

Géométrie vectorielle Série 5

Ne pas écrire sur l'énoncé !

Exercice 1

Soit Π le plan d'équation : $2x + 3y - 3z - 5 = 0$.

- Les points suivants appartiennent-ils au plan Π ? $A(0; 2; 2)$? $B\left(4; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$
- Trouver trois points distincts C, D et $E \in \Pi$ et différents de A et B .
- Trouver *deux vecteurs directeurs* et un *vecteur position* à Π .
- Déterminer l'équation vectorielle et les équations paramétriques de Π .



Exercice 2

Soit Π le plan d'équation : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, k, n \in \mathbb{R}$.

- Les points suivants appartiennent-ils au plan Π ? $A(3; 4; 3)$ $B(4; -3; 8)$
- Trouver deux points distincts C et $D \in \Pi$ et différents de A et B .
- Trouver *deux vecteurs directeurs* et un *vecteur position* à Π .

Exercice 3

On donne les points $A(3; 4; 0), B(-3; 8; 1), C(1; 2; -3), D(11; 1; 1), E(3; 3; -1), F(8; 3; 1), G(0; 5; -1), P(-5; -2; -5)$ et $Q(0; 4; -3)$

- Déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (PQ) et du plan (ABC)
- Montrer que la droite (DE) est incluse dans le plan (ABC)
- Montrer que la droite (FG) est strictement parallèle au plan (ABC)

Exercice 4

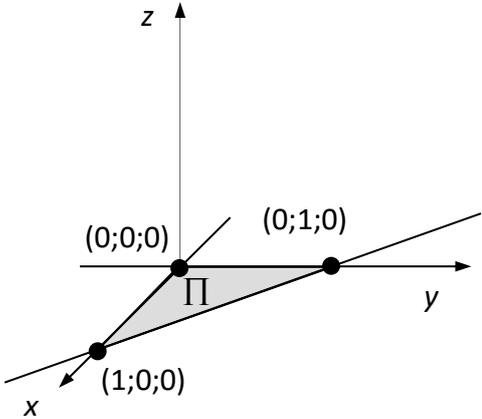
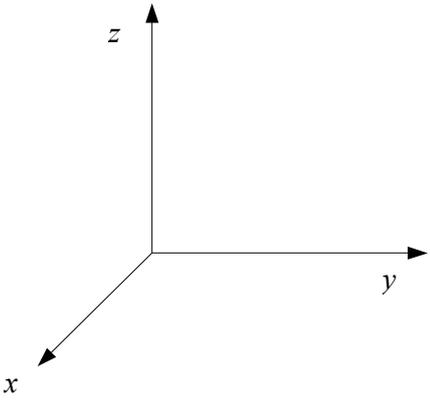
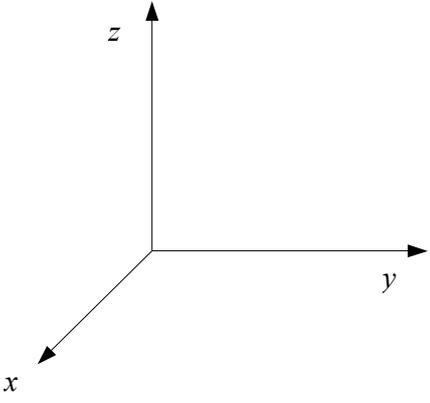
Trouver *les équations paramétriques* d'un plan Π passant par le point $A(2; 0; -3)$ et

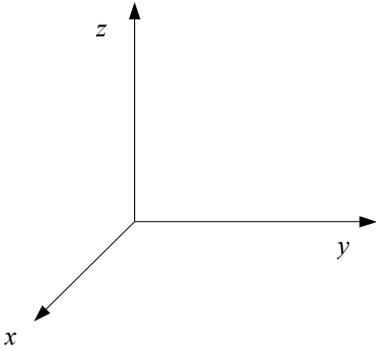
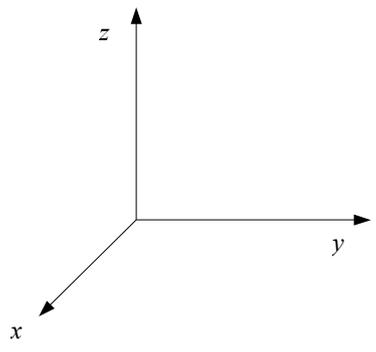
Contenant les vecteurs suivants : $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : La colonne de gauche sert à représenter graphiquement le plan, Celle de droite définit celui-ci en donnant trois points non alignés lui appartenant.

a) Dessiner (à gauche) le plan satisfaisant les conditions (de droite).

b) Trouver, avec ou sans calculs, l'équation paramétrique correspondante.

