Géométrie vectorielle Série 4

Ne pas résoudre les exercices sur l'énoncé mais sur des feuilles quadrillées

---

Exercice 1 : On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Calculer les produits scalaires :

1) $\vec{a} \cdot \vec{b}$
2) $\vec{b} \cdot \vec{a}$
3) $\vec{a} \cdot \vec{c}$
4) $\vec{b} \cdot \vec{c}$
5) $\vec{a} \cdot \overrightarrow{(b + c)}$
6) $(\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

Exercice 2 : On considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{m} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les paires de vecteurs orthogonaux.

2) Calculer : $(\vec{a} + \vec{d} + \vec{g}) \cdot (\vec{b} + \vec{e} - \vec{m})$, $(2\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{f}$ et $(\vec{c} + \vec{d}) \cdot (\vec{f} + \vec{e})$

3) Calculer : $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$, $(\vec{b} \cdot \vec{h})\vec{c}$, $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{m}$, $(\vec{g} \cdot \vec{a})\vec{d}$ et $(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{d} \cdot \vec{a})$

Exercice 3 : Les droites (AB) et (CD) sont-elles orthogonales ? Sont-elles perpendiculaires ?

1) $A(8;\ -1; 3)$, $B(11; 11; 5)$, $C(4; 1; -1)$, $D(6; 0; 2)$

2) $A(7\,; 5\,; 1)$, $B(3; 2; 7)$, $C(-3; -1; 0)$, $D(9; 9; 9)$

Exercice 4 : Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

1) $A(-4\,; 5; 3)$, $B(-1; 1; 5)$, $C(5; 5; 4)$, $D(2; 9; 2)$

2) $A(7;\ -2; 0)$, $B(5; 2; 2)$, $C(10; 5; 1)$, $D(12; 1; -1)$

Exercice 5 :

Déterminer les nombres réels a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit orthogonal à chacun des deux vecteurs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 6 :

On donne les points $A(1; 2; -2), B(1; 1; 1), C(3; 0; -3)$ et $D(-5; 12; 0)$.

Calculer une valeur de l'angle des droites (AB) et (CD).

Exercice 7 : Calculer les angles du triangle de sommets $A(5;\ -3; 8), B(1; 7; 2)$ et $C(-3; 2; 5)$

Exercice 8 :

Trouver la projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$. Déterminer la longueur de ce vecteur.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ e) b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ d) b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 9 : Soit A un point tel que $\|\overrightarrow{OA}\| = 2$

Représenter les ensembles de points suivants :

1) $d = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 2\}$ 2) $e = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = -2\}$ 3) $f = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$

Exercice 10 : Soit A et B deux points dans l'espace tels que $\|\overrightarrow{OA}\| = 6$ et $\|\overrightarrow{OB}\| = 8$, le point B n'appartenant pas à la droite (OA).

Déterminer les ensembles de points suivants :

1) $E_1 = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$
2) $E_2 = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 36\}$
3) $E_3 = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 18 \; et \; \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = 32\}$
4) $E_4 = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}\}$

Exercice 11 : Soit A un point tel que $\|\overrightarrow{OA}\| = 6$
Représenter les ensembles de points suivants :

1) $d = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 18\}$
2) $e = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 12\}$
3) $f = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$
4) $g = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = -6\}$

Exercice 12 : Soit A et B deux points tels que $\|\overrightarrow{OA}\| = 2$ et $\|\overrightarrow{OB}\| = 3$, $B \notin (OA)$

Représenter les ensembles de points suivants :

1) $d = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \; et \; \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = 0\}$
2) $e = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = -2 \; et \; \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM} = -3\}$
3) $f = \{M|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OM}\}$

Exercice 13 : On donne les points $A(-2; 3; -2)$ et $B(-6; -1; 1)$.

Déterminer le point P de la droite D_{0I} tels que le triangle APB soit rectangle en P.

Solutions Série 4 :

Exercice 1 :

1) 61 2) 61 3) 0 4) -19 5)61 6) 66

Exercice 2 :

1) $\vec{a}$ et $\vec{d}$; $\vec{a}$ et $\vec{g}$; $\vec{b}$ et $\vec{h}$; $\vec{d}$ et $\vec{m}$

2) $(\vec{a}+\vec{d}+\vec{g})\cdot(\vec{b}+\vec{e}-\vec{m})=-15$; $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{f}=1$ et $(\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{f}+\vec{e})=16$

3) $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}=\begin{pmatrix}12\\12\\12\end{pmatrix}$, $(\vec{b}\cdot\vec{h})\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{m}=\begin{pmatrix}48\\12\\24\end{pmatrix}$, $(\vec{g}\cdot\vec{a})\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{d}\cdot\vec{a})=0$

Exercice 3 :

1) orthogonales, non perpendiculaires 2) non orthogonales

Exercice 5 : $a=4\;\; b=-5$ **Exercice 6 :** 86,3°

Exercice 7 : $\alpha=34{,}98°\quad \beta=53{,}38°\quad \gamma=91{,}64°$

Exercice 8 : a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=48$, $\|\vec{u}\|=\sqrt{122}$, $\vec{v'}=\begin{pmatrix}-72/61\\168/61\\192/61\end{pmatrix}$, $\left\|\vec{v'}\right\|=\frac{48}{\sqrt{122}}\cong 4{,}35$

b) $\begin{pmatrix}65/83\\27/83\\-45/83\end{pmatrix}, \frac{9}{\sqrt{83}}$ c) $\begin{pmatrix}318/181\\-424/181\\-477/181\end{pmatrix}, \frac{53}{\sqrt{181}}$ d) $\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}, 6$ e) $\begin{pmatrix}-12/49\\32/49\\-20/49\end{pmatrix}, \left\|\vec{v'}\right\|\cong 0{,}81$

Exercice 9 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par le milieu du segment $[OA]$
2) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$)
3) plan perpendiculaire à (OA) par le point O.

Exercice 10 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par O
2) plan perpendiculaire à (OA) par A
3) droite d'intersection du plan perpendiculaire à (OA) par le milieu de $[OA]$ et du plan perpendiculaire à (OB) par le milieu de $[OB]$
4) plan perpendiculaire à (AB) par O.

Exercice 11 : 1) plan perpendiculaire à (OA) par le milieu du segment $[OA]$ (= point M')
2) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$)
3) plan perpendiculaire à (OA) par le point O
4) plan perpendiculaire à (OA) par le point M' (où $\overrightarrow{OM'}=-\frac{1}{6}\overrightarrow{OA}$)

Exercice 13 : Deux solutions : $P_1(-1;0;0)$ et $P_2(-7;0;0)$