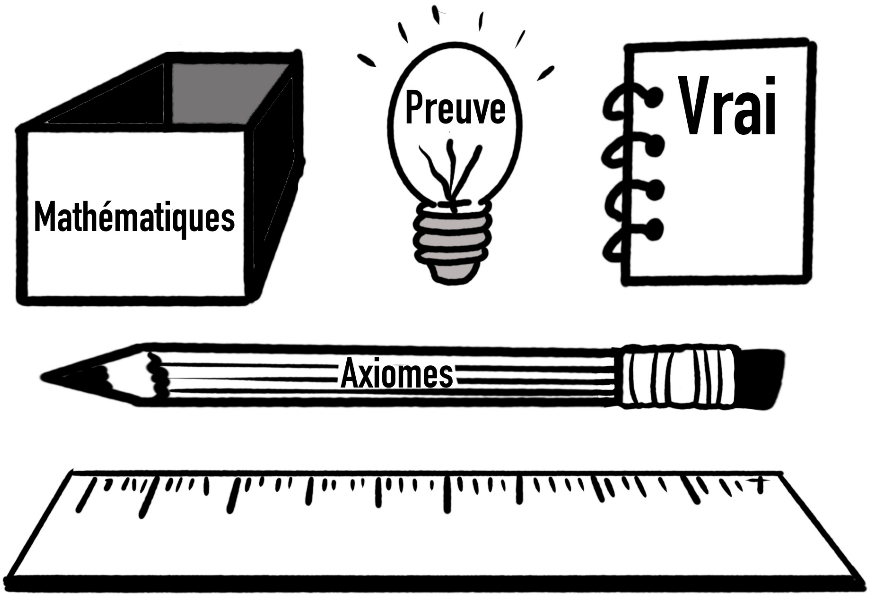
Logique



Ce chapitre est assez abstrait en première lecture, mais il est très important pour les 4 ans du collège. Il ne faudra pas hésiter à le relire et à le réapprendre de nombreuses fois, quand plusieurs chapitres auront défilé et que vous aurez gagné en maturité.

Le programme officiel de mathématiques prévoit que les notions apparaissant dans ce chapitre soient acquises progressivement durant tout le cursus et à mesure des exemples rencontrés. En première année, nous utilisons surtout ces notions dans le chapitre de géométrie. En 3e et 4e année, nous utiliserons ces notions en analyse, lors de démonstrations de théorèmes.

Le but de ce chapitre est de découvrir l'argumentation mathématique. Pour ce faire, un vocabulaire particulier est défini, afin d'appréhender la logique des propositions permettant d'identifier des raisonnements corrects.

Matériel nécessaire pour ce chapitre :

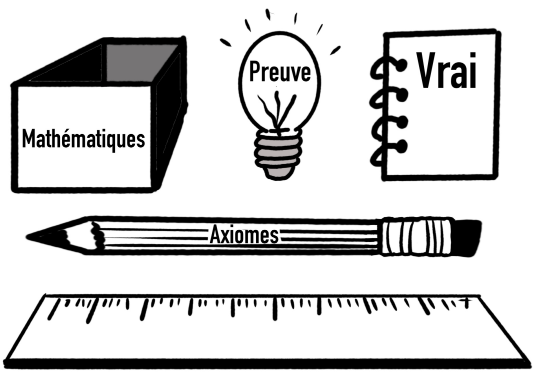
- Ce polycopié.
- Les séries associées : Logique Série 1 (LS1), Logique Série 2 (LS2), etc.
- Un extrait du livre de Raymond Smullyan, « Le livre qui rend fou ».
- Des feuilles quadrillées, crayon et gomme pour faire les exercices.
- Une calculatrice non PRO.
- Table CRM : pour les épreuves.

1. Résumé très bref des mathématiques :

Les mathématiques actuelles sont bâties de la manière suivante :

- On part d'un petit nombre d'affirmations, appelées **axiomes**, supposées vraies à priori (et que l'on ne cherche donc pas à démontrer).
- On définit ensuite la notion de **démonstration** (en décidant par exemple de ce qu'est une implication, une équivalence, etc.).
- On décide enfin de qualifier de **vraie** toute affirmation obtenue en fin de démonstration et on appelle « **théorème** » une telle affirmation (vraie).

A partir des axiomes, on obtient donc des théorèmes qui viennent petit à petit enrichir la théorie mathématique. En raison des bases (les axiomes) non démontrées, la notion de « vérité » des mathématiques est parfois sujette à débat.



2. Définitions :

Définition : Une **proposition** $\boldsymbol{P}$ est un énoncé pouvant être vrai ou faux.