<p>Exemple :</p> 	<p>a) $(0;0;0)$, $(1;0;0)$ et $(0;1;0) \in \Pi$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Équation paramétrique de Π : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$
	<p>b) $(0;0;2)$, $(1;0;2)$ et $(0;1;2) \in \Pi$</p>
	<p>c) $(3;0;0)$, $(3;1;0)$ et $(3;0;1) \in \Pi$</p>

	<p>d) $(1;0;0)$, $(1;1;0)$ et $(0;0;1) \in \Pi$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Équation paramétrique de Π :
	<p>e) $(2;3;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2) \in \Pi$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Équation paramétrique de Π :

Exercice 6 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection d'une droite d et d'un plan α , dans les cas suivants :

a) $d: \begin{cases} x = -4 - 5k \\ y = 8 + 6k \\ z = 3 - k \end{cases}$ $\alpha: 2x + 3y - z - 5 = 0$ b) $d: \begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 3 + k \\ z = 4 - k \end{cases}$ $\alpha: \begin{cases} x = 3 + 3p - q \\ y = -2 - 5p + q \\ z = 7 + 3p - q \end{cases}$

c) $d = (AB)$, avec $A(-1; 0; 4)$ et $B(1; 2; 0)$

$\alpha: x - y + 2z - 3 = 0$



Exercice 7 :

Soit Π le plan d'équation vectorielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$, $k, m \in \mathbb{R}$.

Décrivez et illustrez (sans les axes de coordonnées) le sous-ensemble du plan correspondant à chacune des données suivantes.

- a) $k = 0$ et $m = 1$ c) $m = 0$ et $-1 \leq k \leq 1$
 b) $k = 1$ et $m \in \mathbb{R}$ d) $0 \leq m \leq 1$ et $0 \leq k \leq 2$

Solutions Géométrie vectorielle Série 5

Exercice 1

a) $A \notin \Pi$ $B \in \Pi$

b) Par exemple :

- Posons $x = 1$ et $y = 0$, on calcule z : $C(1;0;-1) \in \Pi$
- Posons $x = 1$ et $y = 1$, on calcule z : $D(1;1;0) \in \Pi$
- Posons $x = -2$ et $y = 0$, on calcule z : $E(-2;0;-3) \in \Pi$

c) Par exemple : Vecteurs directeurs : et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ Vecteur position : $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 - s - t \\ z = -s - 3t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}$

Remarque : La représentation paramétrique, vectorielle et cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Exercice 2

a) $A \notin \alpha$ $B \in \alpha$ b) Par exemple : $C(3;1;5)$ et $D(1;2;8) \in \alpha$ c) Par exemple : Vecteurs directeurs : $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ Vecteur position : $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Exercice 3

a) $(ABC): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $(PQ): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ le point d'intersection entre le plan et la droite est: $\left(-\frac{15}{13}; \frac{34}{13}; -\frac{45}{13}\right)$ b) $(ABC): x + 2y - 2z - 11 = 0$ c) $(DE): \begin{cases} x = 11 - 8s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 - 2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$

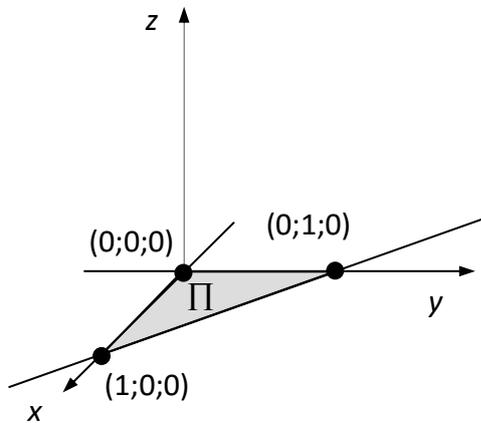
Exercice 4

Équations paramétriques de α : $\begin{cases} x = 2k + 2 \\ y = -k - 3\lambda \\ z = 6k + 5\lambda - 3 \end{cases} \quad \lambda, k \in \mathbb{R}$

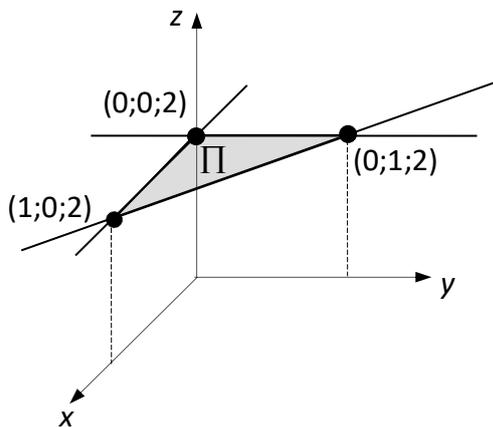
Remarque : La représentation paramétrique et cartésienne d'un plan n'est pas unique.

