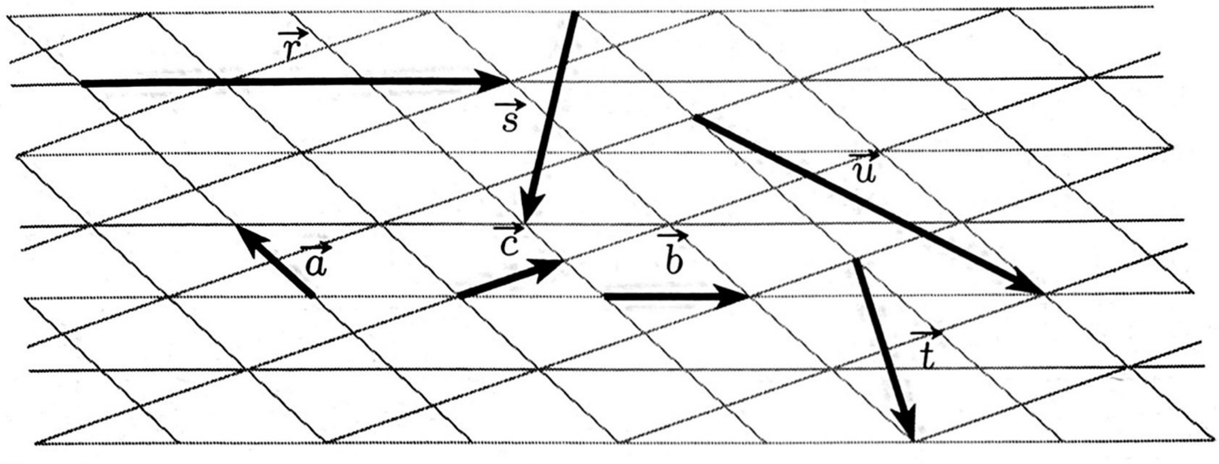
Géométrie vectorielle Série 2

Méthode de travail :

- **Relire le cours précédent avant le suivant.** Ne pas attendre d'avoir une épreuve pour relire son cours. Il est important d'entretenir la compréhension !
  Comme le sportif ne peut pas attendre le match pour pratiquer son sport. (Il n'aura plus la bonne condition physique s'il ne prend pas soin d'entretenir tout ce qu'il a acquis par plusieurs heures de pratique.) Il ne pratique pas que lors des entrainements en communs mais aussi en solo.
  Il est important de faire des exercices seul pour vérifier votre compréhension.

- **Relire un exercice ne suffit pas !** Il faut refaire ! A l'épreuve, il sera demandé de répondre à des questions et non pas simplement de lire une correction. N'écrivez donc pas sur les énoncés pour ne pas voir directement la réponse sur vos énoncés. Si vous n'arrivez pas à faire les exercices sans écrire sur les énoncés, vous pouvez réimprimer les séries depuis le site pinkmaths.ch ou depuis **classroom**.
- **Conseil** : si vous devez écrire sur l'énoncé : **au crayon léger** pour pouvoir gommer !

Exercice 1 : Considérons les vecteurs représentés dans la figure suivante :



a) Construire les vecteurs :
$\vec{d} = 3\vec{a} + 4\vec{b} - 5\vec{c}$, $\vec{e} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{f} = \frac{1}{2}(3\vec{a} - \vec{b}) - \frac{7}{2}\vec{c}$

b) Exprimer les vecteurs $\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}$ *et* $\vec{u}$ comme combinaisons linéaires de $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Exercice 2 : Recopier (décalquer) les vecteurs sur une feuille blanche pour faire l'exercice.

