

Analyse Série 1 :

⚠ Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

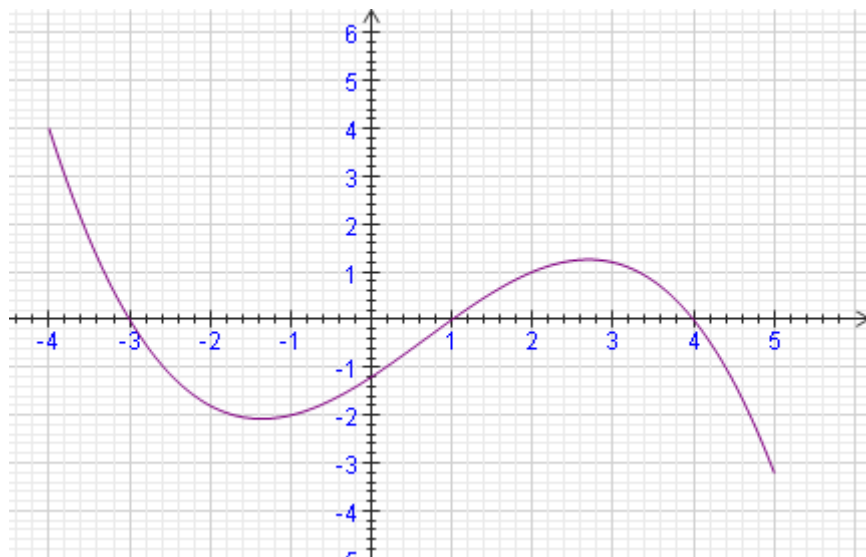
Toutes les solutions sont en fin de série. ❤

💡 Pour réviser avant une épreuve, il faut refaire les exercices et pas relire des corrections sur l'énoncé. Si vous ne prenez pas le temps de refaire des exercices, vous n'arriverez pas à vous poser toutes les questions nécessaires. Vous risquez d'oublier comment résoudre des blocages.

Se retrouver face à une feuille blanche et réfléchir à la notation, à la question, à la mise en page, etc. est nécessaire pour assimiler toutes les notions du chapitre. La répétition est un élément clé !

Exercice 1 : En observant le graphique ci-dessous, déterminer le plus précisément possible :

- 1) L'image de 2 par f
- 2) $f(-1)$
- 3) La source ou le domaine de définition de f
- 4) Un nombre dont l'image de f est 1
- 5) Les préimages de 1 par f
- 6) $f(0)$
- 7) Les zéros de f
- 8) Tous les nombres qui ont une image positive
- 9) Tous les nombres dont l'image est supérieure à 2
- 10) Les signes de f



Exercice 2 : Répondre aux questions pour les deux fonctions suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - x - 2 \end{cases}$$

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2(2x - 1) \end{cases}$$

- 1) Représenter f et g sur un même graphique.
- 2) Calculer les zéros de f et g .
- 3) Quel est le sommet de la parabole f (Justifier par calcul).
- 4) Calculer les préimages de 10 par f et par g .
- 5) Calculer $f \cap g$.



Exercice 3 : Déterminer le domaine de définition (la plus grande source possible) des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{3-x} \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4 \quad h(x) = \sqrt{x+3}$$

Pouvez-vous imaginer une fonction qui aurait comme domaine : $D_f = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$?

Exercice 4 :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x - 4, & \text{si } x < -2 \\ 2 - x^2, & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Représentez graphiquement la fonction f .
- 2) Calculez les zéros de f .
- 3) Elaborez le tableau des signes de f .