Toute proposition vérifie deux principes :

P
V
F

1. **Le tiers exclu :** vrai ou faux, pas de troisième possibilité.
2. **La non-contradiction :** une proposition ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

Exemple 1 :

P : $\frac{1}{8}$ est le cube de $\frac{1}{2}$

Q : $S = \{5\}$ est l'ensemble-solution de l'équation $x^2 = 25$

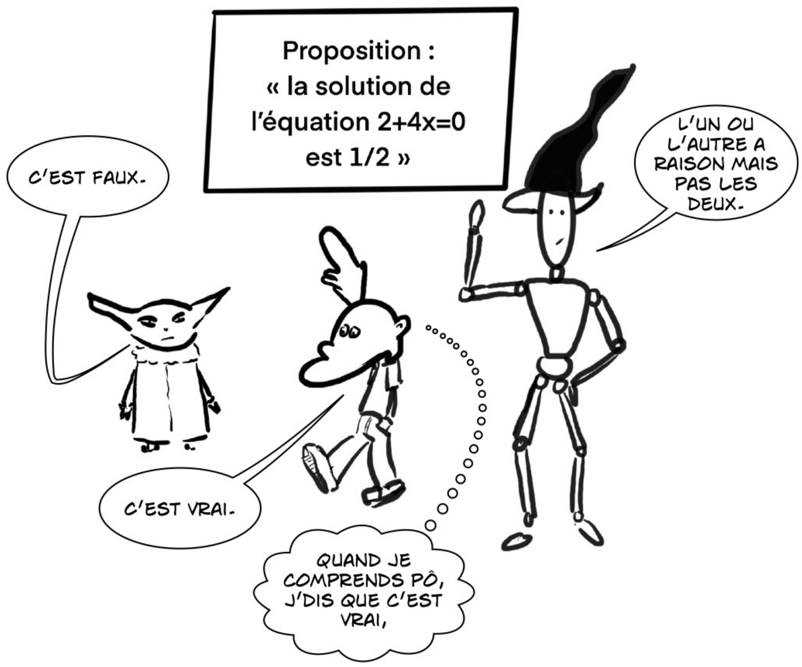
P est une proposition vraie et Q est une proposition fausse.

Exemple 2 :

R : Demain il fera beau.

S : Cette phrase n'existe pas.

R et S ne sont pas des propositions logiques.
La météo n'est pas une science exacte et S est un paradoxe[1]. *Pourquoi ?*

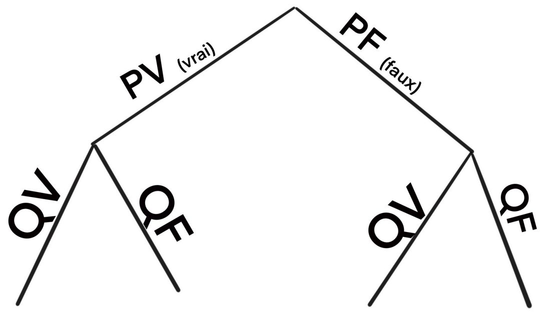


[1] Paradoxe : Association de deux faits, de deux idées contradictoires

Remarque :

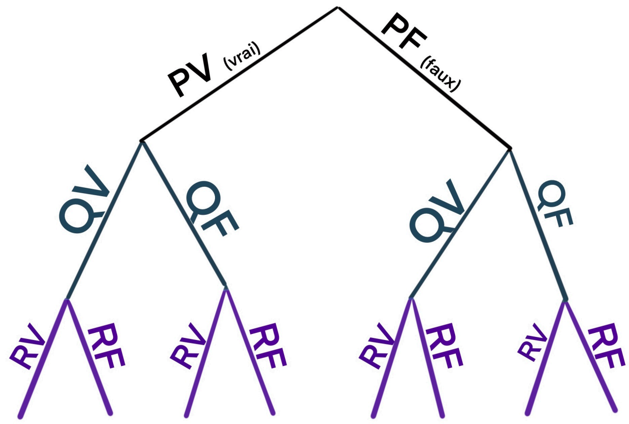
Dans le cas d'un raisonnement faisant intervenir deux propositions P et Q, il convient d'envisager quatre cas de figure.

P	Q
V	*V*
V	*F*
F	*V*
F	*F*



Il faut envisager huit cas avec trois propositions

P	Q	R
V	V	F
V	V	V
V	F	F
V	F	V
F	V	F
F	V	V
F	F	F
F	F	V



Et avec quatre propositions ?

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Éléments de logique

Une *proposition* est un énoncé qui satisfait aux deux principes suivants :

1. Une proposition ne peut être que vraie ($\mathcal{V}$) ou fausse ($\mathcal{F}$) (**principe du tiers exclu**).
2. Une proposition ne peut être en même temps vraie et fausse (**principe de non-contradiction**).

