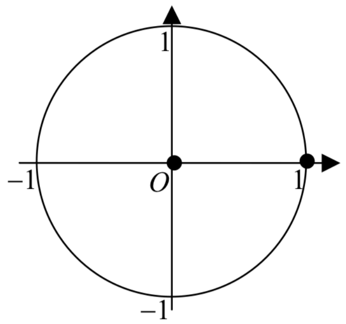
Complétez le tableau suivant en écrivant les valeurs exactes :

x	0	$\pi / 6$	$\pi / 4$	$\pi / 3$	$\pi / 2$
$\alpha(x)$ en °					
$\sin(x)$					
$\cos(x)$					
$\tan(x)$					

Quelles égalités constatez-vous dans ce tableau ?

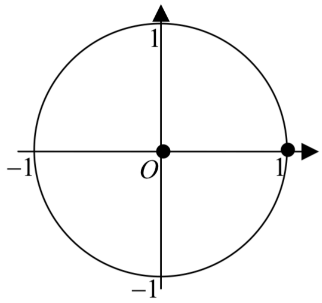
La page suivante permet de répondre à la question suivante : « Comment évaluer les fonctions trigonométriques en des valeurs non comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ " ?

Situation 1 : Intersection avec les axes



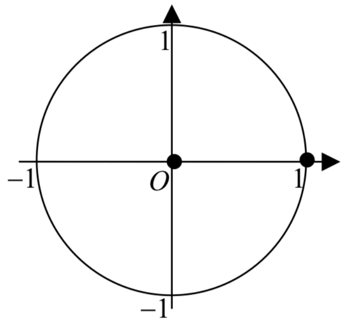
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$tan(x)$				
$\cot(x)$				

Situation 2 : $\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$



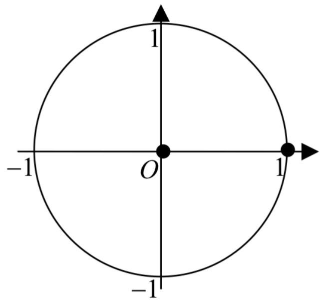
x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$tan(x)$				
$\cot(x)$				

Situation 3 : à $\frac{\pi}{6} + \cdots$



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$tan(x)$				
$\cot(x)$				

Situation 4 : $\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

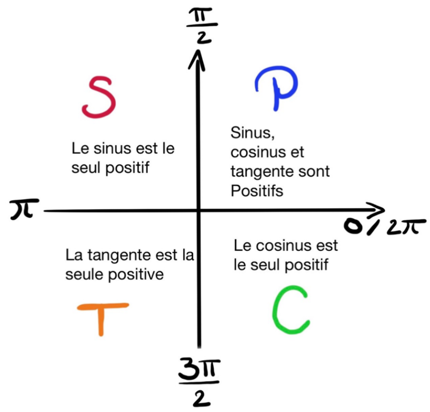


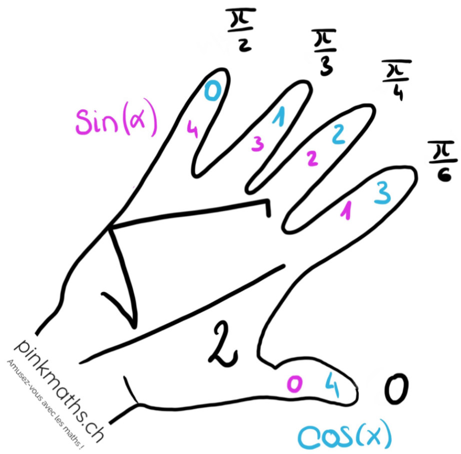
x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\cos(x)$				
$\sin(x)$				
$tan(x)$				
$\cot(x)$				

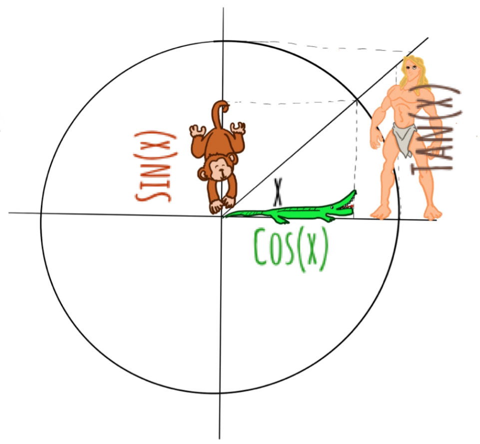
Méthode :

1) Dans quel quadrant est l'angle ?
2) Quel est la valeur de l'angle de référence ?
3) Quel est le signe de la fonction trigo dans ce quadrant ?

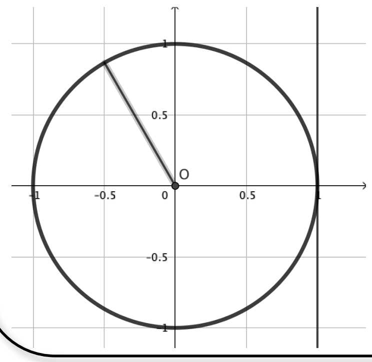
pinkmaths.ch
Amusez-vous avec les maths !