Exercice 5 : On considère des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

- 1) Pour chacune des paires de fonctions, effectuez les opérations : $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$ | d) $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 1 - x$ |
| b) $f(x) = -2x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$ | e) $f(x) = -x^3$ et $g(x) = x^3 + 1$ |
| c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $g(x) = x + 3$ | f) $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = 2x - 1$ |

- 2) Décomposez les fonctions : (*astuce : faire comme à la calculatrice*) suivantes en $f(x)$ et $g(x)$ sans utiliser la fonction identité.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(g \circ f)(x) = 2x - 6$ | e) $(g \circ f)(x) = -2x^2$ |
| b) $(g \circ f)(x) = 2(x - 3)$ | f) $(g \circ f)(x) = -2(x + 1)^2$ |
| c) $(g \circ f)(x) = (x - 2)^2$ | g) $(g \circ f)(x) = (x + 2)^2 + 1$ |
| d) $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$ | h) $(g \circ f)(x) = (x - 2)^2 - 3$ |

Exercice 6 :

Effectuez les 16 compositions possibles à l'aide des 4 applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous :

$$f(x) = x - 4$$

$$g(x) = 6x - 10$$

$$h(x) = x^2 - 4$$

$$m(x) = \frac{3x - 2}{6}$$

Exercice 7 :

- a) Soient $f: x \mapsto 2x - 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $g: x \mapsto -3x + 2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h: x \mapsto 5x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer $f \circ (g \circ h)$, puis $(f \circ g) \circ h$.

- b) Même question avec :

$$f: x \mapsto 2x - 1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}; g: x \mapsto x^2 - 1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } h: x \mapsto \frac{x+1}{x} \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}$$

- c) Que constate-t-on ?



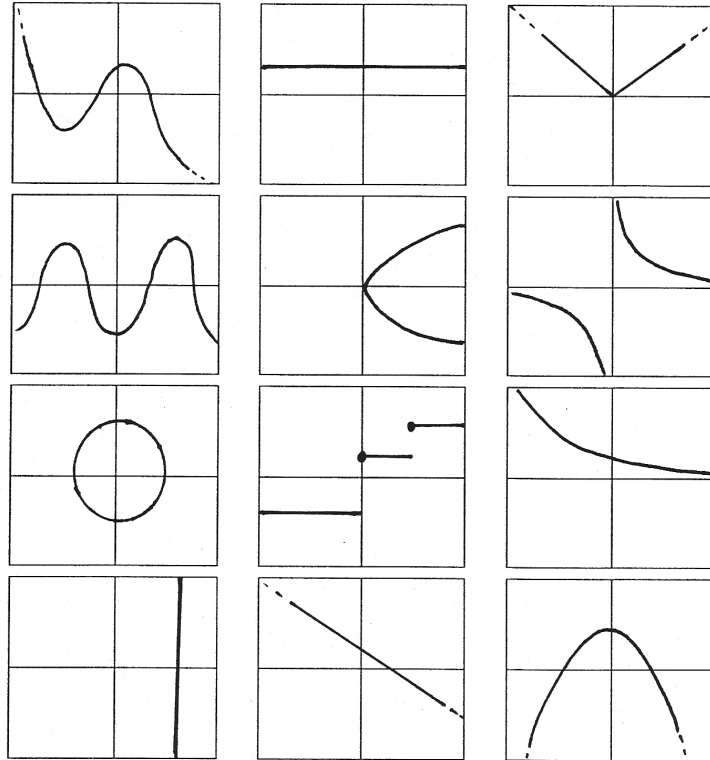
Exercice 8 :

- 1) Déterminer si les graphiques ci-dessous représentent des **fonctions**, des **injections***, des **surjections*** ou des **bijections** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifiez les réponses.



Question bonus :

Pour les fonctions,
connaissiez-vous leur équation ?



- 2*) Déterminez **par calcul** si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives :

a) $f: x \mapsto 3x + 5$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

e) $f: x \mapsto -3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

b) $f: x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

f) $f: x \mapsto 2x^2 + 1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

c) $f: x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$

g) $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x-1}$ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

d) $f: x \mapsto \frac{2}{1-x}$ de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

h) $f: x \mapsto \frac{10}{x^2+10}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Plus d'exercices ?

Dans le livre Notions élémentaires ou... essayez d'en imaginer !