On note p, q et r des propositions élémentaires ou composées.

Logique Série 1 exercice 1

Axiome :

Définition : Un **axiome** (ou un **postulat**) est une proposition considérée comme vraie. On ne cherche pas à priori à le démontrer. Le terme **axiome** est quelquefois synonyme de **définition**.

Exemple :

Euclide a énoncé cinq axiomes (« les cinq postulats d'Euclide »), qu'il a renoncé à démontrer et qui devaient être la base de la géométrie (euclidienne). Le cinquième de ces axiomes a pour énoncé : *« par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle à cette droite ».*

« En mathématiques, le mot axiome désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique des Éléments d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé axiomatique ou théorie axiomatique. Cette axiomatique doit être non contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Cette axiomatique définit la théorie ; ce qui signifie que l'axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie, on dit alors que cette théorie est cohérente, ou consistante ou non-contradictoire[2]. »

Définition : **non P** est la négation de P.
Elle affirme donc exactement le contraire de P. On note : $\overline{P}$.

Remarque : P et non P ont donc nécessairement des valeurs de vérité différentes.

Exemple :

P : 2 est un nombre entier (vrai)

$\overline{P}$: 2 n'est pas un nombre entier (faux)

[2] https://fr.wikipedia.org/wiki/Axiome

Définition : Une **conjecture** est une proposition que l'on pense vraie mais qui n'a pas encore été démontrée.

Exemple : *La somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3.*

Exemple :

« Tout nombre pair (sauf 2) est la somme de deux nombres premiers » (Conjecture de Goldbach, énoncée en 1742). Par exemple : $8 =$

Cette conjecture n'a jamais été démontrée mais elle a été vérifiée à l'aide d'un ordinateur sur plus de 100 millions de nombres pairs !

Une conjecture peut être choisie comme hypothèse ou postulat pour étudier d'autres énoncés. Si une conjecture se révèle indécidable[3] relativement au système d'axiomes dans laquelle elle s'insère, elle peut être érigée en nouvel axiome (ou rejetée par la mise en place d'un nouvel axiome.

Remarques :

- Un contre-exemple suffit à invalider une conjecture.
- Une conjecture est soit vraie soit fausse (règle du tiers exclu et de non-contradiction).
- Plusieurs exemples (même nombreux) ne suffisent pas à démontrer une conjecture.
- Pour justifier qu'une conjecture est vraie, il faut la démontrer. Ainsi la conjecture peut devenir un théorème (proposition vraie d'une certaine importance).

Définition : Une **démonstration** est une rédaction argumentée qui établit la véracité d'un énoncé. Elle s'appuie sur des **hypothèses**[4], des énoncés précédemment démontrés, des énoncés supposés évidents (axiomes) et des règles de déduction. »

[3] Se dit d'une relation qui n'est ni vraie ni fausse.

[4] « Attention à ne pas faire un amalgame dangereux, en mathématique et même en logique, entre hypothèse et conjecture. En logique, l'hypothèse est bien ce qui vient avant la conclusion, c'est-à-dire ce qui est nécessaire à la démonstration. Les hypothèses pour un théorème sont les éléments nécessaires à son application. »

3. Connecteurs logiques :

Le connecteur est aux propositions ce que les opérations sont aux nombres. Il est possible de connecter deux propositions pour en construire une troisième. Dans ce paragraphe, nous allons définir quatre connecteurs : et, ou, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

La conjonction P et Q :

Définition : La proposition composée **P et Q** est vraie lorsque P, Q le sont toutes les deux et seulement dans ce cas.

Cette situation peut se décrire dans une table de vérité :

P	Q	P et Q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple :

P : 2 est un nombre pair. — P est vraie
Q : 2 est un nombre premier. — Q est vraie
P et Q : 2 est un nombre pair et premier — P et Q est vraie (1re ligne du tableau)

En remplaçant 2 par 3, cela correspond à la 3e ligne du tableau (P et Q fausse)

Exemple :

« L'objet (x) est rouge et triangulaire. »

- Que doit être x pour que la conjonction soit vraie ? 1 possibilité :
  $x = un\ triangle\ rouge$

- Que doit être x pour que la conjonction soit fausse ? 3 possibilités :
  $x = un\ triangle\ non\ rouge,\ \ x = un\ objet\ non\ triangulaire\ rouge,$
  $x = un\ objet\ ni\ rouge\ ni\ triangulaire$

La disjonction P <u>ou</u> Q

Définition : La proposition composée P <u>ou</u> Q est fausse lorsque P, Q le sont toutes les deux et seulement dans ce cas. Le <u>ou</u> logique est donc non-exclusif.