On donne trois points non alignés $O, A\ et\ B$.

a) Construire les points $C, D\ et\ E$ tels que : $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\ et\ \overrightarrow{OE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$.
Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Construire les points $F, G\ et\ H$ tels que :

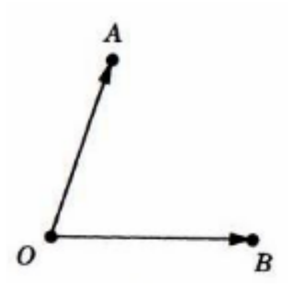
$$\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad et \quad \overrightarrow{OH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?

c) Construire les points $I, J, K\ et\ L$ tels que :

$$\overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \ ; \ \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} \ ; \ \overrightarrow{OK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \ ; \ \overrightarrow{OL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble pour points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$?



Exercice 3 :

Relativement à une base de V_2, on donne les vecteurs $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{c}=\begin{pmatrix}12\\-6\end{pmatrix}$.

Déterminer deux réels α et β tels que $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{c}$.

Exercice 4 : Relativement à une base de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix},\ \vec{d}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix},\ \vec{e}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \vec{f}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix},\ \vec{g}=\begin{pmatrix}1\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix},\ \vec{h}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix},\ \vec{i}=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

Déterminer, parmi ces vecteurs, ceux qui sont colinéaires.

Exercice 5 :

a) Trouver deux nombres λ et μ tels que $\vec{x}=\lambda\vec{e}_1+\mu\vec{e}_2$.

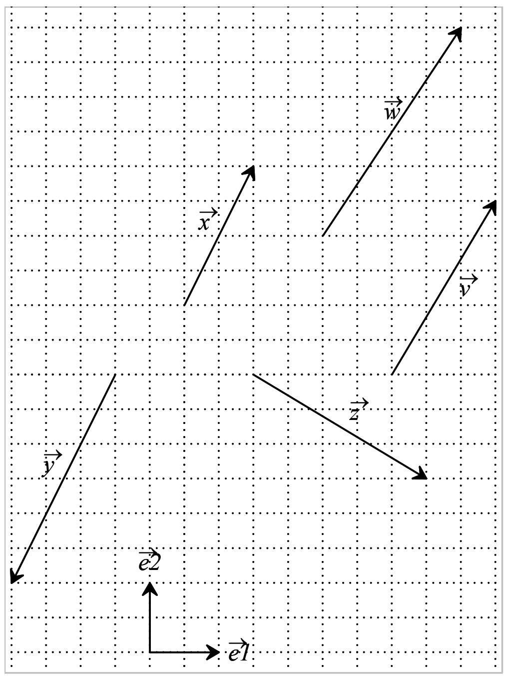
b) Trouver deux nombres α et β tels que $\vec{z}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$.

c) Trouver un nombre k tel que $\vec{y}=k\vec{x}$.

d) Trouver un nombre h tel que $\vec{x}=h\vec{y}$.

e) Trouver un nombre a tel que $\vec{w}=a\vec{v}$.

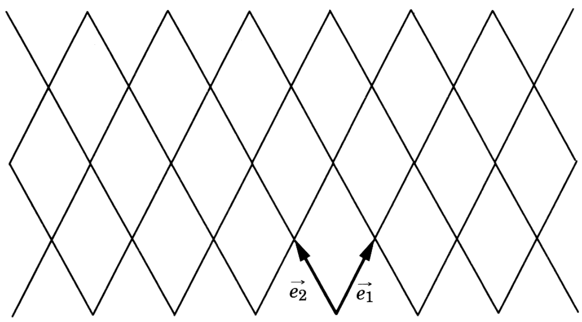
f) Trouver deux nombres δ et ε tels que $\vec{z}=\delta\vec{x}+\varepsilon\vec{w}$.



Exercice 6 : Soit $\mathcal{B}(\vec{e}_1\ ;\ \vec{e}_2)$ une base de V_2.

a) Dessiner un représentant des vecteurs suivants

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\ \vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\text{ et }\vec{d}=\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}.$$



b) Dessiner un représentant des vecteurs $\vec{v}=\vec{b}+\vec{c}$ et $\vec{u}=3\vec{b}+2\vec{c}$ puis donner leurs composantes dans la base $\mathcal{B}$.

