Analyse Série 7

Rappel : Plan d'étude d'une fonction

L'étude d'une fonction est la synthèse de tout ce que l'on peut dire d'une fonction donnée *f*.

Pour étudier une fonction *f*, on traite habituellement les points suivants :

1) ***Domaine de définition.***
2) Parité (fonction paire ou impaire), périodicité.
3) ***Zéros***, signe de la fonction (Tableau des signes), et ***ordonnée à l'origine***.
4) ***Asymptotes verticales*** et « trous ».
5) ***Asymptotes affines***.
6) Dérivée *f'* et ses zéros (points critiques, extremum).
7) Croissance et point critique (***Tableau des variations***).
8) ***Représentation graphique***.

Remarque : On s'assurera de la cohérence des résultats obtenus. Pour obtenir une représentation graphique soignée, on peut, en plus des résultats déjà obtenus, calculer des valeurs de la fonction en quelques points.

Exercice 1 :

Étudier et représenter le graphique des fonctions suivantes.

1) $f:\ x \mapsto (x-2)^2 \cdot e^x$

2) $f:\ x \mapsto x \cdot e^{-x}$

3) $f:\ x \mapsto x \cdot e^{x^2}$

4) $f:\ x \mapsto (x^2+x) \cdot e^{-x}$

5) $f:\ x \mapsto (x^2-2x)\mathrm{e}^x$

Exercice 2 :

Soit la fonction $f:\ x \mapsto \frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}$

1) Étudier et représenter le graphique de *f*.
2) Hachurer le domaine borné D délimité par *f* et les droites d'équations $x=-3$ et $x=0$.
3) $F:\ x \mapsto (ax+b)\cdot e^{-x}$ de ~ dans ~
   Calculer *a* et *b* sachant que *F* est une primitive de *f*.
4) Calculer la superficie de D.
5) Interpréter sur le graphique de f $F(0)-F(-3)$

Exercice 3 :

On considère la fonction $f:\begin{cases}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2(x+2)e^{-x}\end{cases}$

1) a) Calculer la fonction dérivée de f.

   b) Déterminer les réels a et b, sachant que la fonction définie par $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ est une primitive de f.

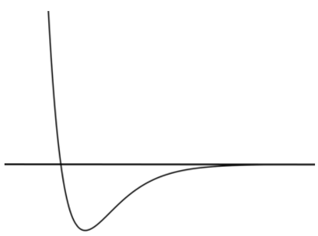
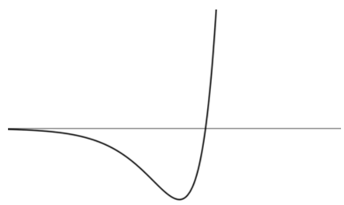
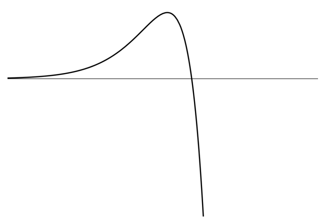
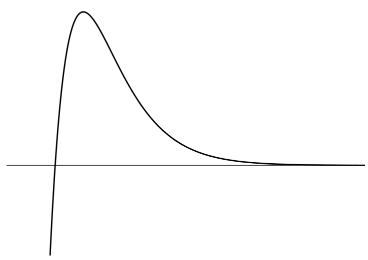
   c) Déterminer la primitive G de f qui s'annule en -1.

2) a) Étudier le signe de f.

   b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   c) Étudier la croissance de f et déterminer les coordonnées des points critiques (extremums et points d'inflexion).

   d) Parmi les graphes esquissés ci-dessous, quel est celui qui représente la fonction f ?

3) a) À l'aide d'une somme de Riemann formée de quatre termes, calculer une valeur approchée du domaine compris entre l'axe horizontal, le graphe de f et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

   b) Calculer l'aire exacte de ce domaine.

   c) Quelle est la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-1;1]$?

