Exponentielles et logarithmes

$$a^{-y} = \frac{1}{a^y}$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

Méthode de travail

Pour réviser, il ne faut pas négliger la théorie !

Elle est remplie d'exemples pour comprendre les définitions!

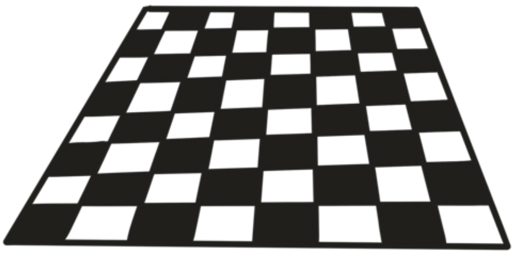
Introduction :

Commençons par une petite histoire :

Une légende indienne, datant d'environ 3000 ans avant Jésus Christ, raconte qu'un roi voulu récompenser un sage nommé Sissa.

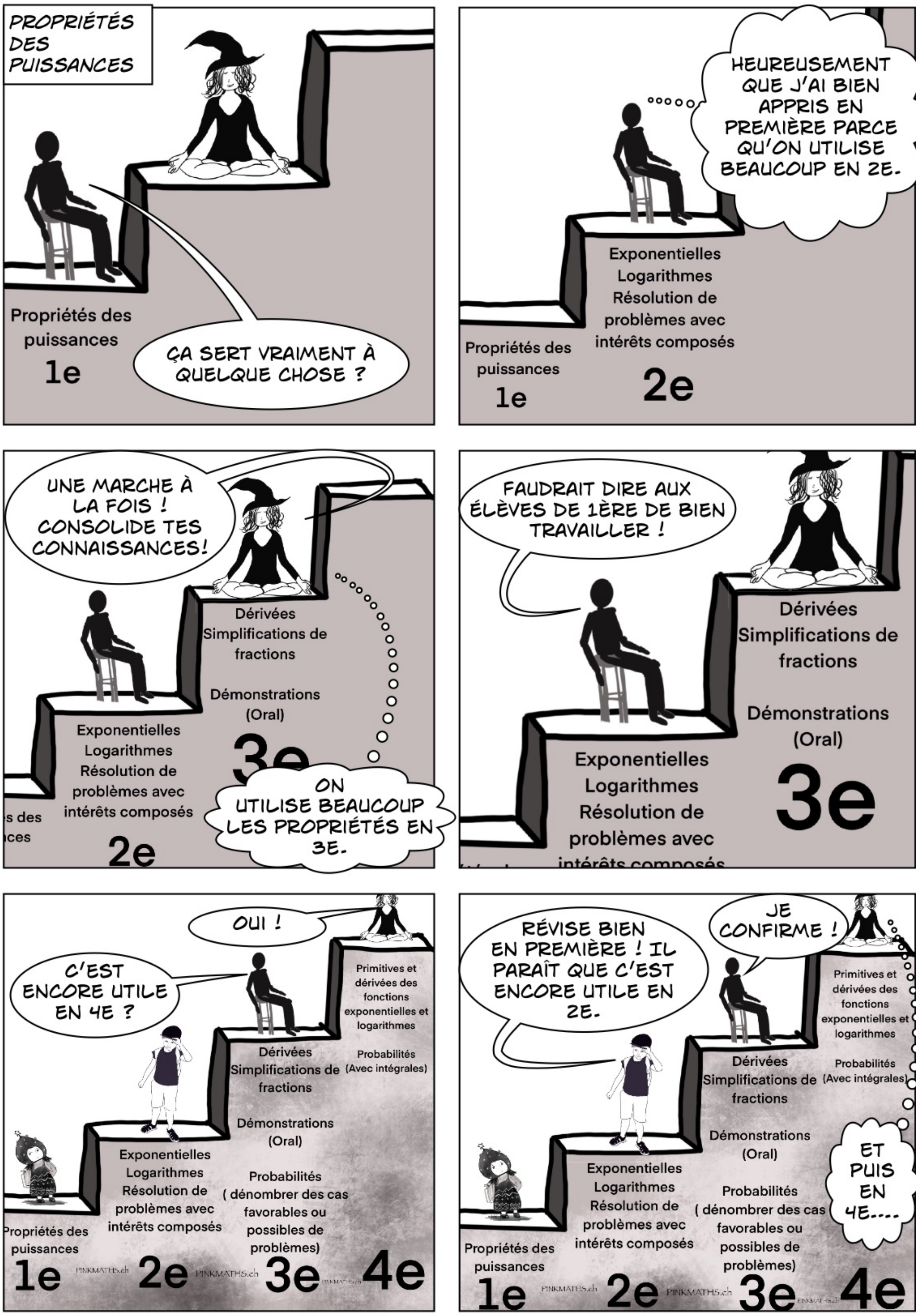
Le sage aurait demandé au roi une quantité de riz de la manière suivante : déposer un grain de riz sur la première case d'un échiquier, puis deux grains sur la deuxième case, ensuite quatre sur la troisième, etc. La règle était donc de doubler la quantité à chaque case.

