Probabilités Série 2

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1 :

On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire "nombre de faces obtenus". Ecrire, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X.

Exercice 2 :

On lance simultanément un dé et une pièce de monnaie. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe un nombre de la manière suivante : Si la pièce est tombée sur face on retient le chiffre indiqué par le dé, si la pièce est tombée sur pile alors on multiplie par 2 le chiffre indiqué par le dé. Etablir la loi de probabilité de X.

Exercice 3 :

On joue à pile ou face trois fois de suite. Chaque "pile" obtenu fait gagner 3 points et chaque "face" fait perdre 2 points. Soit X la variable qui prend la valeur du gain ou de la perte après ces trois lancers (on suppose la pièce équilibrée). Etablir la loi de probabilité de X.

Exercice 4 :

Soit la distribution :

x_i	-3	-1	1	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

Calculer :

a) $P(X \leq -1) =$

b) $P(X > -1) =$

c) $P(-3 < X \leq 1) =$

d) $P(-1 < X \leq 5) =$

e) $P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1) =$

f) $P(X \leq 1 \mid X \geq -1) =$

Exercice 5 :

a) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 1.

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 2.

c) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 3.

Exercice 6 :

On jette une pièce de monnaie trois fois. Quel est l'univers ? Décrire la variable aléatoire X associant à chaque issue de U, le nombre de "faces" se présentant à l'épreuve. En faire la distribution de probabilité. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 7 :

On jette une pièce de monnaie trois fois. Quel est l'univers ? Décrire la variable aléatoire X associant à chaque évènement de U, le nombre de "faces" moins le nombre de piles. En faire la distribution de probabilité. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 8 :

On jette 6 fois une pièce de monnaie. Si X représente le nombre de piles obtenu, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.

Exercice 9 :

Un échantillon de 3 objets est choisi au hasard dans une boîte contenant 12 objets parmi lesquels 3 sont défectueux. Si X détermine le nombre d'objets défectueux, calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 10 :

Une boîte contient 10 transistors dont 2 sont défectueux. On choisit un transistor au hasard et on le teste. On poursuit jusqu'à obtenir un transistor en état de marche. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de transistors que l'on a dû tirer de la boîte. Calculer l'espérance mathématique de X.

Exercice 11 :

Au lieu de corriger les travaux de ses élèves, un professeur décide de mettre les notes de la façon suivante. Pour chaque travail, il lance deux dés et retient, comme note pour le travail, le plus petit des deux nombres indiqués par les dés.

a) A quelle moyenne de classe ce professeur (imaginaire bien sûr !) peut-il s'attendre ?

b) Quel sera probablement le pourcentage de notes insuffisantes ?

c) Quelle serait la moyenne de classe s'il retenait le plus grand des deux nombres indiqués par les dés ?

Exercice 12 :

Sur la Plaine de Plainpalais, un forain propose le jeu suivant, pour 10 francs la partie : dix enveloppes sont placées dans une corbeille, dont une contient un carton vert, deux contiennent un carton rouge et sept contiennent un carton blanc.

Le jeu consiste, après versement des 10 francs, à choisir une enveloppe au hasard dans la corbeille, à l'ouvrir et à regarder la couleur du carton. Un carton vert donne droit à un gros lot, un carton rouge donne droit à un lot simple et un carton blanc donne droit à un lot de consolation. Les lots simples reviennent à 8 francs au forain, alors que les lots de consolation ne lui reviennent qu'à 3 francs.

Soit X la variable aléatoire égale au bénéfice du forain sur une partie.

a) Quel est le prix maximal auquel le forain peut acheter ses gros lots, s'il désire gagner en moyenne au moins 4 francs par partie ?

b) S'il achète ses gros lots au prix de la question a), calculer l'écart-type de la variable X.

Exercice 13 :

Un habitué des casinos joue régulièrement à la roulette. (Remarque : une roulette contient 36 numéros différents). Chaque samedi, il mise 20 fois de suite sur le 7.

En moyenne, combien de fois par semaine ce joueur va-t-il gagner ?

Exercice 14 :

Un questionnaire de type QCM est composé de 24 questions. Pour chacune de ces questions, trois réponses sont proposées dont une seule est la bonne.

En répondant au hasard à ce questionnaire, combien de bonnes réponses pouvons-nous espérer ? (Au sens mathématique du terme!)