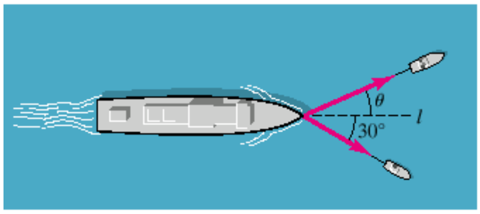
Exercice 7 : Calculer la norme des vecteurs suivants :

$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ $\quad \vec{b} = -4\vec{j}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{d} = \frac{4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$

Exercice 8: On donne les vecteurs $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ *et* $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$. Déterminer le nombre réel k pour que le vecteur $\vec{a} + \mathrm{k}\vec{b}$ ait une norme égale à $\sqrt{82}$.

Exercice 9 : La figure ci–dessous montre deux remorqueurs qui amènent un navire dans un port.

La trajectoire que suit ce navire est rectiligne. Le remorqueur le plus puissant génère une force de 20'000 [N] sur son câble et fait un angle θ avec la trajectoire du navire. Le plus petit génère une force de 16'000 [N] et fait un angle de 30° avec la trajectoire du navire.



Calculer l'angle θ.

<u>EXERCICES A FAIRE SUR UNE FEUILLE A PART ET NON SUR L'ENONCE</u>

Exercice 10 : Soient A, B, C, D, E *et* F des points quelconques du plan. Compléter, si possible

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} =$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} =$

c) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} =$

d) $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DF} =$

e) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{BF} =$

f) $\overrightarrow{ED} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE} =$

Exercice 11 : Soient A, B, C *et* D quatre points quelconques du plan.

Montrez l'égalité suivante $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Exercice 12 : Compléter les égalités suivantes **sur une feuille quadrillée** :

a) $\binom{2}{3} + \binom{-1}{0} =$

b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} =$

c) $\binom{6{,}5}{-2} + \binom{7}{1} - \binom{5}{-3} =$

d) $5 \cdot \binom{2}{3} =$

e) $2 \cdot \binom{2}{8} =$

f) $-\frac{3}{4}\binom{6{,}8}{2/3} =$

Exercice 13 : Déterminer le couple $(x; y)$ qui vérifie :

a) $(3; -1) + (x; y) = (2; 0)$

b) $(3; -2) + (x; y) = (-3; 2)$

c) $(x; y) + (x, y) = (6; -2)$

Exercice 14 :

Déterminer le réel λ qui vérifie :

a) $\lambda\binom{5}{6} = \binom{10}{12}$ b) $\lambda\binom{-4}{0} = \binom{4}{0}$ c) $\lambda\binom{2}{3} = \binom{3}{2}$

Exercice 15 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère $\vec{x} = \binom{2}{3}$; $\vec{y} = \binom{-1}{0}$ et $\vec{z} = \binom{2}{-3}$.

Calculer : $\vec{e} = \vec{x} + 2\vec{y}$, $\vec{f} = -2\vec{x} + \vec{z}$ et $\vec{g} = \vec{x} + 2\vec{y} - 0{,}3\vec{z}$.

Exercice 16 :

Montrer que : $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, où $A = (-3; 1)$; $B = (1; 3)$; $C = (4; 1)$ et $D = (2; 0)$.

Exercice 17 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère $A = (2; 1)$; $B = (6; 4)$ et $C = (2; 6)$.

a) $\|\overrightarrow{AB}\| =$ b) $\|\overrightarrow{AC}\| =$

c) Déduisez de ce qui précède que le triangle ABC est isocèle.

Exercice 18 :

Dans $\mathbb{R}^2$ on considère :

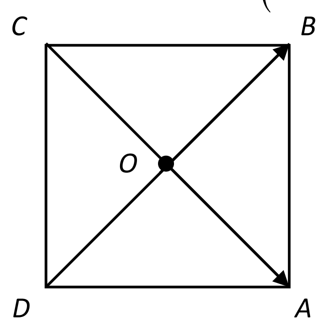
a) $A = (0; 0)$; $B = (-11; 3)$ et $C = (-8; -2)$. Montrer que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

b) $A(0; 0)$; $B(6; 8)$ et $C(3 + 4\sqrt{3}; 4 - 3\sqrt{3})$. Montrer que ABC est équilatéral.