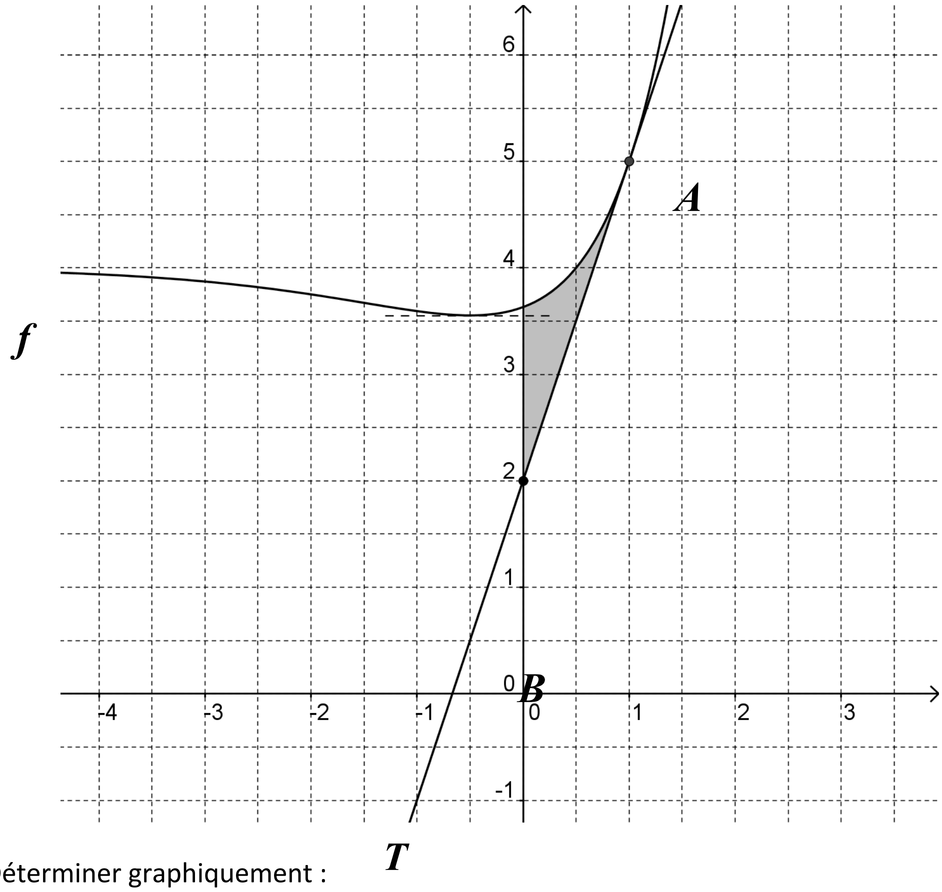
Exercice 4 :

On a représenté la fonction f ci-dessous.

Le graphe de f passe par le point $A(1;5)$, elle admet la droite T comme tangente en ce point.

Le point $B(0;2)$ appartient à la droite T.

Le graphe de f admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.



Partie A: Déterminer graphiquement :

1) les images suivantes : $f(1)$, $f'(1)$ et $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$;
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$;
3) Les ensembles de solution des équations $f(x)=1$ et $f(x)=4$.

Partie B: La fonction représentée est définie par $f(x)=(2x-1)e^{x-1}+4$.

1) Calculer $f'(x)$.
2) Étudier la croissance de f et calculer les coordonnées exactes de l'extremum de f.
3) Déterminer a et b de sorte que la fonction $G(x)=(ax+b)e^{x-1}+4x$ soit une primitive de f.
4) Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.
5) Calculer l'aire du domaine ombré.

Exercice 5 :

Soit la fonction *f* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ esquissée ci-dessous.

On considère la fonction g définie par $g(x) = ln(f(x))$.

En utilisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

a) En quel point *f* n'est-elle pas dérivable ?. (Ce point est unique)

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

c) Construire le tableau de variations de *f*. (Croissance, extremum)

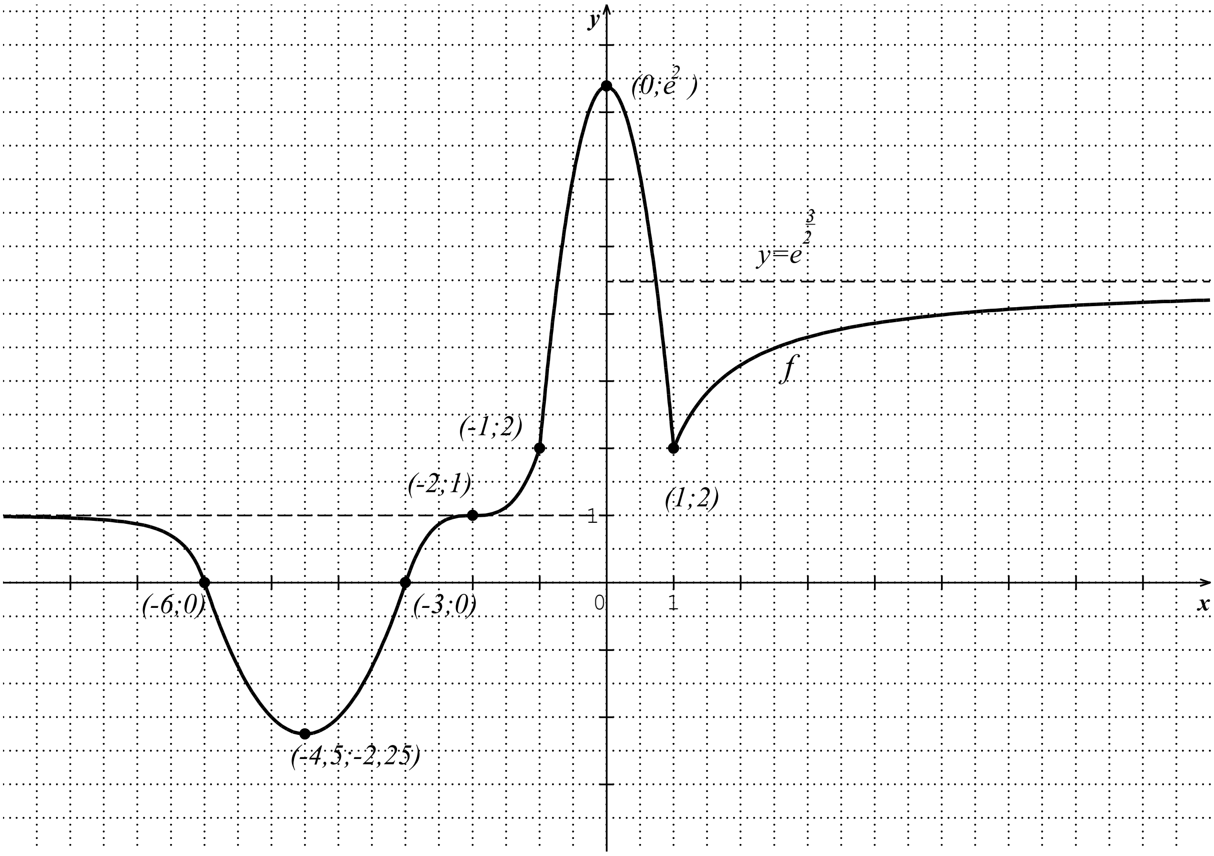
d) Déterminer D_g, l'ensemble de définition de g.

e) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to -3_+} g(x)$.

f) Calculer la dérivée de la fonction *g* en fonction de *f* et de *f*ʹ.

g) En quels points g admet-elle une tangente horizontale ?

h) Déterminer les coordonnées d'un extremum de *g*.



Exercice 6 :

Étudier et représenter le graphique des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x \cdot ln(x)$