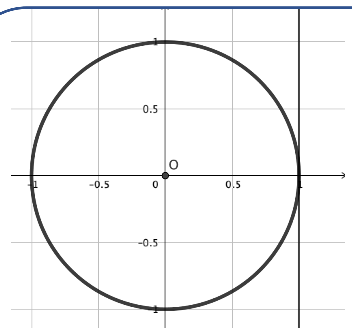
Exemple :



$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

$$\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$$

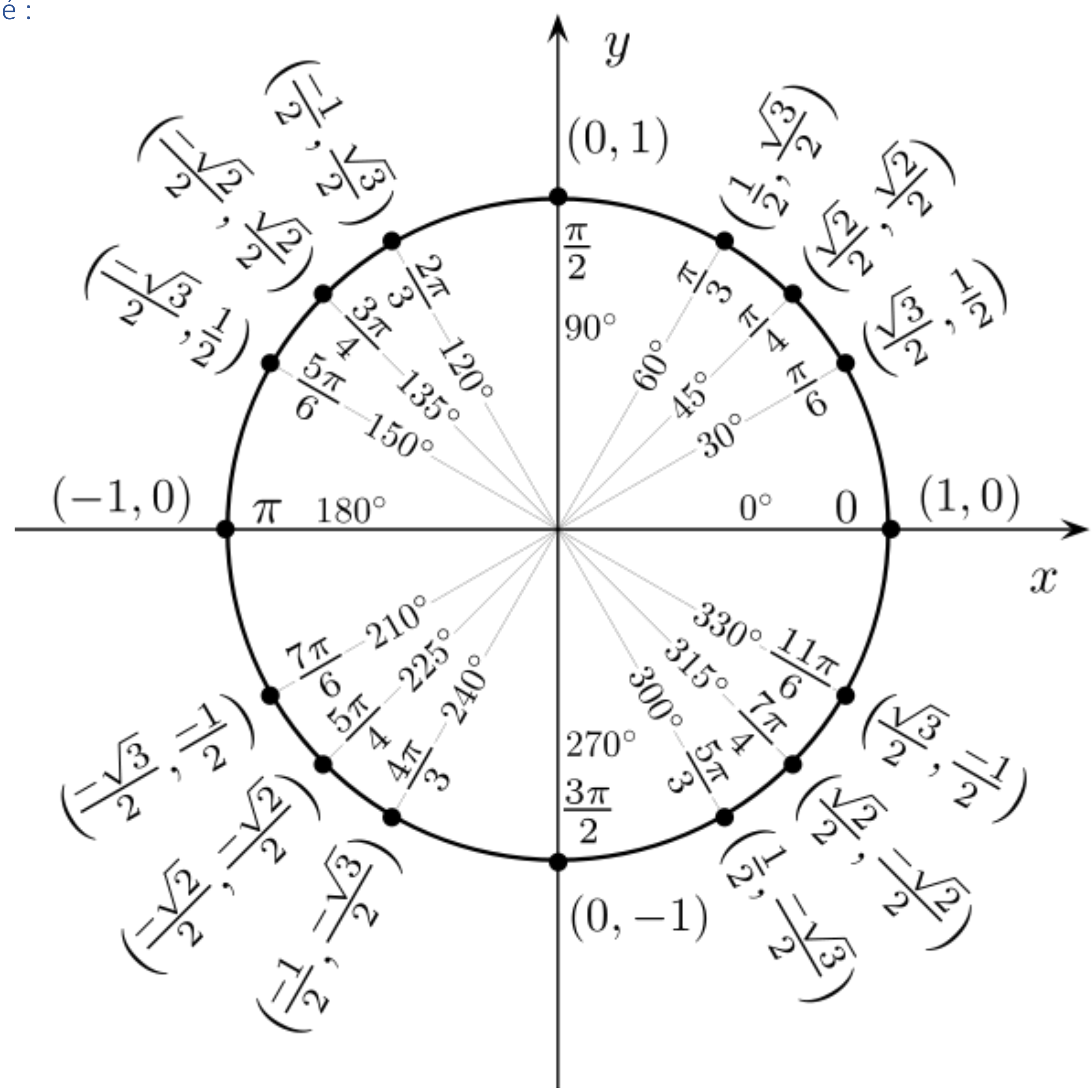


$$\sin(\qquad) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos(\qquad) = +$$

$$\tan(\qquad) =$$

Résumé :