Exercice 15 :

Onze personnes montent au rez-de-chaussée dans l'ascenseur d'un immeuble de quinze étages. (en plus du rez-de-chaussée)

Considérons la variable aléatoire $Y =$ $nombre\ de\ personnes\ qui\ quittent\ l'ascenseurau\ 7e\ étage.$

a) Quelle est la loi suivie par Y ?

b) Calculer $p(Y = 0); p(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.

c) Calculer $E(Y)$.

Solutions Série 2 Probabilités :

Exercice 1 :

x_i	0	1	2	3	4	5	total
$P(x_i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	1

Exercice 2 :

x_i	1	2	3	4	5	6	8	10	12	total
$P(x_i)$	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1

Exercice 3 :

x_i	−6	−1	4	9	total
$P(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Exercice 4 :

a) $P(X \leq -1) = \frac{1}{12} + \frac{2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25$

b) $P(X > -1) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

c) $P(-3 < X \leq 1) = \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12} = 0,41\overline{6}$

d) $P(-1 < X \leq 5) = \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0,\overline{6}$

e) $P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1) = \frac{8/12}{11/12} = \frac{8}{11} \approx 0,727$

f) $P(X \leq 1 \mid X \geq -1) = \frac{5/12}{11/12} = \frac{5}{11} \approx 0,4545$

Exercice 5 :

a) En moyenne, on obtient 2,5 faces. $E(X) = 2{,}5, \sigma(X) \cong 1{,}118$

b) En moyenne, on obtient le nombre 5,25. $E(X) = 5{,}25, \sigma(X) \cong 3{,}21778$

c) En moyenne, on gagne 1,5 point. $E(X) = 1{,}5, \sigma(X) \cong 4{,}33$

Exercice 6 :

$U = \{(p;p;p); (f;p;p); (p;f;p); (p;p;f); (f;f;p); (f;p;f); (p;f;f); (f;f;f)\}$

X est la variable aléatoire indiquant le nombre de "faces" se présentant à l'épreuve

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$p_i x_1$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{2} = 1{,}5 = E(X)$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3 = E(X^2)$

$E(X) = \mu = \frac{3}{2} = 1{,}5$ $\quad V(X) = \sum p_i X_i^2 - \mu^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$

Exercice 7 :

$U = \{(p;p;p);(f;p;p);(p;f;p);(p;p;f);(f;f;p);(f;p;f);(p;f;f);(f;f;f)\}$
X est la variable aléatoire indiquant le nombre de "faces" moins le nombre de "piles" se présentant à l'épreuve.

x_i	-3	-1	1	3	Σ
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$p_i x_i$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$0 = E(X)$
$p_i x_1^2$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3 = E(X^2)$

$E(X) = 0$ $\quad V(X) = 3 - 0^2 = 3$ $\quad \sigma(X) = \sqrt{3} = 1{,}73$

Exercice 8 :

X est la variable aléatoire qui représente le nombre de "piles" obtenus. $2^6 = 64$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{C_0^6}{2^6} = \frac{1}{64}$	$\frac{C_1^6}{2^6} = \frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	1
$p_i x_i$	0	$\frac{6}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{192}{64} = 3$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{6}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{180}{64}$	$\frac{240}{64}$	$\frac{150}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{672}{64} = 10{,}5$

$E(X) = \frac{192}{64} = 3$ $\quad V(X) = 10{,}5 - 3^2 = 1{,}5$ $\quad \sigma = \sqrt{1{,}5} = 1{,}22$

Exercice 9 :

Choisir 3 objets parmi 12: $C_3^{12} = 220$ possibilités dans l'univers (de tirer 3 objets parmi 12)
X est la variable aléatoire qui représente le nombre d'objets défectueux

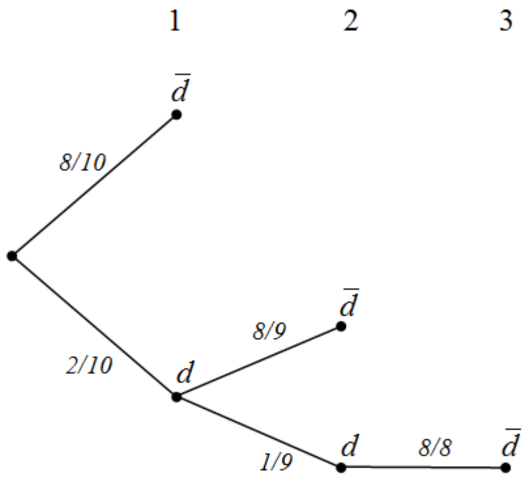
- 0 objets défectueux (donc 3 à choisir dans les 9 non défectueux): $C_0^3 \cdot C_3^9 = 84$
- 1 défectueux et 2 non défectueux : $C_1^3 \cdot C_2^9 = 108$
- 2 défectueux et 1 non défectueux : $C_2^3 \cdot C_1^9 = 27$
- 3 défectueux et 0 non défectueux : $C_3^3 \cdot C_0^9 = 1$

