

Analyse Série 9

Ne rien écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles à part !

Exercice 1 :

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.



- Sur quel domaine f est-elle croissante ?
- Quels sont les extremums de f ? (Préciser s'il s'agit de minimums ou de maximums)

Exercice 2 :

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f qui est continue sur son domaine et qui admet une limite infinie en -1 .

x		-2		-1		0		1		4	
$f'(x)$	+	+	+	/	-	/	+	0	-	0	+
$f(x)$		0		/		2		3		1	

- Compléter le tableau.
- Esquisser le graphe de f .
- Indiquer quels sont ses extremums.



Exercice 3 :

Étude de la fonction $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x-1}$

- Déterminer le domaine de la fonction f .
- Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction f .
- Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction f .
- Déterminer le tableau de signes de la fonction f .
- Déterminer si la fonction admet des asymptotes (**verticale & oblique**) avec justification (*par calculs et tableau de signes de δ*) pour le comportement de f autour de ces asymptotes et donner leurs équations.
- Calculer la dérivée de f , montrer que $f'(x) = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$
- Déterminer le domaine de définition de f' , les zéros de f' et le tableau de variation de f
- Représenter graphiquement la fonction à partir des points a) à g) au **Crayon**.



Exercice 4 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-4x}$

- Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x) = \frac{-8(x-2)}{x^2(x-4)^2}$
- Élaborer le tableau de variations de f et le tableau de signes de f
- Quelles sont les limites de f en 0^+ ? en 0^- ? en 4^+ ? en 4^- ?
- Calculer les limites de f en ∞
- A partir des résultats obtenus, tracer le graphique de f .

**Exercice 5 :**

Déterminer le domaine de définition pour calculer toutes les asymptotes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{3x^2-5x+3}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^3-1}{x}$

b) $f(x) = \frac{(x^2-4)}{3x^2}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

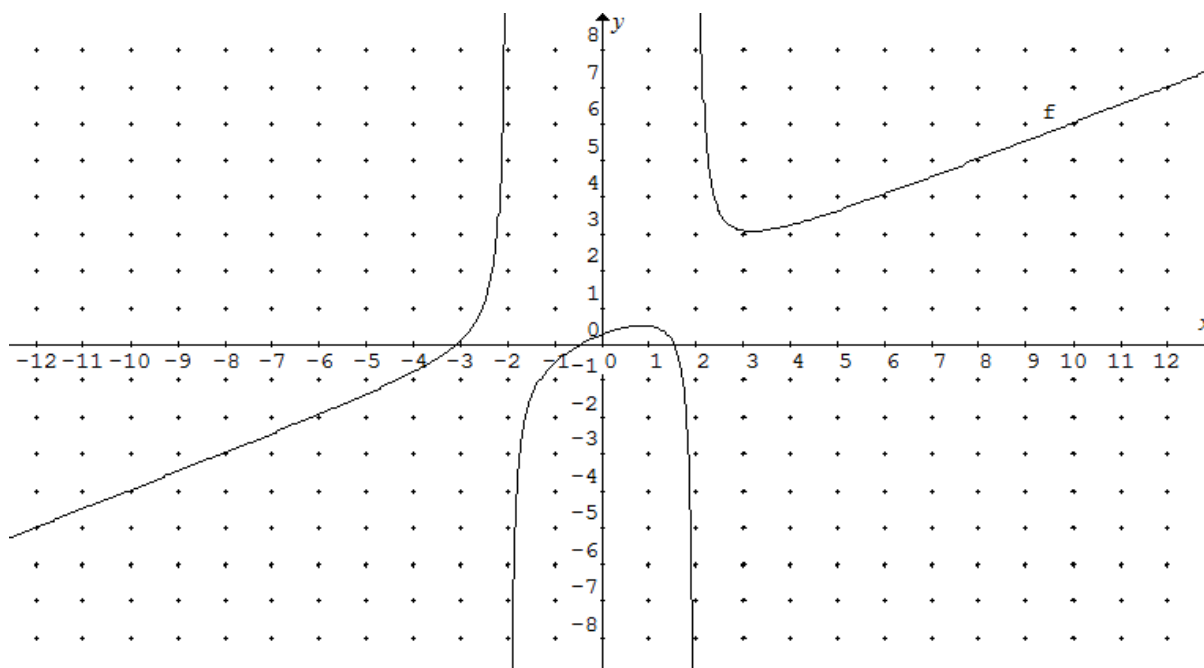
Exercice 6 :

Étudier la fonction $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{2(x^2-4x+3)}$ et la représenter graphiquement

$(D_f, Z_f, f(0), D_{f'}, Z_{f'}, \text{tableau de signes de } f, \text{tableau de variations de } f, AV, AO)$

Exercice 7 :

Retrouver le tableau des variations et les asymptotes de la fonction f représentée ci-dessous



Exercice 8 :

Etudier uniquement la courbure (convexité et concavité) de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