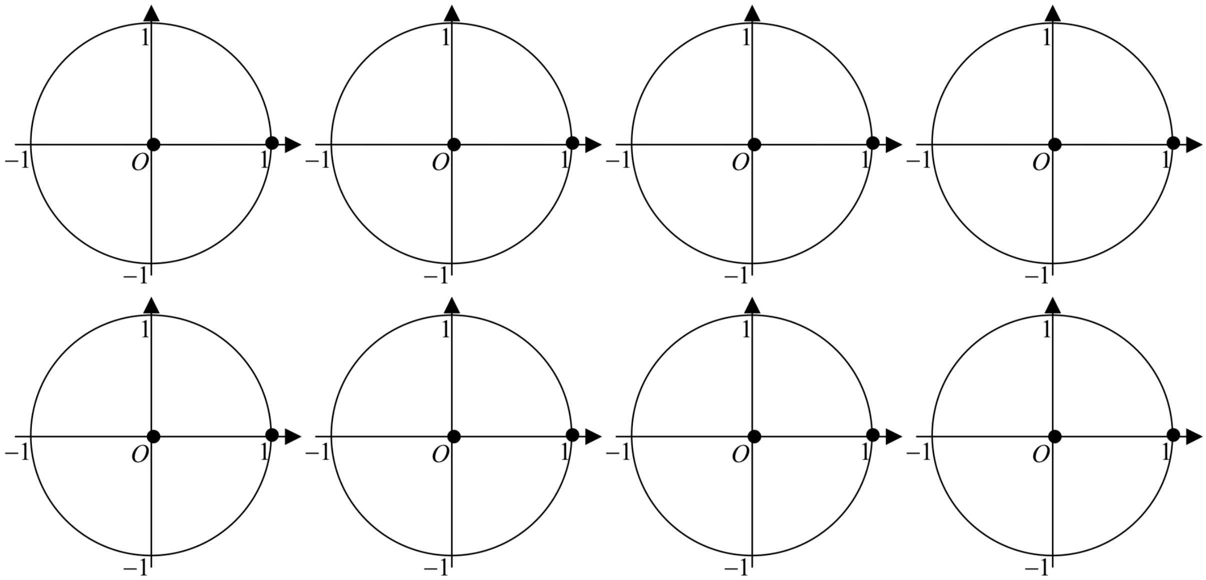


Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

α		$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$0°$	0	1	0	0
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

Exercice : En dessinant et raisonnant sur des cercles trigonométriques, complétez les égalités suivantes avec $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou leur opposé.



$\cos(x + 2\pi) =$ $\sin(x + 2\pi) =$

$\cos(x - 2\pi) =$ $\sin(x - 2\pi) =$

$\cos(-x) =$ $\sin(-x) =$

$\cos(x + \pi) =$ $\sin(x + \pi) =$

$\cos(x - \pi) =$ $\sin(x - \pi) =$

$\cos(\pi - x) =$ $\sin(\pi - x) =$

$\cos(x + \pi/2) =$ $\sin(x + \pi/2) =$

$\cos(x - \pi/2) =$ $\sin(x - \pi/2) =$

$\cos(\pi/2 - x) =$ $\sin(\pi/2 - x) =$

Exercice : Complétez en écrivant à droite des égalités suivantes des expressions avec $\tan(x)$, son opposé, son inverse ($\cot(x)$) ou l'opposé de son inverse.

$\tan(x + 2\pi) =$ $\tan(x - 2\pi) =$

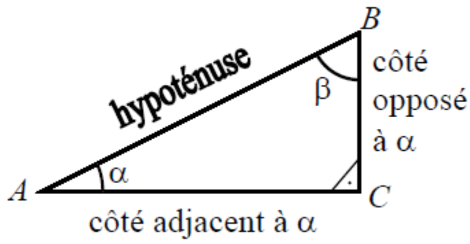
$\tan(x + \pi) =$ $\tan(x - \pi) =$

$\tan(-x) =$ $\tan(\pi - x) =$

$\tan(x + \pi/2) =$ $\tan(x - \pi/2) =$

$\tan(\pi/2 - x) =$

Propriétés de trigonométrie :



1) $\alpha + \beta =$
   Car :

2) Par symétrie sur le triangle rectangle on voit que :
   $\sin(\beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\qquad) =$

   $\cos(\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\qquad) =$

3) $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
   Car :

4) $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 =$
   On écrit aussi plus simplement :
   $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) =$

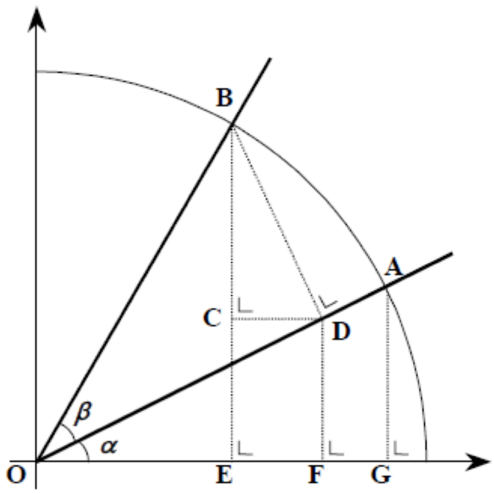
   Ceci est une conséquence directe du théorème de Pythagore. Justifions :

   C'est une formule très importante que vous devez connaitre absolument !!!