Le roi, qui pensait faire une affaire, se trouva vite ruiné car il avait accepté le marché sans demander à son conseiller !



*« La pandémie de Covid 19 met à la une des médias la virologie, mais aussi les mathématiques. La **croissance exponentielle** du nombre de cas d'infection est ce qui rend la situation si préoccupante : le nombre de personnes infectées double toujours après la même période, environ 3 jours dans le cas de la France. »*

La **fonction exponentielle** est très souvent mentionnée dans le contexte du coronavirus (de propagation de virus en général), en économie ou en étude de population (géographie).
C'est une fonction que nous allons étudier plusieurs fois dans le cours de mathématiques. Vous retrouverez cette fonction dans le chapitre des probabilités en 4e année.
Cette fonction nécessite quelques révisions des propriétés des puissances avant d'être présentée.


PROPRIÉTÉS DES PUISSANCES
Propriétés des puissances
1e
ÇA SERT VRAIMENT À QUELQUE CHOSE ?
HEUREUSEMENT QUE J'AI BIEN APPRIS EN PREMIÈRE PARCE QU'ON UTILISE BEAUCOUP EN 2E.
Exponentielles Logarithmes Résolution de problèmes avec intérêts composés
2e
Propriétés des puissances
1e
UNE MARCHE À LA FOIS ! CONSOLIDE TES CONNAISSANCES!
Dérivées Simplifications de fractions
Démonstrations (Oral)
3e
Exponentielles Logarithmes Résolution de problèmes avec intérêts composés
2e
ON UTILISE BEAUCOUP LES PROPRIÉTÉS EN 3E.
FAUDRAIT DIRE AUX ÉLÈVES DE 1ÈRE DE BIEN TRAVAILLER !
Dérivées Simplifications de fractions
Démonstrations (Oral)
3e
Exponentielles Logarithmes Résolution de problèmes avec intérêts composés
C'EST ENCORE UTILE EN 4E ?
OUI !
Primitives et dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes
Probabilités (Avec intégrales)
Dérivées Simplifications de fractions
Démonstrations (Oral)
Probabilités (dénombrer des cas favorables ou possibles de problèmes)
Exponentielles Logarithmes Résolution de problèmes avec intérêts composés
Propriétés des puissances
1e 2e 3e 4e
PINKMATHS.ch
RÉVISE BIEN EN PREMIÈRE ! IL PARAÎT QUE C'EST ENCORE UTILE EN 2E.
JE CONFIRME !
ET PUIS EN 4E....
Primitives et dérivées des fonctions exponentielles et logarithmes
Probabilités (Avec intégrales)
Dérivées Simplifications de fractions
Démonstrations (Oral)
Probabilités (dénombrer des cas favorables ou possibles de problèmes)
Exponentielles Logarithmes Résolution de problèmes avec intérêts composés
Propriétés des puissances
1e 2e 3e 4e
PINKMATHS.ch

1. Puissances et exposants fractionnaires

Définitions : Soit a un nombre réel. Soit n un entier naturel, $n > 0$.
$\boldsymbol{a}$ **puissance** $\boldsymbol{n}$, noté a^n, est égal au produit de a par lui-même n fois :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ fois}$$

a s'appelle la **base** et n s'appelle l'**exposant**.

Soient a et b deux nombres réels quelconques. Soient m et n deux entiers naturels.

Propriété 1 : $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

En effet, si l'on multiplie a par lui-même m fois, puis par lui-même n fois, cela revient à le multiplier $(m+n)$ fois par lui-même.

Exemple : $3^4 \cdot 3^2 =$ $\qquad =$

Propriété 2 : $[a^m]^n = a^{m \cdot n}$

En effet, si l'on multiplie a par lui-même m fois, et cela n fois, cela revient à le multiplier $(m \cdot n)$ fois par lui-même.

Exemple : $(6^5)^7 =$ $\qquad =$

Propriété 3 : Si $a \neq 0$: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

En effet, il est possible de simplifier la fraction puisqu'il s'agit de produits de nombres identiques au numérateur et au dénominateur. Il en reste finalement $(m-n)$.