Exercice 19 :

Soit *ABCD* un carré de centre *O*. Déterminer dans la base $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ les composantes des vecteurs :

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, et $\overrightarrow{DA}$.



Corrigé Géométrie vectorielle Série 2 :

Exercice 1 :

b) $\vec{r} = 3\vec{b}, \vec{s} = -3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{t} = -\frac{5}{2}\vec{a} - \vec{b}, \vec{u} = -\frac{5}{2}\vec{a} + \vec{b}$

Exercice 2 :

a) La droite (OA) b) La droite parallèle à (OA) passant par B c) La droite (AB)

Exercice 3 : $\alpha = 3 \ et \ \beta = 2$

Exercice 4 : $\vec{e}$ est colinéaire à tous. $/\vec{a}, \vec{d} \ et \ \vec{h} \ / \ \vec{b} \ et \ \vec{\imath} \ / \ \vec{c} \ et \ \vec{g}$

Exercice 5 : a) $\lambda = 1, \mu = 2$ b) $\alpha = -\frac{3}{2}, \beta = \frac{5}{2}$ c) $k = -\frac{3}{2}$ d) $h = -\frac{2}{3}$ e) $\emptyset$ f) $\delta = -\frac{21}{2}, \varepsilon = \frac{13}{2}$

Exercice 6 : $\vec{v} = \binom{-1}{2}$ $\vec{u} = \binom{-1}{7}$

Exercice 7 : $\|\vec{a}\| = 5, \|\vec{b}\| = 4, \|\vec{c}\| \cong 8{,}544; \ \|\vec{d}\| = 1$

Exercice 8 : $k_1 = \frac{3}{2} \ et \ k_2 = -\frac{23}{10}$

Exercice 9 : $\sin^{-1}(0{,}4) \approx 23{,}6°$

Exercice 10 : a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AF}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) on ne peut rien faire e) $\vec{0}$ f) $2 \cdot \overrightarrow{EB}$

Exercice 11 :

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \quad \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$, donc l'égalité de la première ligne est vraie.

Exercice 12 :

a) $\binom{1}{3}$

b) $\binom{5/6}{7/4}$

c) $\binom{8{,}5}{2}$

d) $\binom{10}{15}$

e) $\binom{4}{16}$

f) $\binom{-5{,}1}{-0{,}5}$

Exercice 13 :

a) $(-1; 1)$
b) $(-6\ ;4)$
c) (3;-1)

Exercice 14 :

a) $k = 2$
b) $k = -1$
c) Impossible

Exercice 15 :

$\vec{e} = \binom{0}{3}, \vec{f} = \binom{-2}{-9}, \vec{g} = \binom{-0,6}{3,9}$

Exercice 16 :

$\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont multiples l'un de l'autre, ils sont parallèles.

Exercice 17 :

a) $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$
b) $\|\overrightarrow{AC}\| = 5$
c) Le triangle a deux côtés de même longueur, il est donc isocèle.

Exercice 18 :

a) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{130} \neq \|\overrightarrow{AC}\| = 68$ Il suffit de voir que deux côtés n'ont pas la même longueur pour savoir que le triangle n'est pas équilatéral.
b) $\|\overrightarrow{AB}\| = 10, \|\overrightarrow{AC}\| = 10, \|\overrightarrow{BC}\| = 10$

Exercice 19 :

$$\overrightarrow{OC} = \binom{-1}{0};\ \overrightarrow{AB} = \binom{-1}{1};\ \overrightarrow{BC} = \binom{-1}{-1};\ \overrightarrow{BD} = \binom{0}{-2};\ \overrightarrow{DA} = \binom{1}{1}$$