➤ **Plus d'exercices ? CRM ANALYSE n°30 p.114 ex 77**

Rappel : Une étude de fonction comprend les points suivants :

- a) Déterminer le domaine de la fonction f
- b) Déterminer le(s) zéro(s) de la fonction f
- c) Déterminer l'ordonnée à l'origine de la fonction f
- d) Déterminer le tableau de signes de la fonction f
- e) Déterminer si la fonction admet des asymptotes (**verticale & oblique**) avec justification (*par calculs et tableau de signes de δ*) pour le comportement de f autour de ces asymptotes et donner leurs équations.
- f) Calculer la dérivée de f , le domaine de définition de f' et les zéros de f'
- g) Déterminer le tableau de variation de f
- h) Représenter graphiquement la fonction à partir des points a) à g) au **Crayon**

Exercice 9 :

Etudier complètement la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Exercice 10 :

Etudier complètement la fonction $f(x) = \frac{3x^2-4x}{2(x-1)^2}$

On donne : $f'(x) = \frac{2-x}{(x-1)^3}$ et $f''(x) = \frac{2x-5}{(x-1)^4}$ (à vérifier)

Plus d'exercices ? Monographie n°25 de la CRM

p. 113 ex 69

Étude de fonction: p.116 ex 85

Solutions Analyse Série 9 :

Exercice 1 :

$$f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$$

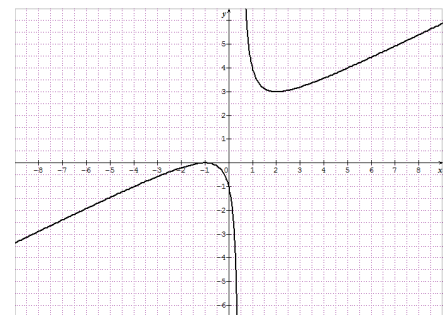
a) f est croissante sur le domaine : $] -\infty; -1] \cup [3; \infty[$

b) $(-1; 12)$ est un Maximum de f et $(3; -20)$ est un minimum de f

Exercice 3 :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, Z_f = \{-1\}, D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}, Z_{f'} = \{-1; 2\},$$

x		-1		1/2		2	
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 Max	$\searrow$	/	$\searrow$	2 min	$\nearrow$



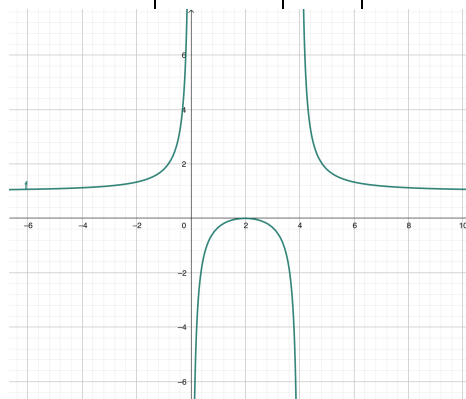
Exercice 4 :

$$D_f = D_{f'} = \mathbb{R}^* \setminus \{4\} \quad Z_f = \{2\}, Z_{f'} = \{2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

x		0		2		4	
$-8(x - 2)$	+	+	+	0	-	-	-
x^2	+	0	+	+	+	+	+
$(x - 4)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$f'(x)$		/	+	0	-	/	-
$f(x)$	$\nearrow$	AV	$\nearrow$	0 Max	$\searrow$	AV	$\searrow$



Exercice 5 :

- a) $y = 3x - 2$ et $x = 1$ c) $x = 0$
 b) $y = \frac{1}{3}$ et $x = 0$ d) pas d'asymptote