Cela peut se traduire dans le tableau suivant :

P	Q	P <u>ou</u> Q
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	F	F

Exemple :

P : 3 est un nombre pair. — P est fausse

Q : 3 est un nombre premier. — Q est vraie

P <u>ou</u> Q : 3 est un nombre pair ou premier — P <u>ou</u> Q est vraie (3^{e} ligne du tableau

En remplaçant 3 par 9, nous serions dans la 4^{e} ligne du tableau, la proposition P ou Q serait fausse.

Exemple :

« Cet objet (x) est rouge ou triangulaire. » Que dois-je vous montrer pour que je dise la vérité, que je mente ?

- Que doit être x pour que la disjonction soit vraie ? (3 possibilités)

- Que doit être x pour que la disjonction soit fausse ? (1 possibilité)

Logique Série 1 exercice 2

L'implication (ou La conditionnelle) P ⇒ Q

Définition :	P ⇒ Q se lit ***Si P, alors Q.*** P est l'***hypothèse*** et Q ***la conclusion*** de l'implication Le sens d'une telle proposition est que, dans le cas où P est vraie, alors Q l'est forcément aussi. Une condition n'affirme rien dans le cas où l'hypothèse est fausse. P ⇒ Q n'est donc fausse que dans le cas où P est vraie et Q fausse.

La situation est donc :

P	Q	P ⇒ Q
V	**V**	**V**
V	F	F
F	V	V
F	F	V

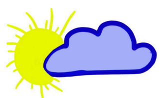
Exemple :

P : Il pleut.
Q : Je me déplace en tram.

P ⇒ Q : S'il pleut, alors je me déplace en tram.

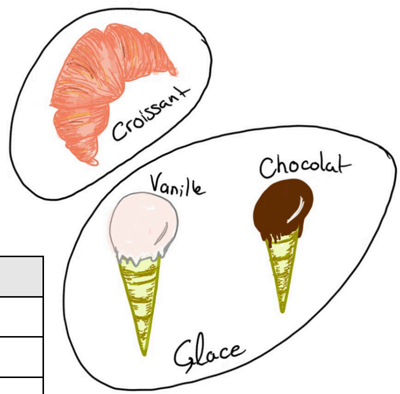
hypothèse *conclusion*


Ais-je affirmé quelque chose de faux s'il ne pleut pas ?



Exemple :

P : Je mange une glace à la vanille.
Q : Je mange une glace.



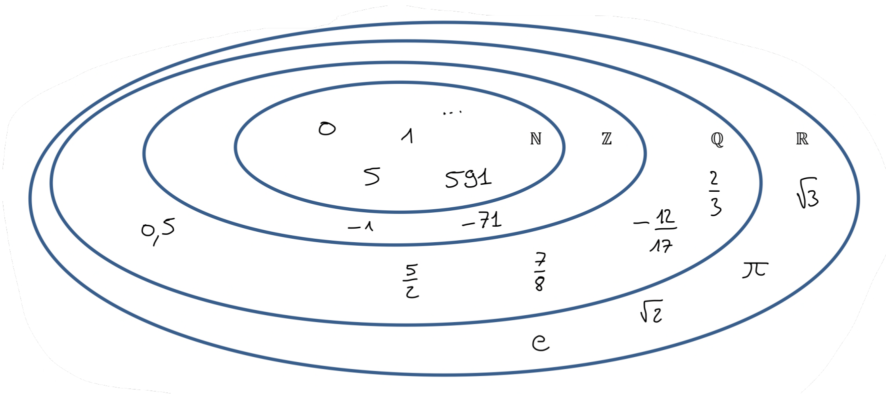
P	Q	P ⇒ Q
V	V	V, par ex : Je mange une glace à la vanille
V	F	F, car « manger une glace à la vanille » implique « manger une glace »
F	V	V, par ex : Je mange une glace au chocolat
F	F	V, par ex : je mange un croissant.

❖ ***Logique Série 1 exercice 3***

Exemple :

P : $x \in \mathbb{N}$
Q : $x \in \mathbb{Z}$

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V, par ex : $x = 1$ en effet : $1 \in \mathbb{N}$, $1 \in \mathbb{Z}$
V	F	F, car « appartenir à $\mathbb{N}$ » implique « appartenir à $\mathbb{Z}$ »
F	V	V, par ex : $x = -2$ en effet $-2 \notin \mathbb{N}$ $-2 \in \mathbb{Z}$
F	F	V, par ex : $x = 0{,}7$ en effet $0{,}7 \notin \mathbb{N}$ $0{,}7 \notin \mathbb{Z}$



Exemples :

$1 \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in \mathbb{Z}$
$1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1 \in \mathbb{Q}$
$1 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 1 \in \mathbb{R}$

Remarques :

- La difficulté générale réside dans le fait qu'il est contre-intuitif que l'implication soit vraie lorsque l'hypothèse est fausse.