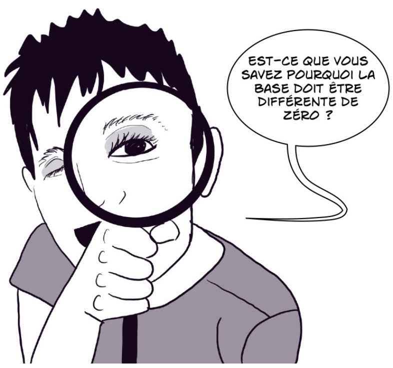
De plus, il est nécessaire que a soit différent de 0 pour éviter une division par 0.

Exemple : $\frac{12^9}{12^6} =$ $\qquad =$

Propriété 4 : Si $a \neq 0$: $a^0 = 1$

Car d'une part $\frac{a^n}{a^n} = 1$, et d'autre part $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ (selon la propriété 3)

Exemple : $3{,}456^0 =$



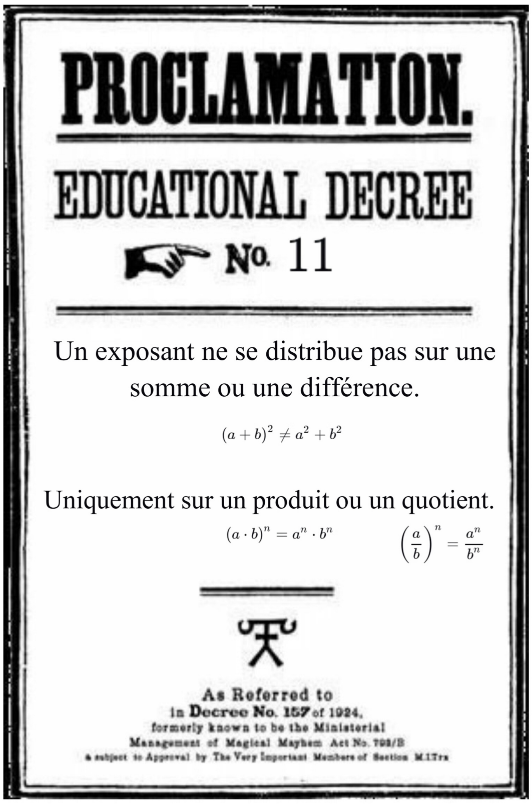
Propriété 5 : Si $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

En effet : $\frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$ (selon les propriétés 3 et 5)

Exemple : $10^{-7} =$ $\qquad =$

Propriété 6 : $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemple : $(6 \cdot 8)^5 =$



Propriété 7 : Si $b \neq 0$: $\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemple : $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \qquad =$

Rappel :
La **racine** $\boldsymbol{n - ième}$ d'un nombre a est le nombre x qui, multiplié n fois par lui-même, est égal au nombre a :
$x = \sqrt[n]{a} \leftrightarrow x^n = a$

Exemple :

Propriété 8 : Si $a > 0$ et si $n \neq 0$: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Exemples : $9^{1/2} = \qquad =$

$32^{1/5} = \qquad =$

Propriété 9 : Si $a > 0$ et si m$\neq 0$: $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$

Exemple : $8^{2/3} = \qquad = \qquad =$

Propriété 10 : Si $a > 0$ et si $n \neq 0$: $\left(\frac{1}{a}\right)^{-m/n} = a^{m/n}$

Exemple : $\left(\frac{1}{32}\right)^{-2/5} =$

➢ ***EL Série 1***

2. Etude de fonctions exponentielles et logarithmiques

2.0 Rappels :

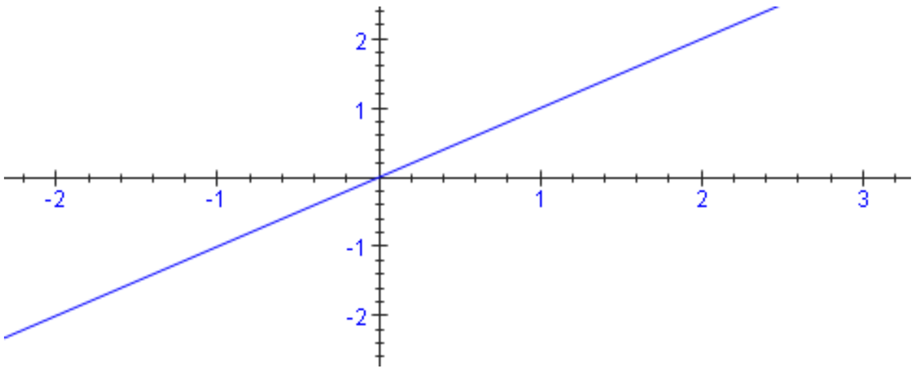
Définition :