Corrigé Analyse Série 1

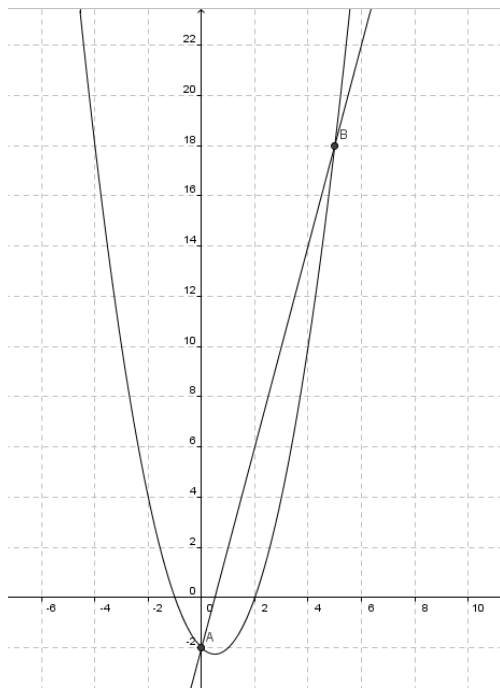
Exercice 1 :

- 1) $f(2) = 1$
- 2) $f(-1) = -2$
- 3) $D = [-4; 5]$
- 4) $f(x) = 1 \quad x \in \{-3, 3; 2; 3, 4\}$
- 5) $f^{-1}(1) = \{-3, 3; 2; 3, 4\}$
- 6) $f(0) = -1, 2$
- 7) $Z_f = \{-3; 1; 4\}$
- 8) $f > 0$ si $x \in [-4; -3[\cup]1; 4[$
- 9) $f > 2$ si $x \in [-4; -3, 6[$

x	$[-4; -3[$	-3	$] - 3; 1[$	1	$]1; 4[$	4	$]4; 5]$
f	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Exercice 2 :

1)



$$2) Z_f = \{-1; 2\} \quad Z_g = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$3) \text{ Sommet : } -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \quad \text{ou moyenne entre les zéros : } \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{4} \quad \text{le sommet est donc : } S\left(\frac{1}{2}; \frac{-9}{4}\right)$$

4) Résoudre $f(x) = 10$

$$x^2 - x - 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{soit } x = -3 \text{ soit } x = 4$$

$$\text{donc } f(-3) = f(4) = 10 \text{ donc } f^{-1}(10) = \{-3; 4\}$$

résoudre $g(x) = 10$

$$2(2x-1) = 10 \Leftrightarrow 2x-1 = 5 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{donc } g(3) = 10 \text{ donc } g^{-1}(10) = 3$$

5) Résoudre $f(x) = g(x)$

$$x^2 - x - 2 = 2(2x-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x-5) = 0 \Leftrightarrow \text{soit } x = 0 \text{ soit } x = 5$$

$$f(0) = g(0) = -2 \text{ donc } A(0; -2)$$

$$\text{et } g(5) = f(5) = 18 \text{ donc } B(5; 18)$$

$$\text{ainsi: } f \cap g = \{(0; -2); (5; 18)\}$$

Exercice 3 :

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$D_g = \mathbb{R}$

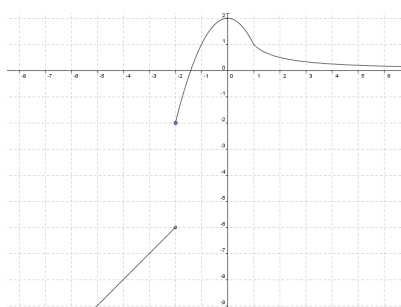
$D_h = [-3; +\infty[$

Exercice 4 :

1)

2) $Z_f = \{-\sqrt{2}\}$

x		$-\sqrt{2}$	
f	-	0	+



Exercice 5 :

