Géométrie vectorielle Série 3

Ne pas écrire sur l'énoncé. Résoudre les exercices sur des feuilles à part.

Apprendre à rédiger les étapes pour développer des automatismes et consolider la notation et la rédaction.

Il n'y a pas la place d'effectuer des exercices sur la feuille de l'énoncé. Il y a les solutions en fin de série.

Exercice 1 :

Soit la droite d d'équations paramétriques $d:\begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$

a) Le point $A(3;5;2)$ appartient-il à d ?

b) On donne les points $B(1;6;0)$ et $C(3;0;-2)$. La droite (BC) est-elle parallèle à d ?

c) Etablissez une représentation paramétrique de la droite (BC).

Exercice 2 :

Soit d la droite passant par le point $A(2;2;-4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Écrire un système d'équations paramétriques de d

b) Les points $R(3;4;-1)$; $S(4;6;-2)$ et $T(-1;-4;-13)$ sont-ils des éléments de d ?

c) Déterminer les points suivants s'ils existent

1. le point de d d'abscisse 5
2. le point d'ordonnée 10
3. le point de cote 3

d) Déterminer l'intersection de d avec les plans (xOy), (xOz) et (yOz).

Exercice 3 :

La droite d a pour équations cartésiennes : $\frac{x-3}{3} = -\frac{y}{6} = \frac{2-z}{2}$

a) Donner un vecteur directeur de d.

b) Donner un système paramétrique de d.

c) Donner une représentation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite e qui est parallèle à d et qui passe par le point $C(1;0;-2)$.

Exercice 4 : La droite d a pour équations cartésiennes : $\frac{x-3}{-1} = y = \frac{z-4}{2}$

a) Déterminer les traces de d

b) donner une représentation paramétrique de la droite d

c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soigneuse !)

Exercice 5 :

La droite d a pour équations cartésiennes $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{y}+2}{2} = \frac{4-\boldsymbol{z}}{2}$

a) Déterminer les traces de d

b) donner une représentation paramétrique de la droite d

c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soigneuse !)

Exercice 6 :

La droite d a pour équations cartésiennes : $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{2-z}{2}$

a) Déterminer les traces de d

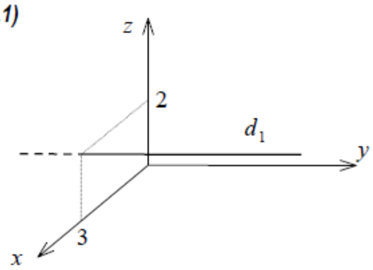
b) donner une représentation paramétrique de la droite d

c) Représenter graphiquement la droite d (esquisse soigneuse !)

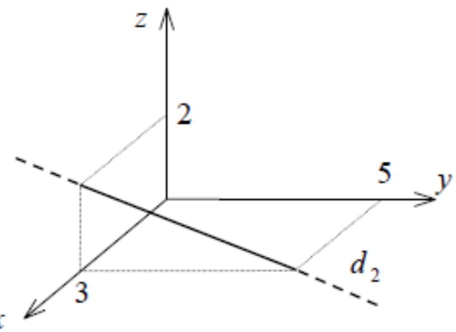
Exercice 7 :

Déterminer les équations cartésiennes et paramétriques des droites :

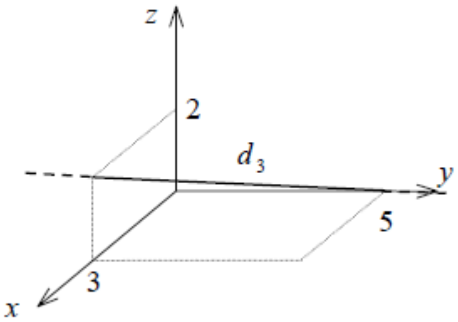
7.1)



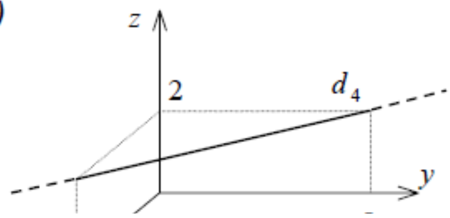
7.2)