- Les théorèmes sont souvent rédigés sous forme d'implication :
  Si l'hypothèse est vraie, alors on peut déduire que Q est vraie.

Pour démontrer ce type de théorème, on démontre que la conclusion est vraie en partant d'une hypothèse considérée comme vraie dans le but d'obtenir une implication vraie (sinon, en cas de conclusion fausse, la conditionnelle est fausse et l'implication n'est pas démontrée, il n'y a donc pas de théorème.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	**V**	**V**
V	F	F

Dans le cas d'une hypothèse fausse, l'implication n'exclut rien (n'affirme rien), car la conclusion peut être soit vraie soit fausse pour obtenir une implication vraie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
F	V	V
F	F	V

La réciproque

Définition :
La réciproque de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est l'implication $Q \Longrightarrow P$.

Exemple :

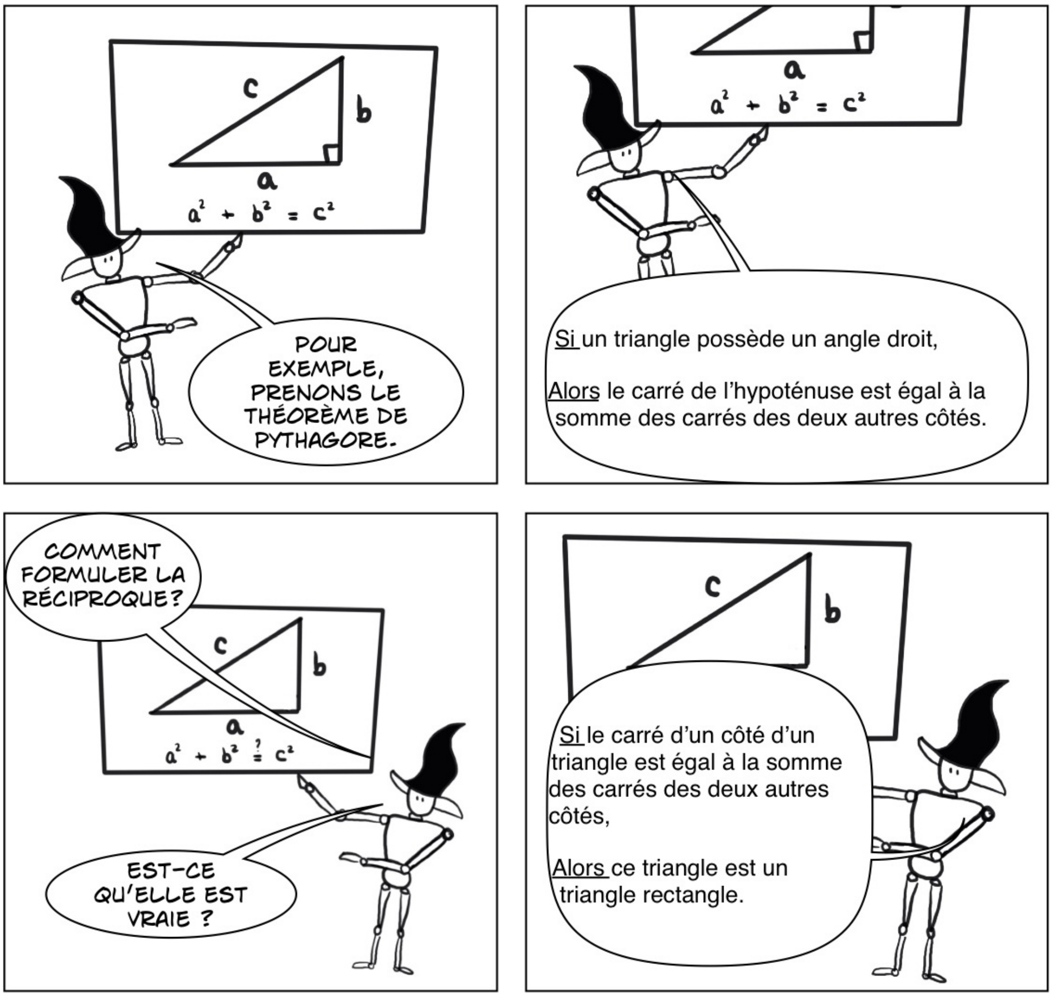
La réciproque de :

« Si le triangle ABC est équilatéral, alors il est isocèle. »

Est :

« Si le triangle ABC est isocèle, alors il est équilatéral.»