5) Puisque dans un triangle rectangle, le sinus et le cosinus d'un angle sont positifs, on déduit de cette formule que :

$\sin(\alpha) = \sqrt{\qquad\qquad}$ $\quad et\ cos(\alpha) = \sqrt{\qquad\qquad}$

Image de la somme de deux angles



Théorème : Règles de la somme de deux angles :

- $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Preuves :

- Construisons nos deux angles α et β adjacents.
- Soient A et B les points d'abscisses curvilignes correspondants.
- Construisons D sur $[OA]$ tel que $[BD]$ soit perpendiculaire à $[OA]$.
- Soient E, F et G les projections orthogonales des points B, D et A sur l'axe horizontal.
- Construisons C sur $[EB]$ ayant la même ordonnée que D.

On a : les triangles OGA, OFD et BCD sont semblables, ayant tous un angle droit et un angle α.

1. Calcul de $\overline{BE} = \sin(\alpha+\beta)$. ***Astuce*** : $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \overline{BC} + \overline{FD}$.

   A l'aide du théorème de Thalès, on obtient les rapports suivants :

   - $\frac{\overline{BC}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OA}} = \left(\frac{\overline{CD}}{\overline{GA}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\cos(\alpha)} = \frac{\sin(\beta)}{1} \Rightarrow \overline{BC} = \cos(\alpha)\sin(\beta)$.
   - $\frac{\overline{FD}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \left(\frac{\overline{OF}}{\overline{OG}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{FD}}{\sin(\alpha)} = \frac{\cos(\beta)}{1} \Rightarrow \overline{FD} = \sin(\alpha)\cos(\beta)$.

   Ainsi, en additionnant les 2 segments : $\underline{\sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)}$.

2. Calcul de $\overline{OE} = \cos(\alpha+\beta)$. ***Astuce*** : $\overline{OE} = \overline{OF} - \overline{EF} = \overline{OF} - \overline{CD}$.

   A l'aide du théorème de Thalès, on obtient les rapports suivants :

   - $\frac{\overline{OF}}{\overline{OG}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \left(\frac{\overline{FD}}{\overline{GA}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{OF}}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\beta)}{1} \Rightarrow \overline{OF} = \cos(\alpha)\cos(\beta)$.
   - $\frac{\overline{CD}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{OA}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{OG}}\right) \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\beta)}{1} \Rightarrow \overline{CD} = \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

   Ainsi, en soustrayant les 2 segments : $\underline{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}$.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Image de la différence de deux angles

Théorème : Règles de la différence de deux angles :

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Preuve : Il suffit de substituer β par $-\beta$ dans les formules de la somme, et relatives aux angles opposés.

D'autres formules que l'on peut trouver dans la table CRM :

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)\big(1 - 4\sin^2(\alpha)\big) = \cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 3\big)$$

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 1\big) = \sin(\alpha)\big(3 - 4\sin^2(\alpha)\big)$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{\tan(\alpha)\big(3 - \tan^2(\alpha)\big)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$$

Preuve pour l'angle double : Il suffit de substituer β par α dans les formules de la somme.

Preuve de l'angle triple : Il suffit de substituer β par 2α dans les formules de la somme et d'utiliser le théorème de Pythagore pour les fonctions trigonométriques :

$$sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1, \forall \alpha \epsilon \in \mathbb{R}$$

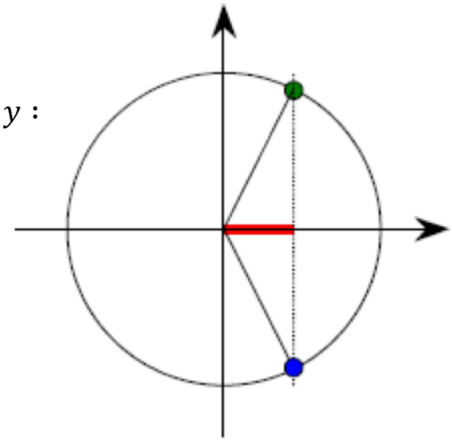
➢ ***Trigonométrie Série 3 exercices 17 à 19***

5. Équations trigonométriques

Définition : Une ***équation trigonométrique*** est une équation contenant l'une au moins des fonctions trigonométriques vues dans les paragraphes précédents.

Voici trois exemples d'équations trigonométriques.

Équation n°1 : $\cos(x) = \cos(y)$



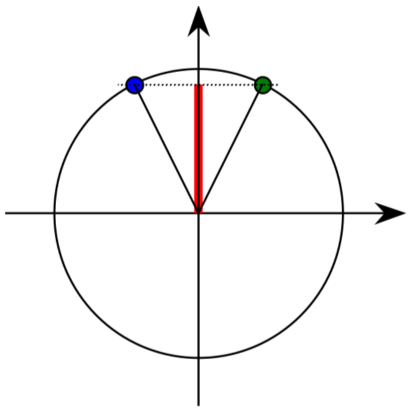
Cette équation lie les deux variables x et y.
A l'aide du croquis, déterminons les deux liens distincts entre x et y :

Premier lien : $x = y$
Deuxième lien : $x = -y$

Ensemble de solutions : $\begin{cases} x_1 = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = -y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice : Résoudre : $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équation n°2 : $\sin(x) = \sin(y)$