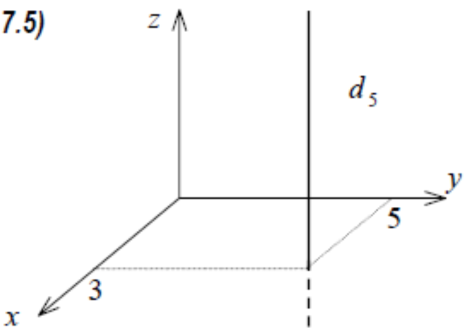
7.3)



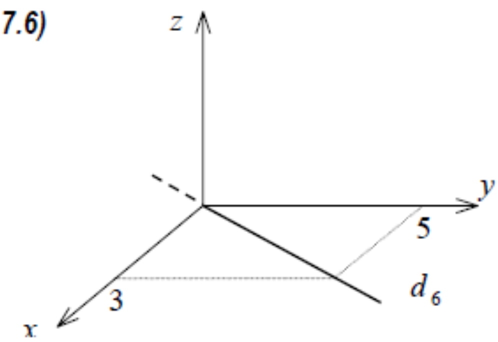
7.4)



7.5)



7.6)



Exercice 8 :

Soient les droites $d_1 : \frac{x-3}{2} = -y - 1 = \frac{z-1}{3}$ et $d_2 : -x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$

a) Calculer l'intersection $d_1 \cap d_2$

b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 9 :

Soient les droites

$$d: 1 - x = y - 3 = \frac{z-3}{4} \quad \text{et} \quad d' : \frac{x}{3} = 2 - y = \frac{z+19}{2}$$

a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$

b) En déduire la position relative des deux droites considérées

Exercice 10 :

Soit Les droites

$$d: x - 1 = y + 1 = \frac{z+3}{4} \quad \text{et} \quad d' : x - 5 = y - 7 = \frac{z-1}{4}$$

a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$

b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 11 :

Soient les droites

$$d: x - 1 = y + 1 = \frac{z+3}{4} \quad \text{et } d' : x - 13 = y - 11 = \frac{z-45}{4}$$

a) Déterminer l'intersection $d \cap d'$

b) En déduire la position relative des deux droites considérées.

Exercice 12 :

Déterminer les équations paramétriques et cartésiennes de la droite :

a) parallèle à l'axe Oy et passant par le point $(5; 4; 1)$.

b) parallèle à l'axe Oz et passant par le point $(2; 0; -7)$.

c) parallèle à la droite d'équations $\frac{x+4}{2} = y - 3 = \frac{2-z}{5}$ et passant par le point $(1; -4; 6)$.

d) parallèle à la droite d'équations $\frac{x+4}{2} = \frac{3-y}{4} = \frac{z}{9}$ et passant par le point $(11; -2; 0)$.

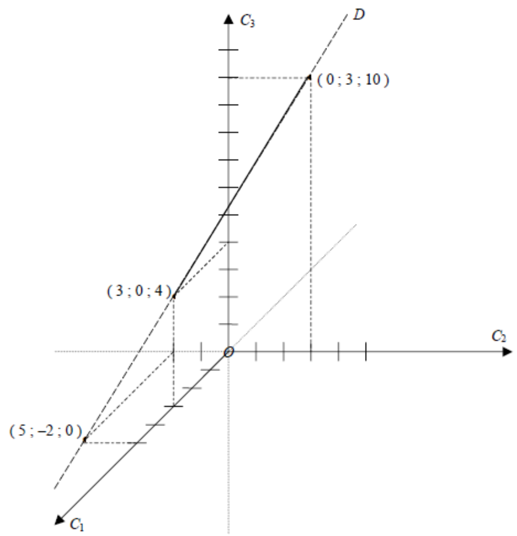
Solutions de la Série 3 de Géométrie vectorielle :

