

Logique Série 1

Exercice 1 :

Parmi les énoncés suivants, trouver ceux qui peuvent être considérés comme des propositions logiques. Déterminer, le cas échéant, leur valeur de vérité.

- a) $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 10$
- b) Un triangle qui a un angle droit ne peut pas être isocèle.
- c) Tous les nombres impairs sont premiers.
- d) Il existe plusieurs nombres premiers paires.
- e) $2 \cdot (x + 1) = 10$

Exercice 2 :

P, Q, R sont trois propositions. Élaborer la table des valeurs (vérités) de :

- a) $(P \text{ et } Q) \text{ ou } P$
- b) $Q \text{ et } (P \text{ ou } R)$

Exercice 3 :

Traduire les énoncés suivants à l'aide des symboles logiques.

- a) S'il est content, alors il rit et il chante.
- b) S'il pleut ou s'il vente, Laure se déplace en tram.
- c) Ce nombre est pair s'il est divisible par 2 et réciproquement.
- d) Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 5.

Les propositions formulées sous c) et d) sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 4 :

P, Q, R sont trois propositions. Élaborer la table des valeurs (vérités) de :

- a) $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$
- b) $(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow R$
- c) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Exercice 5 :

- a) Que peut-on dire de $P \Rightarrow Q$ sachant que : $P \text{ et } Q$ est fausse mais que P est vraie ?
- b) Que peut-on dire de $P \Rightarrow Q$ sachant que : $P \text{ et } Q$ est fausse mais que $P \text{ ou } Q$ est vraie ?
- c) Que peut-on dire de $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ sachant que $P \text{ ou } Q$ est fausse ?

Justifier brièvement les réponses.

Exercice 6 :

Considérons les deux propositions suivantes :

P : Cette figure est un carré

Q : Cette figure est un quadrilatère.

Écrire les propositions :

- \bar{P} ,
- $P \Rightarrow Q$,
- La réciproque de $P \Rightarrow Q$,
- la contraposée de $P \Rightarrow Q$

Exercice 7 :

a) Compléter les tables des valeurs (vérités) ci-dessous.

| P | Q | \bar{Q} | \bar{P} | $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ |
|---|---|-----------|-----------|-------------------------------|
| V | V | | | |
| V | F | | | |
| F | V | | | |
| F | F | | | |

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|-------------------|
| V | V | |
| V | F | |
| F | V | |
| F | F | |

b) Choisir deux propositions P , Q de sorte que la conditionnelle $P \Rightarrow Q$ ait un sens.

c) Formuler la contraposée de cette conditionnelle puis comparer les valeurs de vérité de la conditionnelle et de sa contraposée.

Exercice 8 :

a) A l'aide des tables de valeurs, comparer les vérités de $\overline{P \text{ et } Q}$ avec celles de \bar{P} ou \bar{Q} .

b) Formuler un exemple de proposition du type $\overline{P \text{ et } Q}$ puis formuler \bar{P} ou \bar{Q} .

Exercice 9 :

P , Q sont deux propositions. Élaborer la table des valeurs de :

- $(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$
- Non $(P \text{ et non } Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$

Exercice 10 :

Traduire l'énoncé suivant à l'aide des symboles logiques.

« S'il est content, il rit et s'il n'est pas content, il ne rit pas. »

Dans quel(s) cas de figure cette affirmation est-elle fausse ?

Solution Logique Série 1 :

Exercice 1 :

- $2 \cdot 3 + 5 = 6 + 10$ est une proposition fausse, puisque l'égalité n'est pas vérifiée.
- « Un triangle qui a un angle droit ne peut pas être isocèle. » est une proposition fausse puisqu'il existe un triangle isocèle rectangle.
- « Tous les nombres impairs sont premiers. » est une proposition fausse, 9 est un contre-exemple.
- « Il existe plusieurs nombres premiers paires. » est une proposition fausse, les nombres pairs sont multiples de 2.
- $2 \cdot (x + 1) = 10$ est une proposition mais sa valeur de vérité dépend de la variable x .