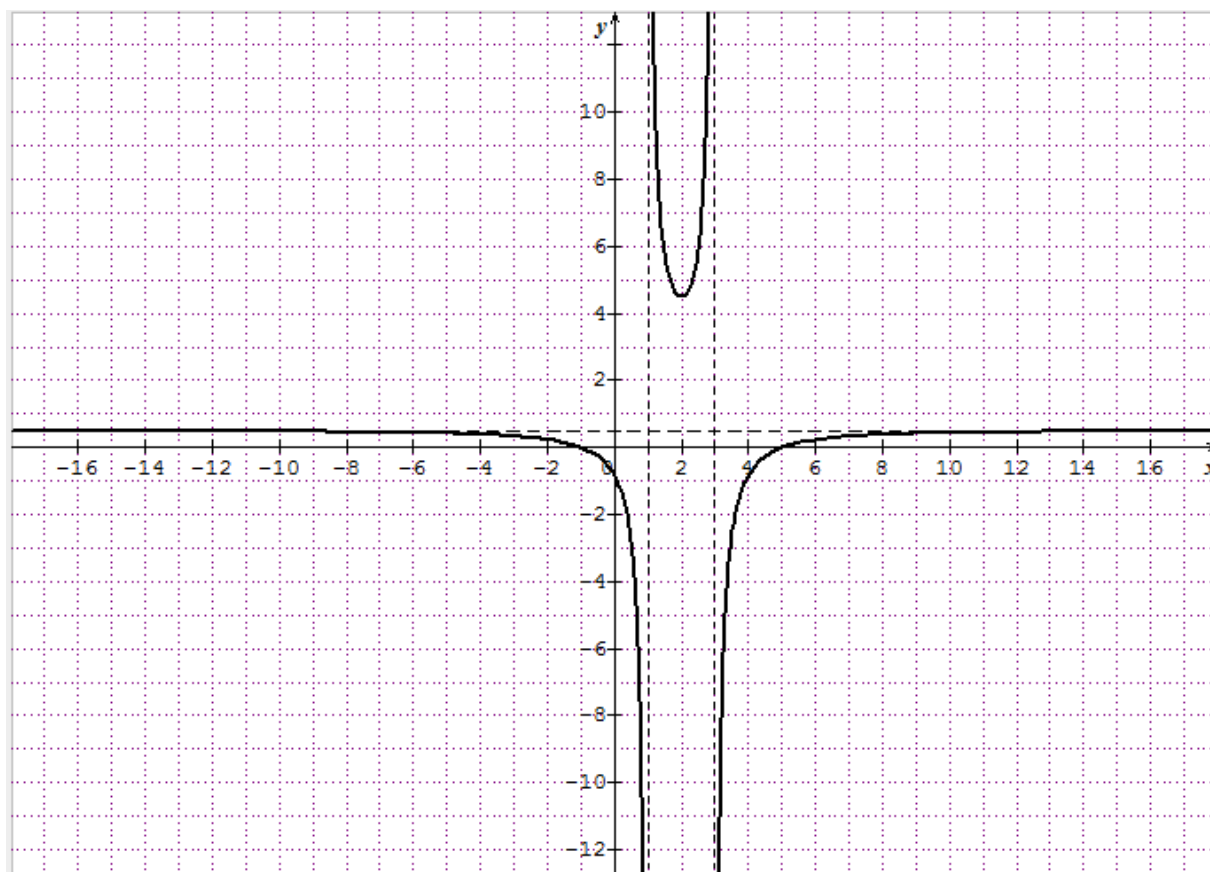
Exercice 6 :

$$f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{2(x-3)(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{8(x-2)}{(x^2-4x+3)^2}$$

x		-1		1		2		3		5	
$f'(x)$	-	-	-	/	-	0	+	/	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	AV	$\searrow$	4,5 min	$\nearrow$	AV	$\nearrow$	0	$\nearrow$

AH: $y = \frac{1}{2}$ AV: $x = 1$ et $x = 3$

**Exercice 7 :**

x		-3		-2		$-\frac{1}{2}$		1		$\frac{3}{2}$		2		3	
$f'(x)$	+	+	+		+	+	+	0	-	-	-		-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	AV	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ Max	$\searrow$	0	$\searrow$	AV	$\searrow$	3 Min	$\nearrow$

AO: $y = \frac{1}{2}x + 1$

Exercice 8 :

$$D_f = D_{f'} = D_{f''} = \mathbb{R}, Z_f = \emptyset, Z_{f''} = \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
f''(x)	+	0	-	0	+
f(x)	∪	$\frac{3}{4}$ PI	∩	$\frac{3}{4}$ PI	∪

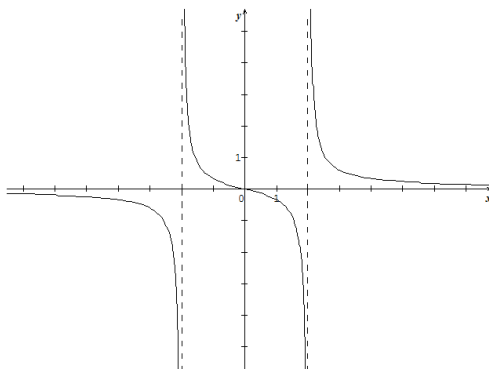
Exercice 9 :

$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$	$f'(x) = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$	$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	$D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$	$D_{f''} = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$
$Z_f = \{0\}$	$Z_{f'} = \emptyset$	$Z_{f''} = \{0\}$

AH: $y = 0$ AV: $x = -2$ et $x = 2$

x		-2		0		2	
f'(x)	-		-	-	-		-
f(x)	↘	AV	↘	0	↘	AV	↘

x		-2		0		2	
f''(x)	-		+	0	-		+
f(x)	∩		∪	0 PI	∩		∪

**Exercice 10 :**

x		0		1		$\frac{4}{3}$		2	
f'(x)	-	-	-		+	+	+	0	-
f(x)	↘	0	↘		↗	0	↗	2 Max	↘

x		0		1		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{2}$	
f''(x)	-	-	-		-	-	-	0	+
f(x)	∩	0	∩		∩	0	∩	$\frac{35}{18}$ PI	∪

AV: $x = 1$ AH: $y = \frac{3}{2}$