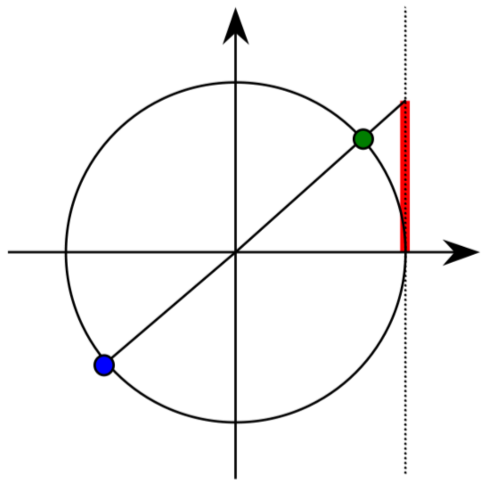
Cette équation lie les deux variables x et y.
A l'aide d'un croquis, déterminons les deux liens distincts entre x et y.

Premier lien : $x = y$
Deuxième lien : $x = \pi - y$

Ensemble des solutions : $\begin{cases} x_1 = y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 = \pi - y + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Exercice : Résoudre : $\sin(\mathrm{x}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Équation n°3 : $\tan(x) = \tan(y)$



Cette équation lie les deux variables x et y.

A l'aide du croquis, déterminer deux liens distincts entre x et y

Premier lien : $x = y$
Deuxième lien : $x = \pi + y$

Ensemble des solutions : $x = y + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Exercice : Résoudre : $\tan(x) = 1$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Équations trigonométriques simples

$$\cos(x) = a \iff \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = -\arccos(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \iff \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = a \iff x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

➢ ***Notions élémentaires, p.169 ex 38 & p.158-161***

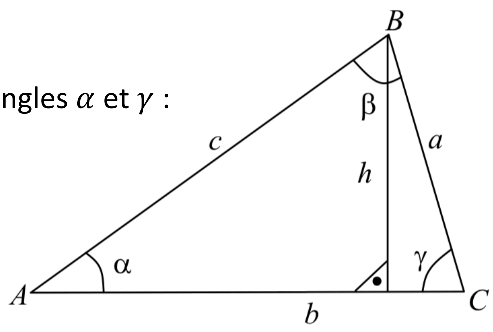
6. Triangles quelconques

Les formules de trigonométrie étudiées jusqu'à présent ne sont valables que pour des triangles rectangles. Elles ne sont pas valables dans des triangles quelconques.

Le but des théorèmes suivants est de permettre de calculer des grandeurs manquantes d'un triangle quelconque.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons des angles en degrés.

6.1 Théorème du sinus



Considérons un triangle rectangle ABC quelconque :
Cherchons une relation qui relie les longueurs a et c aux deux angles α et γ :

1) Exprimez h en fonction de c et du sinus de α :

2) Exprimer h en fonction de a et du sinus de γ :

3) En éliminant l'inconnue h des deux égalités précédentes, vous obtenez une relation entre a, c, α et γ. :

4) Écrivez cette relation en mettant a et α d'un côté de l'égalité et c et γ de l'autre côté.

5) Trouvez une relation correspondante entre a, α, b et β :

6) Les deux relations s'appellent « **le théorème du sinus** ».

Remarquez qu'il est insuffisant de connaître le sinus s d'un angle α d'un triangle, pour en déterminer l'angle α. Il reste deux possibilités :

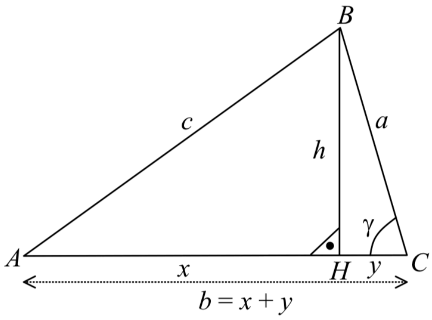
soit $\alpha = \arcsin(s)$, soit $\alpha = 180° - \arcsin(s)$.

En étudiants les côtés du triangle on peut conclure.

Si $a^2 < b^2 + c^2$, alors $\alpha < 90°$ ($\alpha \in 1^{\text{er}}$ quadrant), donc $\alpha = \arcsin(s)$.

Si $a^2 > b^2 + c^2$, alors $\alpha > 90°$ ($\alpha \in 2^{\text{ème}}$ quadrant), donc $\alpha = 180° - \arcsin(s)$.

6.2 Théorème du cosinus



Considérons un triangle ABC $quelconque$.
Notons : $x = AH, y = HC,$ les autres longueurs sont assez explicites.

Cherchons une relation qui relie les longueurs a, b et c des trois côtés à l'angle γ.

1) A l'aide du théorème de Pythagore,
exprimez c^2 en fonction de x^2 et h^2.

2) A l'aide du théorème de Pythagore,
exprimez h^2 en fonction de a^2 et y^2.