Exercice 2 :

| P | Q | R | P ou R | P et Q | (P <u>et</u> Q) <u>ou</u> P | Q <u>et</u> (P <u>ou</u> R) |
|---|---|---|--------|--------|-----------------------------|-----------------------------|
| V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | F |
| V | F | V | V | F | V | V |
| F | F | V | V | F | V | F |
| F | F | F | F | F | F | F |
| F | V | F | F | F | F | F |
| F | V | V | V | F | V | F |

Exercice 3 :

- H : Il est content R : Il rit C : Il chante
 $H \Rightarrow (R \text{ et } C)$ S'il est content, alors il rit et il chante
- P : Il pleut. V : Il vente T : Laura se déplace en tram
 $(P \text{ ou } V) \Rightarrow T$ S'il pleut ou s'il vente, Laure se déplace en tram.
- P : Ce nombre est pair. D : Ce nombre est divisible par 2.
 $(D \Rightarrow P) \text{ et } (P \Rightarrow D) = (D \Leftrightarrow P)$ Ce nombre est pair s'il est divisible par 2 et réciproquement.
- D : Ce nombre est divisible par 2. T : Ce nombre est divisible par 3. C : ce nombre est divisible par 5.
 $(D \text{ et } T) \Rightarrow C$ Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 5.

La proposition c) est vraie tandis que la d) est fausse.

Exercice 4 :

| P | Q | R | $(P \text{ et } Q) \Rightarrow P$ | $(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow R$ | $P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ |
|---|---|---|-----------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | F | V |
| V | F | F | V | F | V |
| V | F | V | V | V | V |
| F | F | V | V | V | V |
| F | F | F | V | F | V |
| F | V | F | V | V | V |
| F | V | V | V | F | V |

Exercice 5 :

- a) P est vraie, P et Q est fausse alors Q est fausse et $P \Rightarrow Q$ est fausse.
- b) P et Q est fausse, P ou Q est vraie signifie que l'une est fausse et l'autre vraie. On ne peut rien dire de $P \Rightarrow Q$.
- c) P ou Q est fausse, P et Q est fausse, $(P \text{ et } Q) \Rightarrow R$ est vraie.

Exercice 6 :

- \bar{P} : Cette figure n'est pas un carré.
- $P \Rightarrow Q$: Si cette figure est un carré alors c'est un quadrilatère (tous les carrés sont des quadrilatères)
- La réciproque de $P \Rightarrow Q = (Q \Rightarrow P)$: Si cette figure est un quadrilatère alors c'est un carré
- la contraposée de $P \Rightarrow Q = \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$: Si cette figure n'est pas un quadrilatère alors ce n'est pas un carré.

Exercice 7 :

| P | Q | \bar{Q} | \bar{P} | $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ |
|---|---|-----------|-----------|-------------------------------|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V |

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|-------------------|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

Exercice 8 :

Les égalités $\overline{(P \wedge Q)} = \bar{P} \vee \bar{Q}$ et $\overline{(P \vee Q)} = \bar{P} \wedge \bar{Q}$ s'appellent *les lois de De Morgan*.
 et ou ou et

Exercice 9 :

$\overline{(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{Q} \Rightarrow P)} \Leftrightarrow (P \wedge Q)$ et $\overline{(P \wedge \bar{Q})} \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ est une tautologie

| P | Q | $(P \Rightarrow Q)$ | $\bar{Q} \Rightarrow P$ | $(P \Rightarrow Q) \wedge (\bar{Q} \Rightarrow P)$ | $\bar{P} \wedge \bar{Q}$ | $P \Rightarrow Q$ | $(P \wedge \bar{Q}) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ |
|---|---|---------------------|-------------------------|--|--------------------------|-------------------|--|
| v | v | v | v | v | v | v | v |
| v | f | f | v | f | f | f | v |
| f | f | v | f | f | v | v | v |
| f | v | v | v | f | v | v | v |

Exercice 10 :

« S'il est content, il rit et s'il n'est pas content, il ne rit pas. »
 C : il est content et R : il rit

$(C \Rightarrow R) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \bar{R})$, $(\bar{C} \Rightarrow \bar{R}) \Leftrightarrow (R \Rightarrow C)$, $(C \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow C) = (R \Leftrightarrow C)$
 Cette affirmation est fausse lorsqu'il est content et qu'il ne rit pas et lorsqu'il n'est pas content et qu'il rit.