2) $f : x \mapsto ln(x^2 + 9)$

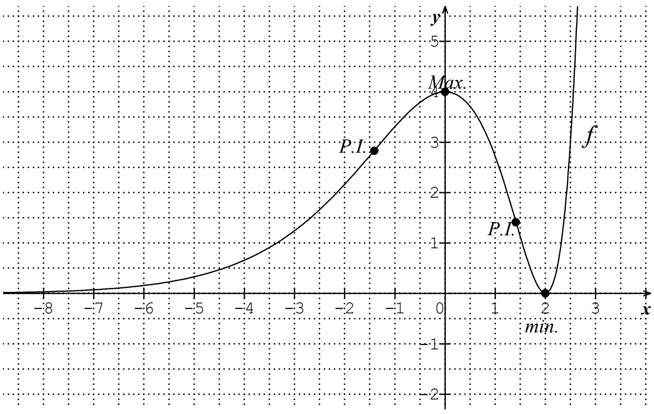
3) $f : x \mapsto x^2 \cdot ln(x)$

4) $f : x \mapsto ln(x^2 - 4)$

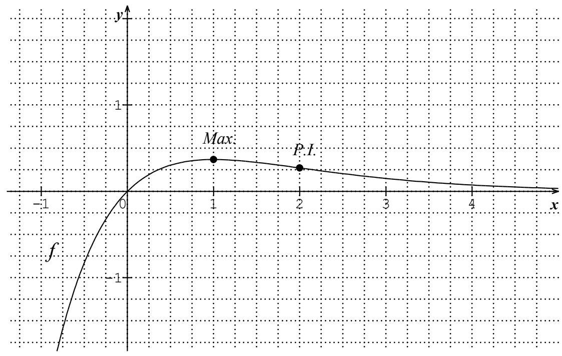
Solutions Analyse Série 7 :

Exercice 1

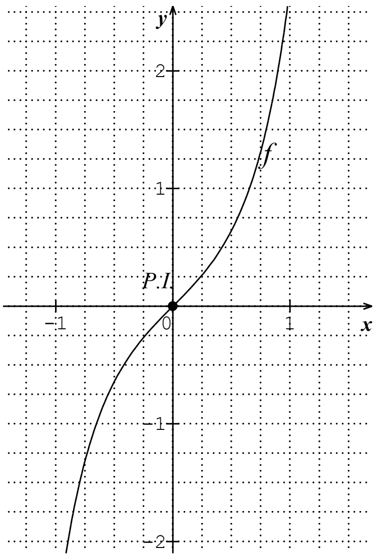
1) $f\ :\ x\ \mapsto\ (x-2)^2\cdot e^x$



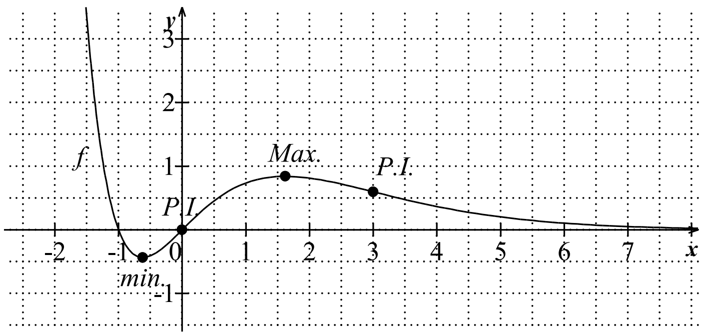
2) $f\ :\ x\ \mapsto\ x\cdot e^{-x}$



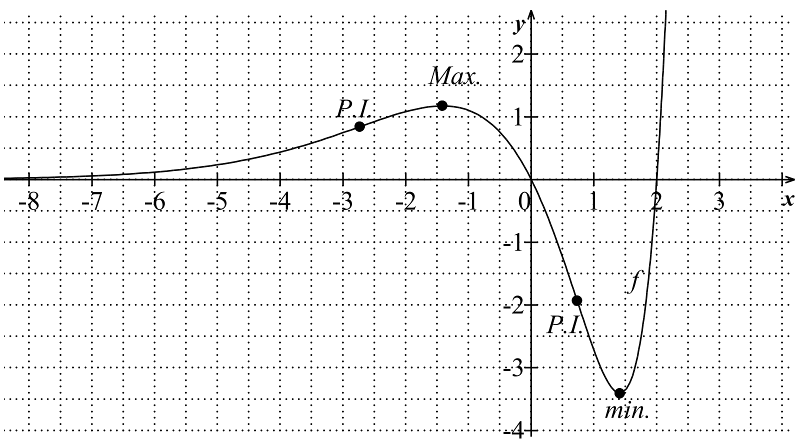
3) $f\ :\ x\ \mapsto\ x\cdot e^{x^2}$



4) $f\ :\ x\ \mapsto\ \left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}$