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1
$p_i x_i$	0	$\frac{108}{220}$	$\frac{54}{220}$	$\frac{3}{220}$	$\frac{165}{220} = 0{,}75 = E(X)$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{108}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{225}{220} = E(X^2)$

$E(X) = \frac{165}{220} = 0{,}75$ $\quad V(X) = \frac{225}{220} - \left(\frac{165}{220}\right)^2 = 0{,}46$ $\quad \sigma = \sqrt{0{,}46} = 0{,}678$

Exercice 10 :

X est la variable aléatoire qui représente le nombre de transistors que l'on a dû tirer de la boîte jusqu'à obtenir un transistor en état de marche.



$p(X=1) = \frac{8}{10}$

$p(X=2) = \frac{2}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{90}$

$p(X=3) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{8} = \frac{2}{90}$

x_i	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{2}{90}$	1
$p_i x_i$	$\frac{8}{10}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{11}{9} = 1{,}22$

$E(X) = 1{,}22$

Exercice 11 : X est la variable aléatoire qui représente la note obtenue par l'élève en fonction du lancer des deux dés. Il y a $6^2 = 36$ possibilités pour les 2 dés.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{11}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{91}{36} = 2{,}53$

$E(X) = 2{,}53$ représente la moyenne de classe de ce professeur

b) $\frac{27}{36} = 75\%$ des élèves n'ont pas la moyenne.

c)

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{161}{36} = 4{,}47$

$E(X) = 4{,}47$ serait dans ce cas, la moyenne de classe de ce professeur

Exercice 12 :

a) X est la variable aléatoire qui représente le bénéfice du forain sur une partie. 3 cas:

- carton blanc: $bénéfice = 10 - 3 = 7\ francs$, d'où $p(X = 7) = \frac{7}{10}$
- carton rouge: $bénéfice = 10 - 8 = 2\ francs$, d'où $p(X = 2) = \frac{2}{10}$
- carton vert: $bénéfice = 10 - b = a\ francs$, d'où $P(X = a) = \frac{1}{10}$

x_i	a	2	7	Σ
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$	1
$p_i x_i$	$a \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{49}{10}$	$\mu = 4$

$$E(X) = 4 = a \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{49}{10} = \frac{a}{10} + \frac{53}{10}$$

$$a = \left(4 - \frac{53}{10}\right) \cdot 10 = -13\ francs$$

Le forain fait une perte de 13 francs avec le gros lot, celui-ci a donc coûté $13 + 10 = 23\ francs$

b)

$p_i x_i^2$	$\frac{169}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{343}{10}$	$\frac{520}{10} = 52$

$$V(X) = 52 - 4^2 = 36 \qquad \sigma = \sqrt{36} = 6\ francs$$

Exercice 13 :

$n = 20, p(7) = \frac{1}{36}, p(\bar{7}) = \frac{35}{36}$ donc $E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{36} = 0{,}56$

Exercice 14 :

$n = 24, p(bonne\ réponse) = \frac{1}{3}$ donc $E(X) = np = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8$, on peut espérer obtenir 8 bonnes réponses.

Exercice 15 :

a) la loi binomiale, $n = 11, p(pour\ une\ personne\ de\ sortir\ au\ 7e\ étage) = \frac{1}{15}$

b) $P(Y = 0) = B\left(0; 11; \frac{1}{15}\right) = C_0^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^0 \left(\frac{14}{15}\right)^{11} = 0{,}468 = 46{,}8\%$

$P(Y = 1) = B\left(1; 11; \frac{1}{15}\right) = C_1^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^1 \left(\frac{14}{15}\right)^{10} = 0{,}368 = 36{,}8\%$

$P(Y = 2) = B\left(2; 11; \frac{1}{15}\right) = C_2^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^2 \left(\frac{14}{15}\right)^9 = 0{,}131; 13{,}1\%$

c) $E(Y) = np = 11 \cdot \frac{1}{15} = \frac{11}{15} = 0{,}733$