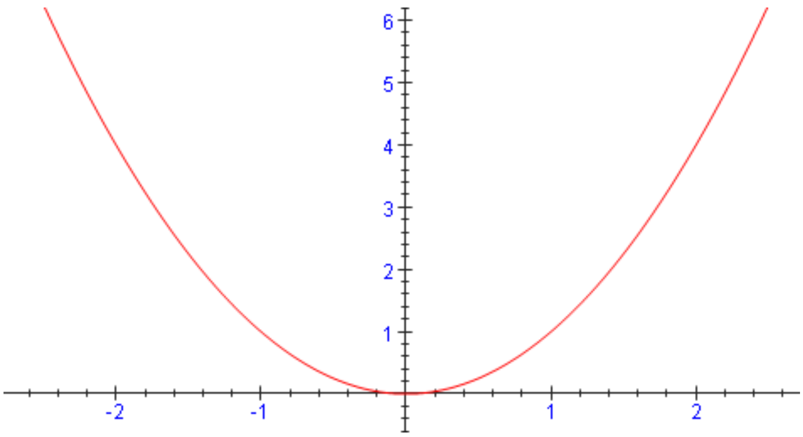
On appelle **application puissance $\boldsymbol{n}$** l'application suivante : $P_n: x \mapsto x^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Dans ces applications, la puissance (l'exposant) reste constante et c'est la valeur de la base qui varie.

Vous connaissez bien les applications $\boldsymbol{P_1: x \mapsto x^1}$ (droite linéaire) et $\boldsymbol{P_2: x \mapsto x^2}$ (parabole).

Pour rappel, voici les représentations graphiques de ces deux applications :

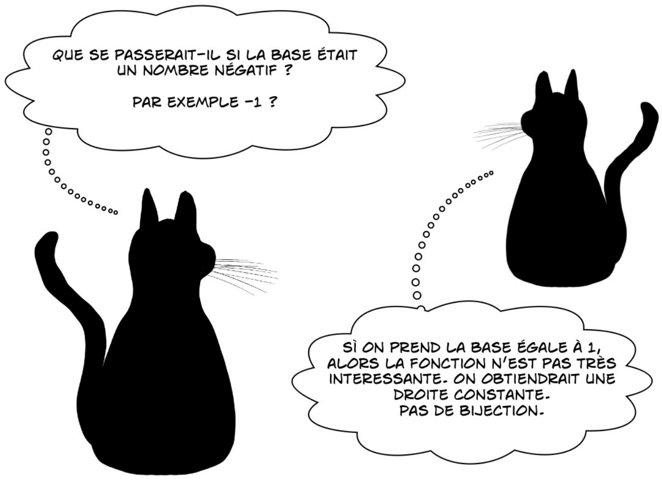




2.1 Les applications exponentielles

Nous avons vu que l'on pouvait donner un sens à l'expression a^b lorsque b est un nombre rationnel et a un nombre strictement positif.

Il est donc possible de définir une application F_a de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout nombre rationnel x fera correspondre a^x (où a est une constante strictement positive, différente de $+1$) :



$$\boxed{\boldsymbol{F_a(x) = a^x \ \ de\ \mathbb{Q}\ dans\ \mathbb{R}_+^*}}$$

Contrairement à l'application P_a, **la variable est ici l'exposant** et non la base**.**

Nous allons étudier cette application F_a. Pour la représenter graphiquement, nous allons calculer des images. Il nous faut pour cela choisir une valeur de la base a. Nous prendrons à titre d'exemples $a = 2$.

Nous avons donc : $F_2(x) = 2^x$

Exemple de calculs d'images : avec $x = 1$, on a : $F_2(1) = 2^1 = 2$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{P_2(x) = x^2}$	$\boldsymbol{F_2(x) = 2^x}$
-2	$(-2)^2 = 4$	$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Vous savez ce que signifie 2^x quand x est un **nombre rationnel** $\left(x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}\right)$

Mais que signifie 2^x quand x est un **nombre irrationnel** (= un nombre réel non rationnel) ?