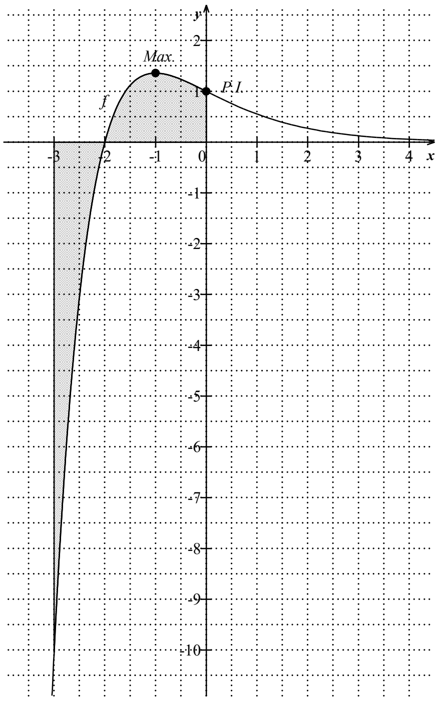


5) $f\ :\ x\ \mapsto\ \left(x^2-2x\right)\cdot e^{x}$



Exercice 2

1) 1) $f\ :\ x\ \mapsto\ \frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}$



2)

3) $\boxed{\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}}$ donc $F(x)=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)e^{-x}$ est une primitive de *f.*

4) $\left|\int_{-3}^{-2}\frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}\right|+\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}=\frac{1}{2}e^{2}+\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2}\right)=-\frac{3}{2}+e^{2}\ \left[u^{2}\right]$

5) $F(0)-F(-3)$ $F(0)-F(-3)=\int_{-3}^{0}\frac{1}{2}(x+2)\cdot e^{-x}=-\frac{3}{2}$ représente l'aire algébrique du domaine D

Exercice 3

1) a) $f'(x) = -2(x+1)e^{-x}$

b) $F'(x) = (-ax + x - b)e^{-x}; (-ax + a - b) = 2(x+2)$ $\boxed{a = -2 \text{ et } b = -6}$

$F(x) = (-2x - 6)e^{-x}$

c) La primitive G de f qui s'annule en -1 : $G(x) = F(x) - F(-1) = (-2x-6)e^{-x} + 4e$

2) a) Étude du signe de f :

x		-2	
$2(x+2)$	-	0	$+$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	-	0	$+$

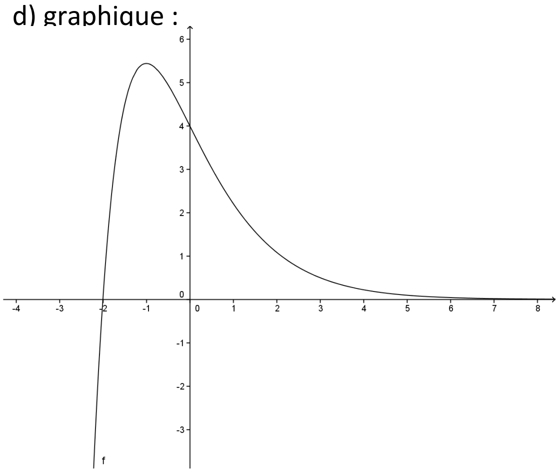
b) limites : $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) Étude la croissance de f et coordonnées des points critiques (extremums et points d'inflexion).

$f'(x) = -2(x+1)x^{-x}$; zéro : -1 ;$f''(x) = 2xe^{-x}$; zéro : 0

x		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	-	-	-
f	↗	$2e$ max	↘	4	↘

d) graphique :



3) a) **Somme de Riemann :**

$$\frac{1}{2}\left(f(-0.75) + f(-0.25) + f(0.25) + f(0.75)\right)$$

$$\frac{1}{2}(5.29 + 4.49 + 3.50 + 2.60) \simeq 7.94$$

b) **Aire exacte** : $\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = 4e - 8e^{-1} = 7.93$

c) **Valeur moyenne** : m$= \dfrac{4e - 8e^{-1}}{2} = \dfrac{7.93}{2} = 3.965$

Exercice 4

Partie A : 5 ; 3 ; 0

Partie B :

1)$f'(x) = (2x+1)e^{x-1}$; 2) f est décroissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$; f est croissante sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$.