$f(x)$	$g(x)$	$(f + g)(x)$	$(f \cdot g)(x)$	$(f \circ g)(x)$	$(g \circ f)(x)$
$2x + 3$	x^2	$x^2 + 2x + 3$	$x^2(2x + 3)$	$2x^2 + 3$	$(2x + 3)^2$
$-2x^2$	$\frac{1}{2}x + 3$	$-2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$	$-2x^2\left(\frac{1}{2}x + 3\right)$	$-2\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2$	$-x^2 + 3$
$\sqrt{x^2 + 1}$	$x + 3$	$\sqrt{x^2 + 1} + x + 3$	$\sqrt{x^2 + 1}(x + 3)$	$\sqrt{x^2 + 6x + 10}$	$\sqrt{x^2 + 1} + 3$
$x^2 + x$	$1 - x$	$x^2 + 1$	$(x^2 + x)(1 - x)$	$(1 - x)(2 - x)$	$-x^2 - x + 1$
$-x^3$	$x^3 + 1$	1	$-x^3(x^3 + 1)$	$-(x^3 + 1)^3$	$-x^9 + 1$
$-x^2 + 1$	$2x - 1$	$-x^2 + 2x$	$(-x^2 + 1)(2x - 1)$	$-4x^2 + 4x$	$-2x^2 + 1$

$(g \circ f)(x)$	$f(x)$	$g(x)$	Vérification : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$2x - 6$	$2x$	$x - 6$	$g(2x) = 2x - 6$
$2(x - 3)$	$x - 3$	$2x$	$g(x - 3) = 2(x - 3)$
$(x - 2)^2$	$x - 2$	x^2	$g(x - 2) = (x - 2)^2$
$x^2 - 2$	x^2	$x - 2$	$g(x^2) = x^2 - 2$
$-2x^2$	x^2	$-2x$	$g(x^2) = -2x^2$
$-2(x + 1)^2$	$x + 1$	$-2x^2$	$g(x + 1) = -2(x + 1)^2$
$(x + 2)^2 + 1$	$x + 2$	$x^2 + 1$	$g(x + 2) = (x + 2)^2 + 1$
$(x - 2)^2 - 3$	$x - 2$	$x^2 - 3$	$g(x - 2) = (x - 2)^2 - 3$

Exercice 6 : (les résultats sont à simplifier au maximum, voir factoriser si possible)

	$f(x) = x - 4$	$g(x) = 6x - 10$	$h(x) = x^2 - 4$	$m(x) = \frac{3x - 2}{6}$
$f(x)$	$(f \circ f)(x) = x - 8$	$(f \circ g)(x) = 6x - 14$	$x^2 - 8$	$\frac{3x - 26}{6}$
$g(x)$	$(g \circ f)(x) = 6x - 34$	$36x - 70$	$6(x^2 - 4) - 10$	$6\left(\frac{3x - 2}{6}\right) - 10$
$h(x)$	$(x - 4)^2 - 4$	$(6x - 10)^2 - 4$	$(x^2 - 4)^2 - 4$	$6 \cdot \left(\frac{3x - 2}{6}\right)^2 - 4$
$m(x)$	$\frac{3(x - 4) - 2}{6}$	$\frac{3(6x - 10) - 2}{6}$	$\frac{3(x^2 - 4) - 2}{6}$	$\frac{3\left(\frac{3x - 2}{6}\right) - 2}{6}$

Exercice 7 :

- a) $(f \circ (g \circ h))(x) = -30x + 3$ $((f \circ g) \circ h)(x) = -30x + 3$
b) $(f \circ (g \circ h))(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2}{x^2}$ $((f \circ g) \circ h)(x) = \frac{-x^2 + 4x + 2}{x^2}$
c) la composition est associative

Exercice 8 :

- 1) Numérotation des graphiques de 1 à 12.

Injectif	Surjectif	Bijectif	Rien
6, 9, 11	1, 11	11	2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12

- 2)

Injectif	Surjectif	Bijectif	Rien
a, g, d	a, c, g	a, g,	b, e, f, h