Exemple : A l'aide d'une calculatrice, complétez les approximations suivantes avec le maximum de précision :

Rappel : $\sqrt{2} \cong 1{,}41421356$

$2^{1,414} \cong$	$2^{1,415} \cong$
$2^{1,4142} \cong$	$2^{1,4143} \cong$
$2^{1,41421} \cong$	$2^{1,41422} \cong$
$2^{1,414213} \cong$	$2^{1,414214} \cong$

$\mathbf{2^{\sqrt{2}}} \cong$

Rappel : $\pi \cong 3{,}14159265$

$2^{3,14} \cong$	$2^{3,15} \cong$
$2^{3,141} \cong$	$2^{3,142} \cong$
$2^{3,1415} \cong$	$2^{3,1416} \cong$

$\mathbf{2^{\pi}} \cong$

Cet exercice devrait vous convaincre qu'on peut définir la valeur de 2^x quand x est un nombre irrationnel, par encadrement de plus en plus précis de x par deux nombres rationnels.

2^x est le nombre réel qui satisfait :

$$\text{Si } \frac{n}{m} < x < \frac{p}{q}, \text{ alors } 2^{\frac{n}{m}} < 2^x < 2^{\frac{p}{q}}$$

Définitions :

L'application $\mathbf{exp_2} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ \boldsymbol{x} \mapsto \mathbf{2}^{\boldsymbol{x}} \end{cases}$ est appelée fonction exponentielle en base 2.

Et $\mathbf{exp_{1/2}} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ \boldsymbol{x} \mapsto \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{x}} \end{cases}$ est appelée fonction exponentielle en base $\frac{1}{2}$.

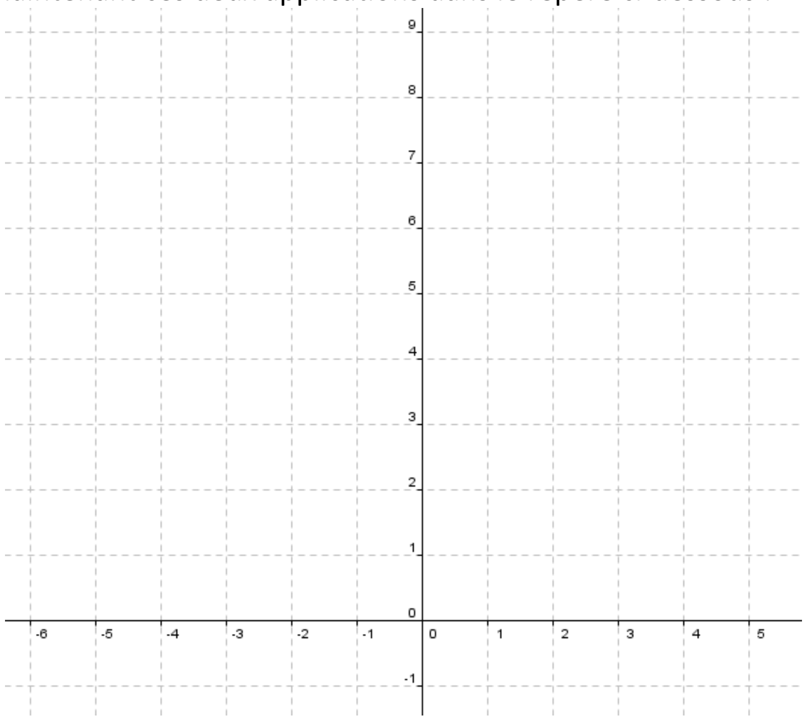
Contrairement à l'application P_a, la variable est ici l'exposant et non la base.
Nous allons représenter graphiquement cette application $\exp_2(x)$ en calculant des images.

Calculons pour commencer quelques images :

x		-2	-1	0	1	2	3	4	
$exp_2(x)$					2				
$exp_{0,5}(x)$									

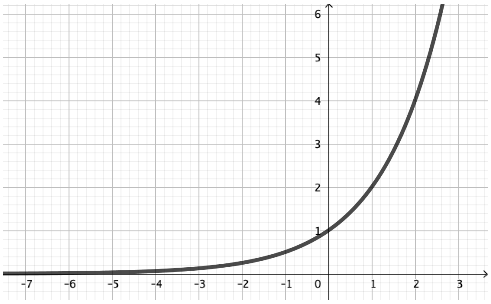
Exemple : $exp_2(x) = 2^x$ avec $x = 1$, on a : $exp_2(1) = 2^1 = 2$

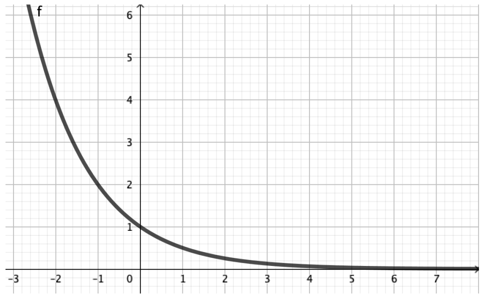
Représentons maintenant ces deux applications dans le repère ci-dessous :



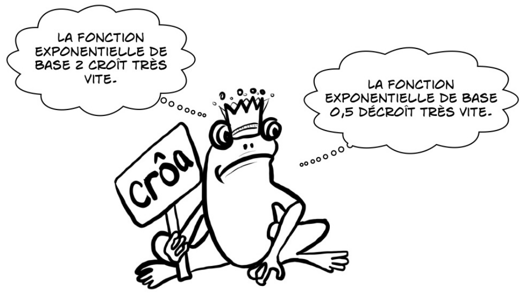
Faire des observations sur les deux graphiques.