Minimum: $\left(-\frac{1}{2}; 4-2e^{-1,5}\right)$

3) $a=2;\ \ b=-\ 3$ 4) $F(x)=G(x)-\ 3$ 5) $A = \frac{e}{3} - \frac{1}{2} \approx 0{,}604$

Exercice 5

a) En $x=1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=e^{\frac{3}{2}}$

c)

		$-4,5$		-2		0		1	
Signe $f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$		$+$
Variation de f	↘	Min.	↗	P.I.	↗	Max.	↘		↗

minimum : $(-4,5;-2,25)$

Maximum : $(0;e^2)$

d) $D_g =]-\infty;-6[\cup]-3;+\infty[$

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=ln(1)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-3_+} g(x)=-\infty$.

f) $g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$

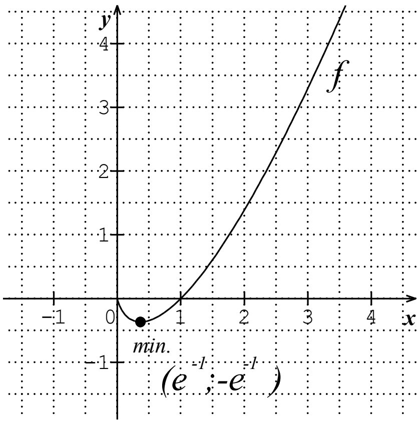
g) $g'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=0 \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \underbrace{x=-4,5}_{\notin D_g}\ \ ou\ \ x=-2\ \ ou\ \ x=0$

h) g admet deux tangentes horizontales aux points $(0;\ln(e^2))=(0;2)$ et $(-2;\ln(1))=(-2;0)$

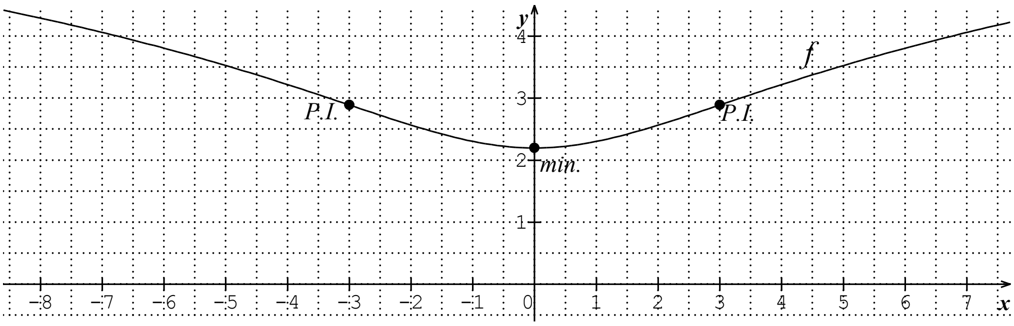
i) $(0;\ln(e^2))=(0;2)$

Exercice 6 *n°1*

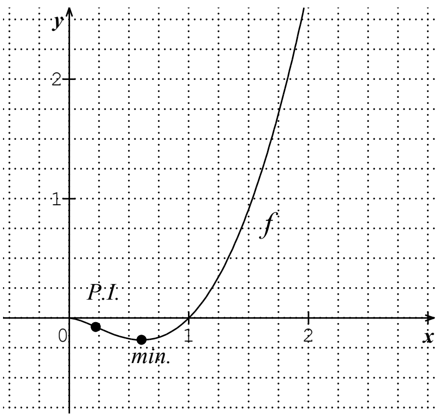
1) $f:\ x \mapsto x \cdot ln(x)$



2) $f:\ x \mapsto ln(x^2+9)$



3) $f:\ x \mapsto x^2 \cdot ln(x)$



4) $f:\ x \mapsto ln(x^2-4)$