Dans cet exemple, l'implication est vraie mais sa réciproque est fausse.



Vous connaissez un autre théorème dont la réciproque est vraie. Lequel ?

L'équivalence (ou La biconditionnelle) $P \Leftrightarrow Q$

Définition : $P \Leftrightarrow Q$ se lit « **P si et seulement si Q** »
L'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ est en fait une abréviation pour $(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$.

Il est donc possible de construire la table de vérité à l'aide des connecteurs vus précédemment.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$
V	**V**	V	V	**V**
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	**F**	V	V	**V**

Remarques :

- Une équivalence n'est donc vraie que lorsque P,Q ont la même valeur de vérité.
- Une équivalence vraie est une équivalence.

Exemple :

P : Le triangle vérifie $a^2 + b^2 = c^2$

Q : Le triangle est rectangle d'hypoténuse c.

$P \Leftrightarrow Q$ est une équivalence vraie.

Logique Série 1 exercices 4 et 5

Contraposée

Définition :
La **contraposée** de l'implication $P \Longrightarrow Q$ est l'implication $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$

Exemple :

La contraposée de :

Si le triangle ABC est équilatéral, alors il est isocèle.

Est :

Si le triangle ABC n'est pas isocèle, alors il n'est pas équilatéral.

Remarque :

- Une implication et sa contraposée ont toujours la même valeur de vérité.

Logique Série 1 exercice 6 à 8

Résumé des connecteurs logiques :

Le tableau ci-dessous doit être compris comme une définition

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow P$	$(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Connecteurs ou opérateurs

	Dénomination française	Notation mathématique
Conjonction	p et q	$p \wedge q$
Disjonction	p ou q	$p \vee q$
Inférence	si p alors q	$p \rightarrow q$
Biconditionnelle	(si p alors q) et (si q alors p)	$p \leftrightarrow q$
Négation	non p	$\overline{p}$ (noté aussi $\neg p$)

Tables de vérité

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\overline{p}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Une inférence vraie est une *implication*; elle est notée $p \Rightarrow q$.
Une biconditionnelle vraie est une *équivalence*; elle est notée $p \Leftrightarrow q$.

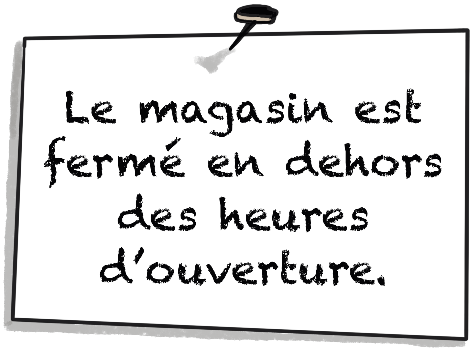
Logique Série 1

4. Tautologie, contradiction et syllogisme

Tautologie

Définition : Une **tautologie** est une proposition composée toujours vraie.

Exemple : une lapalissade



Exemple : Le discours du politicien : $(P \text{ et } \bar{P}) \Longrightarrow Q$

P	Q	$\bar{P}$	P et $\bar{P}$	$(P \text{ et } \bar{P}) \Longrightarrow Q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Exemple : La conditionnelle et sa contraposée

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$	$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P})$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

L'implication est équivalente à sa contraposée. C'est donc une tautologie. Cela signifie que chaque énoncé de la forme $P \Longrightarrow Q$ aura toujours la même valeur de vérité que l'énoncé modifié (ou traduit) selon la règle $\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}$.

Contradiction

Définition : Une contradiction est une proposition composée toujours fausse.

Exemple :

(P et Q) ⇔ ($\bar{P}$ ou $\bar{Q}$)

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	P et Q	$\bar{Q}$ ou $\bar{P}$	(P et Q) ⇔ ($\bar{Q}$ ou $\bar{P}$)
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Exemple :

(P ou Q) ⇔ ($\bar{P}$ et $\bar{Q}$)

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	P ou Q	$\bar{Q}$ et $\bar{P}$	(P ou Q) ⇔ ($\bar{Q}$ et $\bar{P}$)
V	V	F	F			
V	F	F	V			
F	V	V	F			
F	F	V	V			

Exemple :

(P ⟹ Q) ⇔ (P et $\bar{Q}$)

P	Q	$\bar{Q}$	P ⟹ Q	$\bar{Q}$ et P	(P ⟹ Q) ⇔ ($\bar{Q}$ et P)
V	V	F			
V	F	V			
F	V	F			
F	F	V			