Représentation graphique de exp_2 **et $exp_{1/2}$:**

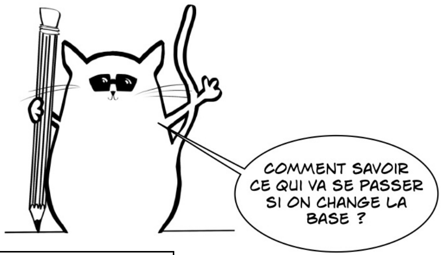




Remarques :



- On constate sur le graphique que cette application est définie pour tout nombre réel, mais que ses images sont toujours strictement positives, d'où les ensembles de définition.
- Contrairement à l'application « puissance », l'application « exponentielle » fait varier l'exposant et conserve la base constante.
- Les applications exponentielles possèdent une asymptote horizontale en $y = 0$.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



Nous pouvons maintenant définir de façon générale :

Définition : Soit a un nombre réel strictement positif et différent de +1. On appelle **application exponentielle de base a**, notée exp_a : $exp_a(x) = a^x \ de \ \mathbb{R} \ dans \ \mathbb{R}_+^*$

Il faut expliquer pourquoi on exige que la base soit strictement positive et différente de +1 :

1)

2)

3)

2.2 Propriétés des applications exponentielles

Toutes les applications exponentielles possèdent un certain nombre de propriétés communes. C'est par **la valeur de la base $\boldsymbol{a}$** que l'on distingue deux applications exponentielles.

Propriété 1 de $\boldsymbol{exp_a(x)}$:

$$\exp_a(0) = 1$$

Propriété 2 de $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$:

Les courbes représentant exp_a et $exp_{1/a}$ sont toujours symétriques par rapport à l'axe Oy, quelle que soit la valeur de la base a.

Illustration :

Propriété 3 de $\mathbf{exp}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$:

Si a est plus grand que 1, la courbe est croissante et si a est compris entre 0 et 1, la courbe est décroissante.

Illustration :

Propriété 4 de $\mathbf{exp}_{a}(x)$:

Dans tous les cas, l'exponentielle possède une asymptote horizontale : $y = 0$.

Illustration :

Propriété 5 de $\mathbf{exp}_{a}(x)$:

La fonction $\exp_a(x)$ est bijective.
Cette dernière propriété permet de définir l'application réciproque de $\exp_a$.

Illustration :

De plus, on a aussi :

Propriétés des puissances (CRM p.13)	**Propriétés de $\exp_a(x) = a^x$**	**Exemples**
$\forall x \in \mathbb{R}, a^x > 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a(x) > 0$	
$a^0 = 1$	$\exp_a(0) =$	
$a^1 = a$	$\exp_a(1) =$	
$a^{x+y} =$	$\exp_a(x+y) =$	
$a^{-y} = \frac{1}{a^y}$	$\exp_a(-y) =$	
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$\exp_a(x-y) =$	
$(a^x)^p = a^{xp}$	$(\exp_a(x))^p =$	
$(a^x)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a^x}$	$(\exp_a(x))^{1/p} =$	

2.3 Le nombre e

Tout comme le nombre π, le nombre e est un nombre important dans les mathématiques. Ce nombre vaut environ 2,71828182 … Il est irrationnel et ne peut donc pas être mis sous forme de fraction. Son écriture décimale n'est ni finie, ni périodique.