3) Substituez la valeur de h^2
dans l'expression obtenue en 1) .

4) Utilisez une identité remarquable,
pour factoriser $x^2 - y^2$
de l'expression précédente.

5) Utilisez $b = x + y$ pour éliminer x
de l'expression obtenue précédemment.

6) Développez l'expression.

7) Exprimez y en fonction de a et de $\cos(\gamma)$
et remplacez-le dans l'expression.

8) Vous avez exprimé c^2 en fonction de a^2 , b^2 et $\cos(\gamma)$.
Cette relation s'appelle « **le théorème du cosinus** ».

On a aussi :

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos(\alpha) \qquad et \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos(\beta)}$$

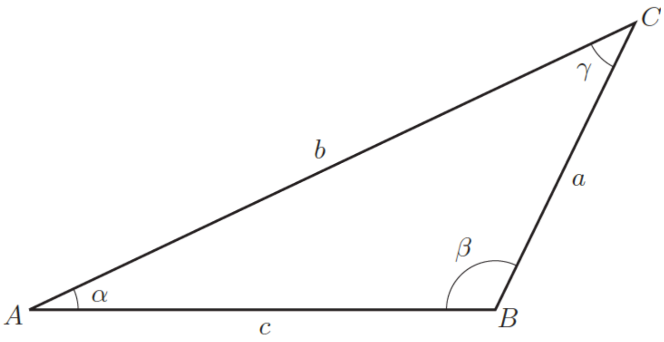
- Le théorème généralise celui de Pythagore. Si $\gamma = 90°$: $\cos(90°) = 0$ donc $c^2 = a^2 + b^2$

- Si $\gamma = 0°$, la relation obtenue exprime simplement que $c = |b - a|$: $\cos(0°) = 1$ donc $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$

- Si $\gamma = 180°$, la relation obtenue exprime simplement la relation : $c = b + a$, $\cos(\gamma) = -1$ donc, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Triangle quelconque



Théorème du cosinus

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}}$$

Théorème du sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

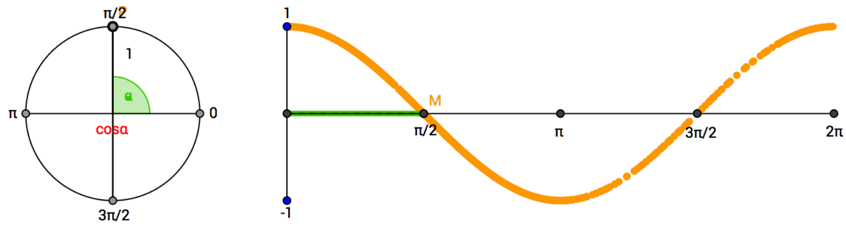
➢ ***Notions élémentaires exercices 45 à 49, p. 170-171***

7. Fonctions trigonométriques

7.1 Les fonctions sinus et cosinus

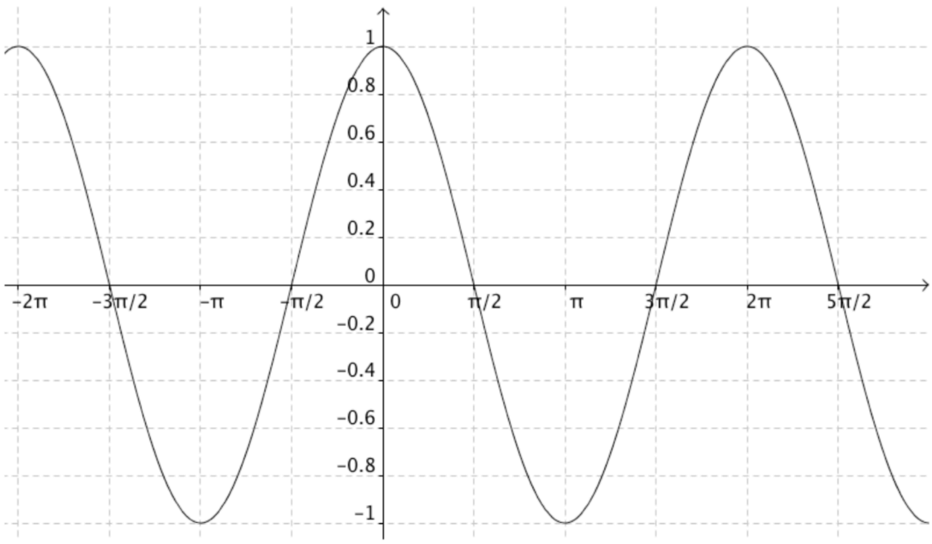
Avec différentes images pour la fonction cosinus, on peut établir une représentation graphique.

x	0	$\frac{\pi}{2}$							
$\cos(x)$									



[2]

Représentation graphique de la fonction $c(x) = \cos(x)$



Fonction cosinus

Que peut-on observer ?
Que se passe-t-il si on modifie un peu cette fonction ?