Exercice 5

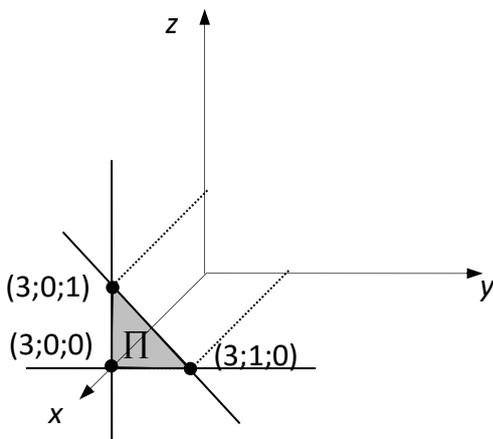
Exemple :

a) $(0;0;0)$, $(1;0;0)$ et $(0;1;0) \in \Pi$ • Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

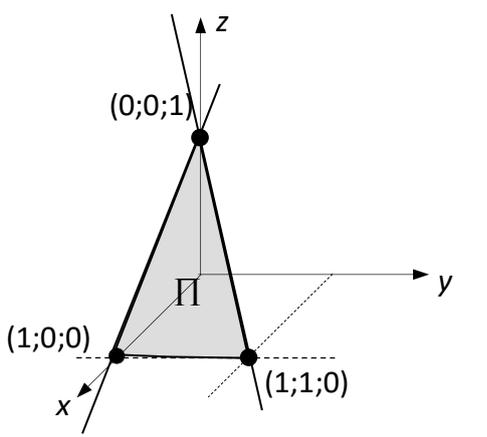
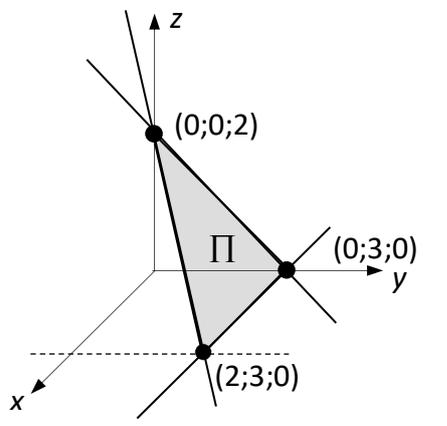
• Remarque : $\Pi \subset \text{plan } Oxy$ b) $(0;0;2)$, $(1;0;2)$ et $(0;1;2) \in \Pi$ • Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

• Remarque : $\Pi // \text{plan } Oxy$ c) $(3;0;0)$, $(3;1;0)$ et $(3;0;1) \in \Pi$ • Équation paramétrique de Π :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$$

• Remarque : $\Pi // \text{plan } Oyz$

	<p>d) $(1;0;0)$, $(1;1;0)$ et $(0;0;1) \in \Pi$</p> <ul style="list-style-type: none"> Équation paramétrique de Π : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$
	<p>e) $(2;3;0)$, $(0;3;0)$ et $(0;0;2) \in \Pi$</p> <ul style="list-style-type: none"> Équation paramétrique de Π : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}$

Exercice 6:

- a) $k = -\frac{8}{9}$ donc $\left(\frac{4}{9}; \frac{8}{3}; \frac{35}{9}\right)$ b) $k = -1$ $(1; 2; 5)$
- c) $d: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ on trouve $t = \frac{1}{2}$ donc le point cherché est: $(0; 1; 2)$

Exercice 7:

a) $A(1; 2; -1)$ est un point appartenant au plan Π .

b) C' est l'équation d'une droite appartenant au plan Π de vecteur directeur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de vecteur position $\vec{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) C'est l'équation d'un segment de droite d'extrémité $A(11; -9; 7)$ et $B(-3; 5; -1)$ appartenant au plan Π .

d) C'est un plan limité par les points : $A(4; -2; 3)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-10; 12; -5)$ et $D(-13; 16; -9)$.