Il est possible de trouver une approximation de ce nombre e à l'aide de la formule suivante :

$$\boxed{e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots}$$

Où on définit $\boldsymbol{n}$ **factoriel** comme : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

2.4 Les exponentielles de base 10 et de base $\boldsymbol{e}$:

Deux exponentielles sont plus couramment utilisées dans la pratique :

- L'exponentielle de base 10 : $\exp_{10}(x) = 10^x$
- L'exponentielle de base e : $\exp_e(x) = e^x$

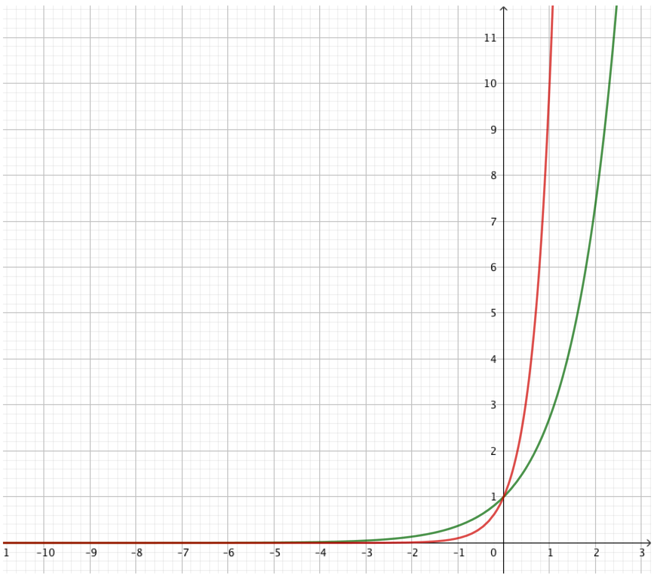
On trouve une touche spéciale sur la calculatrice pour ces deux fonctions.

Exemples :

$10^{4,272} =$ $\qquad$ $e^{2,5} =$

$10^{-0,45} =$ $\qquad$ $e^{-7,24} =$

$e^{0,4} =$ $\qquad$ $e =$



2.5 Équation exponentielles

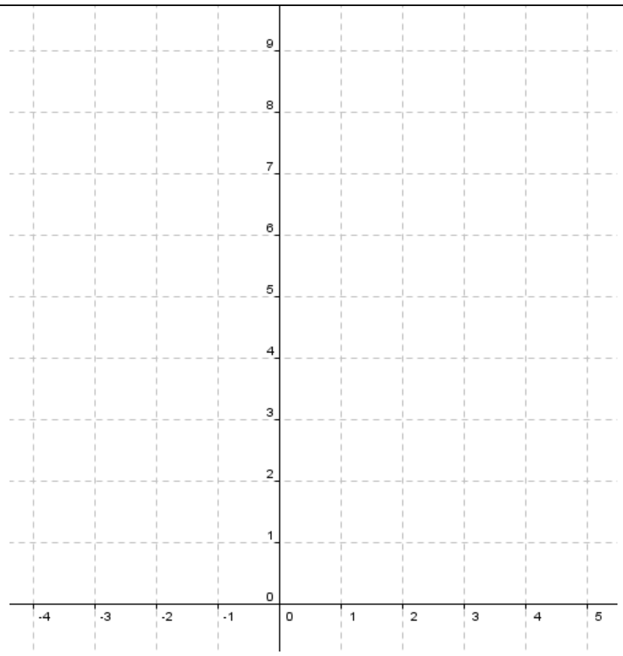
2.5.1 Résolution graphique d'équations exponentielles

On appelle équation exponentielle toute équation dans laquelle figure une ou plusieurs expressions exponentielles. Une manière relativement simple de résoudre ce genre d'équation consiste à représenter graphiquement les applications concernées et à lire le résultat sur le graphique. Cependant, cette méthode ne donne qu'une approximation plus ou moins bonne de la solution.

Exemple : Résoudre graphiquement l'équation : $\mathbf{2^{x-1} = 3 - x}$

Il faut noter que l'on ne sait pas résoudre une équation de ce type par des méthodes algébriques.

x	
2^{x-1}	
$3-x$	



Sur le graphique, on regarde à l'intersection des deux applications la valeur de la solution sur l'axe Ox. En effet, seule la ou les valeurs de la préimage x nous intéressent !
Solution graphique : $\boldsymbol{S} = \{ \qquad \}$.

Il n'est en général pas possible d'obtenir une très bonne précision avec ce type de résolution. On peut cependant raffiner la recherche au voisinage de la solution trouvée graphiquement à l'aide de la calculatrice.

➢ ***EL Série 2 ex 3***

2.5.2 Résolution algébriques d'équations exponentielles

Forme : Equations de la forme $a^u = a^v$ (la base est la même dans les deux membres)
L'exponentielle étant une bijection, on en retire que $u = v$.

Exemples :

a) $7^{2x} = 7^{3x+2}$

b) $4^{2x-1} = 2^{5x-2}$

c) $3^x = \frac{1}{9^x}$

Méthode :
1) Faire apparaître la forme $a^u = a^v$
2) Egaliser les exposants : $u = v$
3) Résoudre l'équation.
4) Donner l'ensemble solution

- ***Notions élémentaires, p.116 ex 13***
- ***ELS2 ex 4***

3. Etude de fonctions logarithmiques

3.1 Définition

On sait maintenant calculer des exponentielles. Mais on peut se poser une autre question : quelle puissance faut-il élever un nombre a pour obtenir un nombre b donné ?