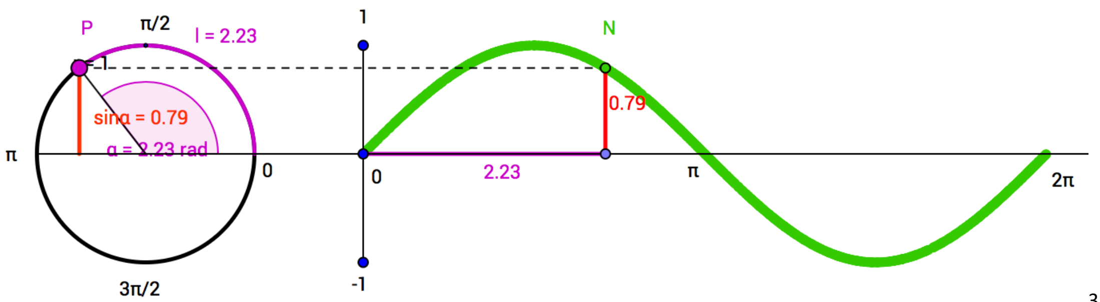
Exemples : $f_1(x) = \cos(2x)$, $f_2(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 3 \cdot \cos(x)$
ou encore $f_4(x) = \cos(x) + 2$

[2] https://www.geogebra.org/m/wRtHvYau#material/AHmd92wz

Quels rôles pour les constantes a, b, c dans $f(x) = a \cdot \cos(bx) + c$ par rapport à $\cos(x)$?
Étudions maintenant la fonction sinus :

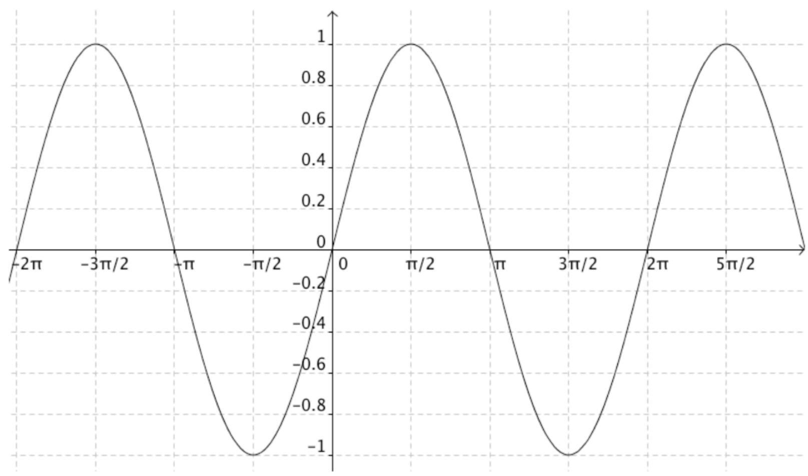
Avec différentes images pour la fonction sinus, on peut établir une représentation graphique.

x	0	$\frac{\pi}{2}$							
$\sin(x)$									



[3]

Représentation graphique de la fonction $s(x) = \sin(x)$



Fonction sinus

Que peut-on observer ?

Que se passe-t-il si on modifie un peu cette fonction ?

Exemples : $f_1(x) = \sin(2x)$, $f_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_3(x) = 3 \cdot \sin(x)$
ou encore $f_4(x) = \sin(x) + 2$

Quels rôles pour les constantes a, b, c dans $f(x) = a \cdot \sin(bx) + c$ par rapport à $\sin(x)$?

[3] https://www.geogebra.org/m/wRtHvYau#material/C4ADwDrH

7.2 Généralisation

Théorèmes sur les amplitudes, les périodes et les déphasages :

<u>Si</u> $f(x) = a \cdot \cos(bx + c)$ ou $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$, pour $a, b, c \in \mathbb{R}^*$

<u>Alors :</u>

- L'amplitude est $|a|$
- La période est $\frac{2\pi}{|b|}$
- Le déphasage est $-\frac{c}{b}$

Remarque : On obtient un intervalle contenant exactement une période en résolvant les deux équations suivantes :

$$bx + c = 0 \qquad et \qquad bx + c = 2\pi$$

Exemple 1 : Trouver l'amplitude, la période et le déphasage de la fonction

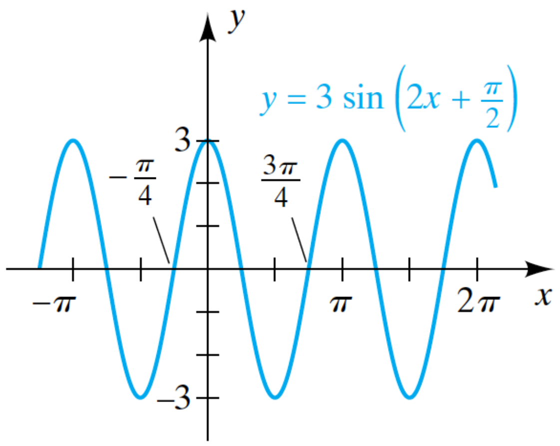
$$f(x) = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

- L'amplitude : $|3| = 3$
- La période : $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$
- Le déphasage : $-\frac{\pi}{4}$