Remarque :

Les trois équivalences des exemples précédents étant fausses, on en déduit que leurs deux propositions présentent des valeurs de vérité différentes (puisqu'une implication et sa contraposée ont les mêmes valeurs de vérité). Chaque exemple présente donc une proposition et sa négation :

Proposition	Négation
P et Q	$\bar{Q}$ ou $\bar{P}$
P ou Q	$\bar{Q}$ et $\bar{P}$
P ⟹ Q	$\bar{Q}$ et P

Syllogisme

En mathématiques, de nombreuses démonstrations utilisent la loi du syllogisme.
Cette loi correspond à des déductions en chaîne, elle se schématise de la façon suivante :

$$\mathbf{[(P \Longrightarrow Q)\ \underline{et}\ (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)}$$

Et qui s'exprime en français de la façon suivante :

Si P implique Q et Q implique R, alors P implique R.

Pour démontrer que ce principe de déduction est valide, il faut démontrer que :

$[(P \Longrightarrow Q)\ \underline{et}\ (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$ est une tautologie.

P	Q	R	$P \Longrightarrow Q$	$Q \Longrightarrow R$	$(P \Longrightarrow Q)\ \underline{et}\ (Q \Longrightarrow R)$	$P \Longrightarrow R$	$[(P \Longrightarrow Q)\ \underline{et}\ (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Exemple :

Hypothèses :
P : Tous les profs de maths aiment les paraboles.
Q : Tous ceux qui aiment les paraboles connaissent la formule de Viète.
R : Tous ceux qui connaissent la formule de Viète savent calculer un discriminant.

Conclusion :
Tous les profs de maths savent calculer un discriminant[5].

◈ ***Logique Série 2***

[5] *En cas peu probable de doute, il suffit de poser la question à votre prof de maths. Si elle ne sait pas calculer un discriminant, c'est forcément que l'hypothèse est fausse.*

5. Étude d'un raisonnement

Démarche :
Pour vérifier qu'un raisonnement est correct, il faut démontrer que le raisonnement est une tautologie en étudiant le raisonnement (structure et table de vérité).

Exemple :

S'il fait beau, Alan joue à un jeu vidéo.
Si Alan ne joue pas à un jeu vidéo, il regarde la télévision.
Donc s'il ne fait pas beau, Alan regarde la télévision.

Est-ce correct ?

Pour répondre à cette question, il faut commencer par étudier la structure de ce raisonnement :

Notons :

B : Il fait beau.
J : Alan fait un jeu vidéo.
T : Alan regarde la télévision.

La structure du raisonnement est donc : **[(B⇒J) <u>et</u> ($\bar{J}$ ⇒T)] ⇒ ($\bar{B}$ ⇒T)**

Reste à savoir maintenant si cette proposition est une **tautologie**.

Si c'est le cas, le raisonnement est correct. Sinon, …. Ce lui qui affirme se trompe !

B	J	T	$\bar{B}$	$\bar{J}$	B⇒J	$\bar{J}$ ⇒T	(B⇒J) <u>et</u> ($\bar{J}$ ⇒T)	$\bar{B}$ ⇒T	Raisonnement
V	V	V							
V	V	F							
V	F	V							
V	F	F							
F	V	V							
F	V	F							
F	F	V							
F	F	F							

Le raisonnement par l'absurde

Énoncé :

Si $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel[6],
alors $\sqrt{8}$ l'est aussi.

Démonstration : Supposons que $\sqrt{2}$ est irrationnel et que $\sqrt{8}$ ne l'est pas.

Si $\sqrt{8}$ était rationnel, alors $\sqrt{8} = \frac{a}{b}$ où a et b sont des nombres entiers.

$$\sqrt{4 \cdot 2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{2b}$$

Donc $\sqrt{2}$ est également rationnel ce qui est impossible, puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel.

L'énoncé est de la forme $P \Rightarrow Q$ et sa négation est P et $\bar{Q}$.

La démonstration ci-dessus prouve précisément que P et $\bar{Q}$ est fausse, puisqu'il a été supposé que $\sqrt{2}$ est irrationnel et que $\sqrt{8}$ est rationnel.

Sous ces deux hypothèses, nous avons obtenu $\sqrt{2} = \frac{a}{2b}$, ce qui est contradictoire.

Il est donc impossible que P et $\bar{Q}$ soit vraie. Comme P et $\bar{Q}$ est fausse, alors $P \Rightarrow Q$ est forcément vraie. Nous savons donc maintenant que $\sqrt{8}$ est irrémédiablement irrationnel.

Logique Série 3

[6] Un irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme d'une fraction.