Exercice 1: a) non b) oui c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Exercice 2: a) $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$ b) $R \in d, S \notin d, T \in d$ c) 1. $(5; 8; 5)$ 2. $(6; 10; 8)$ 3. $\left(\frac{13}{3}; \frac{20}{3}; 3\right)$
d) $\left(\frac{10}{3}; \frac{14}{3}; 0\right)$; $(1; 0; -7)$; $(0; -2; -10)$

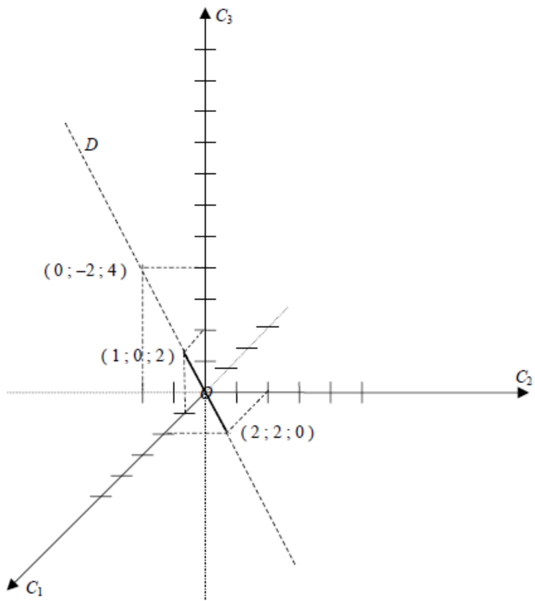
Exercice 3: a) $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{cases} x = 3 + 3k \\ y = -6k \\ z = 2 - 2k \end{cases} k \epsilon \mathbb{R}$ c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$ $\quad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z+2}{-2}$

Exercice 4: a) $(5; -2; 0)$; $(3; 0; 4)$; $(0; 3; 10)$ b) $\begin{cases} x = -\lambda + 3 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda + 4 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ c)

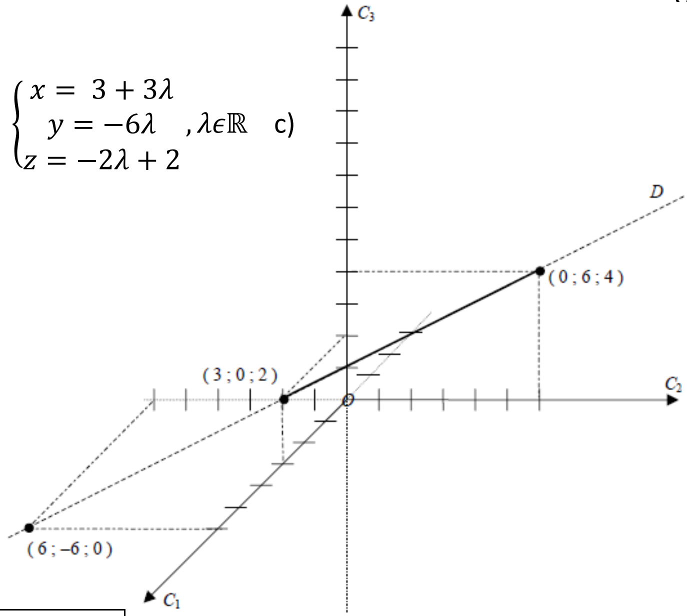


Exercice 5 : a) $(2; 2; 0)$; $(1; 0; 2)$; $(0; -2; 4)$ b) $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 2 \\ z = -2\lambda + 4 \end{cases}, \lambda \epsilon \mathbb{R}$

c)



Exercice 6: a) $(6;-6;0);(3;0;2);(0;6;4)$ b) $\begin{cases} x = 3+3\lambda \\ y = -6\lambda \\ z = -2\lambda + 2 \end{cases}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$ c)



Exercice 7:

	Représentation paramétrique	Equations cartésiennes
1	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$x = 3; y\epsilon\mathbb{R}; z = 2$
2	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$\frac{y}{-5} = \frac{z-2}{2}; x = 3$
3	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-2}$
4	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$\frac{y}{-5} = \frac{x-3}{3}; z = 2$
5	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$x = 3; y = 5; z\epsilon\mathbb{R}$
6	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda\epsilon\mathbb{R}$	$\frac{x}{3} = \frac{y}{5}; z = 0$

Exercice 8: a) $d_1 \cap d_2 = \{(1;0;-2)\}$ b) sécantes

Exercice 9: a) $d \cap d' = \emptyset$ b) gauches

Exercice 10: a) $d \cap d' = \emptyset$ b) parallèles et distinctes

Exercice 11: a) $d \cap d' = d = d'$ b) parallèles et confondues

Exercice 12:

	Equations paramétriques	Equations cartésiennes
1	$\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 + k \quad k\epsilon\mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$	$x = 5; z = 1, y\epsilon\mathbb{R}$
2	$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \quad k\epsilon\mathbb{R} \\ z = -7 + k \end{cases}$	$x = 2; y = 0; z\epsilon\mathbb{R}$
3	$\begin{cases} x = -4 + 2k \\ y = 3 + k \quad k\epsilon\mathbb{R} \\ z = 2 - 5k \end{cases}$	$\frac{x-1}{2} = \frac{y-(-4)}{1} = \frac{z-6}{-5})$
4	$\begin{cases} x = 11 + 2k \\ y = -2 - 4k \quad k\epsilon\mathbb{R} \\ z = 9k \end{cases}$	$\frac{x-11}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{9}$

Corrigé exercice 8:

Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

I = II = III

D: $\frac{x-3}{2} = -y-1 = \frac{z-1}{3}$ sur cette ligne, il y a deux équations : I = II et II = III ou I = III !!!

D': $-x = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{4}$ même remarque.

Il s'agit de résoudre un système à trois inconnues, formé de quatre équations.
Ce système peut admettre :

- aucune solution (**système incompatible**, droite parallèles ou gauches)
- une **solution unique** qui donnera les coordonnées du point unique commun à D et D'
- une **infinité de solutions** dans les cas où D et D' sont des droites confondues.

Des équations de D', on tire : $y-3=-3x$ et $z-2=-4x$, ce qui donne : $\boxed{y=-3x+3}$ et $\boxed{z=-4x+2}$

Injectons ces expressions dans les équations de D : $\frac{x-3}{2} = -(-3x+3)-1 = \frac{(-4x+2)-1}{3}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

I = II donne : $\frac{x-3}{2} = 3x-4 \Rightarrow x-3 = 6x-8 \Rightarrow 8-3 = 6x-x \Rightarrow 5 = 5x \Rightarrow x = 1$

II = III donne : $3x-4 = \frac{-4x+1}{3} \Rightarrow 9x-12 = -4x+1 \Rightarrow 13x = 13 \Rightarrow x = 1$.

C'est bien le cas, donc le système est compatible et admet une solution unique :
$x=1$ $y=-3\cdot 1+3=0$ $z=-4\cdot 1+2=-2$

Donc les deux droites D et D' sont sécantes : $D \cap D' = \{(1;0;-2)\}$

Vérification : remplacer x, y et z dans les équations de D et D'.
Une **autre méthode** (plus simple ?) est décrite en page 5.

Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D:\quad \dfrac{x-3}{2} = -y-1 = \dfrac{z-1}{3}$

$D':\quad -x = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-0}{-1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z-2}{4}$

Cette méthode consiste à écrire une équation paramétrique de l'une des deux droites, puis à substituer $(x\,;\,y\,;\,z)$ dans l'équation cartésienne de l'autre droite.

Equation paramétrique de D' : $(x\,;\,y\,;\,z) = (0\,;\,3\,;\,2) + \lambda \cdot (-1\,;\,3\,;\,4), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Donc $x = -\lambda \;;\; y = 3 + 3\lambda \;;\; z = 2 + 4\lambda$

Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$D:\quad \dfrac{-\lambda-3}{2} = -(3+3\lambda)-1 = \dfrac{(2+4\lambda)-1}{3}$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).

Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

Résolvons : $\begin{cases} \dfrac{-\lambda-3}{2} = -4-3\lambda \\ -4-3\lambda = \dfrac{1+4\lambda}{3} \end{cases}$

$-\lambda - 3 = -8 - 6\lambda$ et $-12 - 9\lambda = 1 + 4\lambda$

$5\lambda = -5$ et $-13 = 13\lambda$

$\lambda = -1$ et $-1 = \lambda$; c'est la solution du système, donc les deux droites ont une intersection en :

$(x\,;\,y\,;\,z) = (0\,;\,3\,;\,2) + (-1) \cdot (-1\,;\,3\,;\,4)$, c'est à dire en : $(1\,;\,0\,;\,-2)$.

Corrigé exercice 9:

Calculez l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D: \quad 1-x=y-3=\frac{z-3}{4}$

$D': \quad \frac{x}{3}=2-y=\frac{z+19}{2}$

Même principe que l'exercice précédent.
Isolons, à partir des équations de D , y et z en fonction de x :

$1-x=y-3 \Rightarrow 4-x=y \Rightarrow \boxed{y=4-x}$

$1-x=\frac{z-3}{4} \Rightarrow 4-4x=z-3 \Rightarrow \boxed{z=7-4x}$

Injectons ces expressions dans les équations de D' : $\frac{x}{3}=2-(4-x)=\frac{(7-4x)+19}{2}$

et vérifions si ces deux équations admettent la même solution :

La 1ère égalité de D' donne : $\frac{x}{3}=2-(4-x) \Rightarrow \frac{x}{3}=x-2 \Rightarrow x=3x-6 \Rightarrow 6=2x \Rightarrow x=3$

La 2ème égalité de D' donne : $2-(4-x)=\frac{(7-4x)+19}{2} \Rightarrow x-2=12-2x \Rightarrow 3x=15 \Rightarrow x=5$

Nous constatons que les équations de D' ne peuvent pas être satisfaites par des valeurs $x, y\, z$ qui satisfont simultanément les équations de D. Ceci signifie simplement que les deux droites n'ont pas un point commun dont les coordonnées pourraient satisfaire toutes les contraintes posées par les quatre équations : $D \cap D' = \{\ \}$.

Donc D et D' sont gauches ou strictement parallèles. Comment préciser laquelle de ces deux éventualités est la bonne ?

En regardant le vecteur directeur de chaque droite :

D : $\vec{V}_D=(-1;1;4)$ et D : $\vec{V}_{D'}=(3;-1;2)$

Ces deux vecteurs directeurs n'étant pas colinéaires, les deux droites ne sont pas parallèles.
Elles sont donc gauches.

Autre méthode pour calculer l'intersection $D \cap D'$ lorsque D et D' sont données par les équations :

$D: \quad 1-x=y-3=\frac{z-3}{4}$

$D': \quad \frac{x}{3}=2-y=\frac{z+19}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-0}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-(-19)}{2}$

Même méthode que ci-dessus :
Equation paramétrique de D' : $(x;y;z)=(0;2;-19)+\lambda\cdot(3;-1;2), \quad \lambda \in \mathbb{R}$
Donc $x=3\lambda$; $y=2-\lambda$; $z=-19+2\lambda$
Substituons ces trois égalités dans l'équation cartésienne de D :

$D: \quad 1-3\lambda=2-\lambda-3=\frac{-19+2\lambda-3}{4}$

C'est un système de 2 équations à une inconnue (λ).
Il y a une intersection si et seulement si ce système possède une solution.

Résolvons : $\begin{cases} 1-3\lambda=-\lambda-1 \\ -\lambda-1=\frac{-22+2\lambda}{4} \end{cases}$

$2=2\lambda$ et $-4\lambda-4=-22+2\lambda$

$\lambda=1$ et $18=6\lambda$

$\lambda=1$ et $\lambda=3$; Il n'y a pas une solution satisfaisant les deux équations en même temps, donc les deux droites n'ont pas d'intersection.