En utilisant la remarque, on voit : $2x + \frac{\pi}{2} = 0 \;\; et \;\; 2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$ donnent $x = -\frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

On vérifie : $\frac{3\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

Représentation graphique :



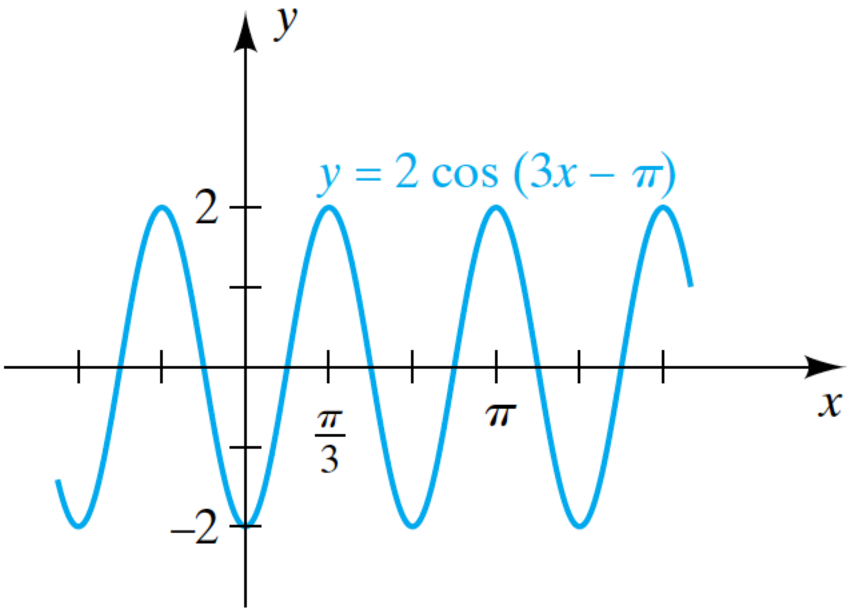
Exemple 2 : Trouver l'amplitude, la période et le déphasage et représenter graphiquement $f(x) = 2\cos(3x - \pi)$ et indiquer ces valeurs ur le graphique.

- L'amplitude :

- La période :

- Le déphasage :

Représentation graphique :



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

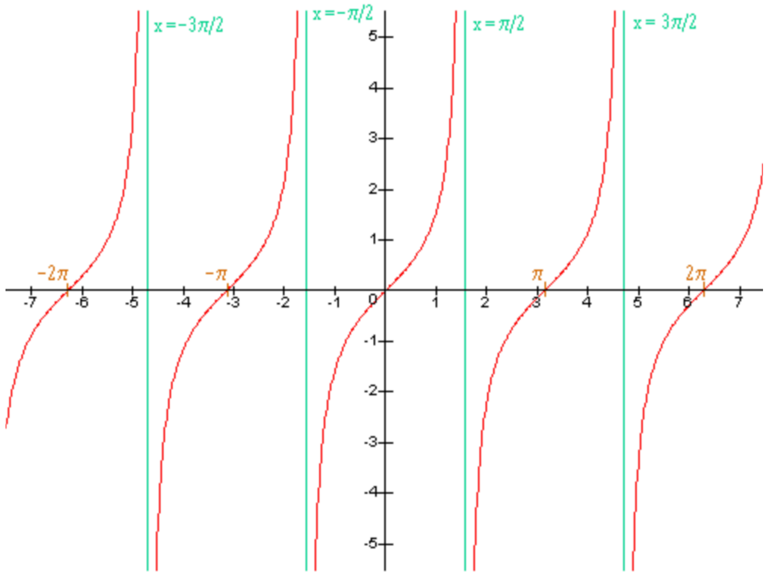
Périodicité des fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

➢ ***Trigonométrie Série 4***

7.3 La fonction tangente :

Voilà la représentation graphique de la fonction $t(x) = \tan(x)$



Théorème :

Si $f(x) = a \cdot \tan(bx + c)\,, pour\ a, b \in \mathbb{R}^*$
Alors

- La période est : $\frac{\pi}{|b|}$
- Le déphasage est : $-\frac{c}{b}$
- Les asymptotes verticales successives pour le graphique se déterminent en résolvant les équations suivantes : $bx + c = -\frac{\pi}{2} \quad et \quad bx + c = \frac{\pi}{2}$

Exemple : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

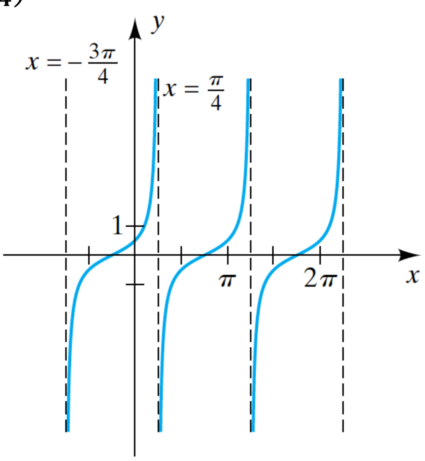


Table des matières