6. Conditions logiques

Définition : Une **condition** pour x est une affirmation faisant intervenir une variable (ici : x) de telle sorte qu'il en résulte une proposition lorsque la variable prend une valeur, devient un objet précis, etc.

Exemple : Conditions logiques :

$P(x)$: $2x + 4 = 11$
$Q(x)$: Si x^2 est supérieur à 4, alors x est supérieur à 2.
$R(x)$: $x \in \mathbb{N}$
$G(x)$: Cet objet (x) est un triangle
$M(x)$: La nourriture (x) que je mange est une glace

Propositions vraies ou fausses à partir des conditions logiques ?

a) $x = \frac{7}{2}$ rend la condition P(x) vraie.
b) $x = 7$ rend la condition P(X) fausse.
c) $x = -5$ rend la condition Q(x) fausse.
d) $x = -3$ rend la condition R(x) fausse.
e) $x = carré$ rend la condition G(x) fausse.
f) $x = croissant$ rend la condition M(x) fausse.

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Quantification

On note $r(x)$ et $s(x)$ deux fonctions logiques (ou conditions) où x appartient à un ensemble M non vide.

7. Quantificateurs :

Définitions :

$\forall$ est le quantificateur universel.

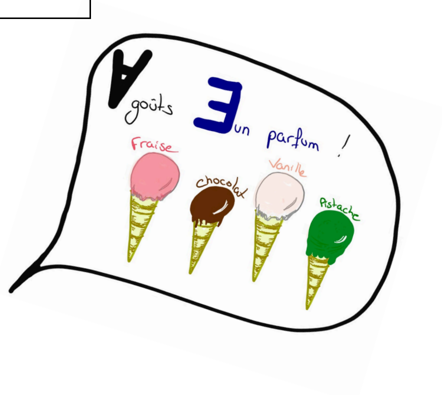
$\forall \boldsymbol{x}$ ... signifie : **Pour tout $\boldsymbol{x}$**....... Ou **Quel que soit $\boldsymbol{x}$**....

$\exists$ est le quantificateur existentiel.

$\exists x$ signifie : Il existe au moins un x...

| ... **tel que** ...

Exemple :



Considérons les conditions :

$P(x)$: $2x + 3 = 7$

$Q(x)$: $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

Il est possible de quantifier ces conditions :

$\forall x \ P(x)$: « Pour tout x, $2x + 3 = 7$ »

$\exists x \mid P(x)$: « Il existe au moins un x tel que $2x + 3 = 7$ »

$\forall x \ Q(x)$: « Pour tout x, $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ »

$\exists x \mid Q(x)$: « Il existe au moins un x tel que $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$.

Une fois munies d'un quantificateur, ces conditions deviennent **évaluables**.
Ce sont donc des propositions appelées **propositions quantifiées**.
Dans les quatre exemples ci-dessus, seule la première est fausse. *Pourquoi ?*

Propriétés : Négations des propositions quantifiées :

Proposition	*Négation*
$\forall x \ \ P(x)$	$\exists x \mid \overline{P(x)}$
$\exists x \mid Q(x)$	$\forall x \ \ \overline{Q(x)}$

Exemple :

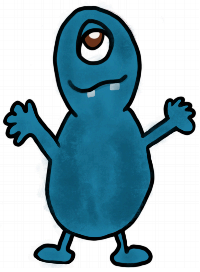
La négation de : *« Tous les chats sont gris. »*

Est : « Il existe au moins un chat pas gris. »

Exercice : Écrire la négation de :

1) « Il existe un chat qui n'a pas 4 pattes. »

2) « Tous les cyclopes ont l'œil rouge ou bleu.



Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Quantificateur d'universalité

La proposition $(\forall x)\ r(x)$ est vraie si $r(x)$ est vraie pour tout élément de M, fausse dans le cas contraire. Le symbole $\forall$ se lit *pour tout*.

Quantificateur d'existence

La proposition $(\exists x)\ r(x)$ est vraie s'il existe un élément de M pour lequel $r(x)$ est vraie, fausse dans le cas contraire. Le symbole $\exists$ se lit *il existe*.

Propriétés

p	$(\forall x)\ r(x)$	$(\exists x)\ r(x)$	$(\forall x)\ \big(r(x) \to s(x)\big)$	$(\exists x)\ \big(r(x) \wedge s(x)\big)$
$\overline{p}$	$(\exists x)\ \overline{r(x)}$	$(\forall x)\ \overline{r(x)}$	$(\exists x)\ \big(r(x) \wedge \overline{s(x)}\big)$	$(\forall x)\ \big(\overline{r(x)} \vee \overline{s(x)}\big)$

Logique Série 4

Table des matières