> **Exemple :** *A quelle puissance faut-il élever* 2 *pour obtenir* 1024 *?*
> *Ou si l'on préfère un langage plus mathématique : que vaut* x *dans l'équation* $2^x = 1024$ *?*
>
> *Pour des valeurs bien choisies, on peut deviner la solution. Cependant, dans la plupart des cas, il nous faudra recourir à une méthode plus compliquée.*
> *Ce nombre* x *est appelé le logarithme en base 2 de 1024.*

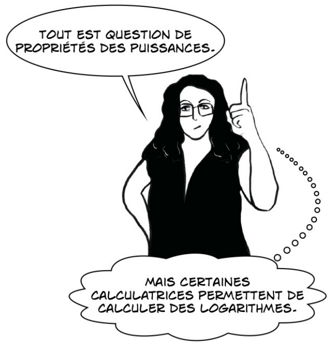
De manière générale, on va définir le logarithme à l'aide de l'exponentielle. En effet, la fonction logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle (au même titre que la racine carrée est la réciproque de l'élévation au carré, ou que la division par 5 est la réciproque de la multiplication par 5).

Définition :

Le **logarithme en base a de y** est égal à la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir y On note $\log_a(y)$le logarithme en base a de y.

Règle de calcul :

$$\boxed{x = \log_a(y) \Leftrightarrow a^x = y}$$



Exemples :

$\log_2(4) =$

$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) =$

$\log_7(1) =$

$\log_{4/9}\left(\frac{27}{8}\right) =$

$\log_{10}(100) =$

$\log_a(a^2) =$

➢ ***Notions élémentaires p. 117 ex 15***

3.2 Les exponentielles et les logarithmes dans la nature :

Des phénomènes naturels et économiques peuvent fréquemment être modélisés par des fonctions logarithmes et exponentielles.

1) Toute variable dont la croissance est proportionnelle à elle-même suit une **croissance exponentielle**.

Par exemple, la croissance d'une population est fréquemment proportionnelle à la taille de la population. Dans ce cas, la croissance est exponentielle.

2) Les explosions correspondant à un enchainement **exponentiel** de réactions chimiques ou nucléaires.

3) L'oreille réagit de façon logarithimque à la puissance d'un son. Elle perçoit des sons d'une puissance comprise entre 10^{-12} Watts et 10^{2} Watts. Le niveau acoustique en décibels $[dB]$ est défini par :

$$niveau\ sonore = 10 \cdot \mathbf{log}\ (Puissance\ en\ Watts\ divisée\ par\ 10^{-12} Watts)$$

Ainsi, si la puissance d'un son double, son niveau sonore augmente de $10 \cdot \log(2)$ décibels, soit environ 3 décibels.

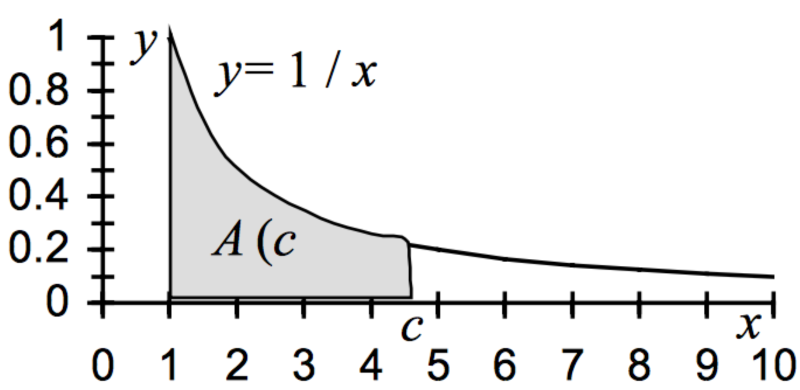
4) En chimie, on définit l'acidité d'un milieu comme :

« moins le logarithme en base 10 de la concentration des ions H_3O^+ »

$$pH = -\log\left([H_3O^+]\right)$$

5) L'aire entre les verticales $x = 1$, $x = c$, l'axe des abscisses et la courbe $f(x) = \frac{1}{x}$ est la fonction logarithme naturel de c.

$$A(c) = \ln(c)$$



3.3 Application logarithme

Comme nous l'avons fait avec l'application exponentielle, nous pouvons également définir une application logarithme, qui à tout nombre fera correspondre son logarithme.

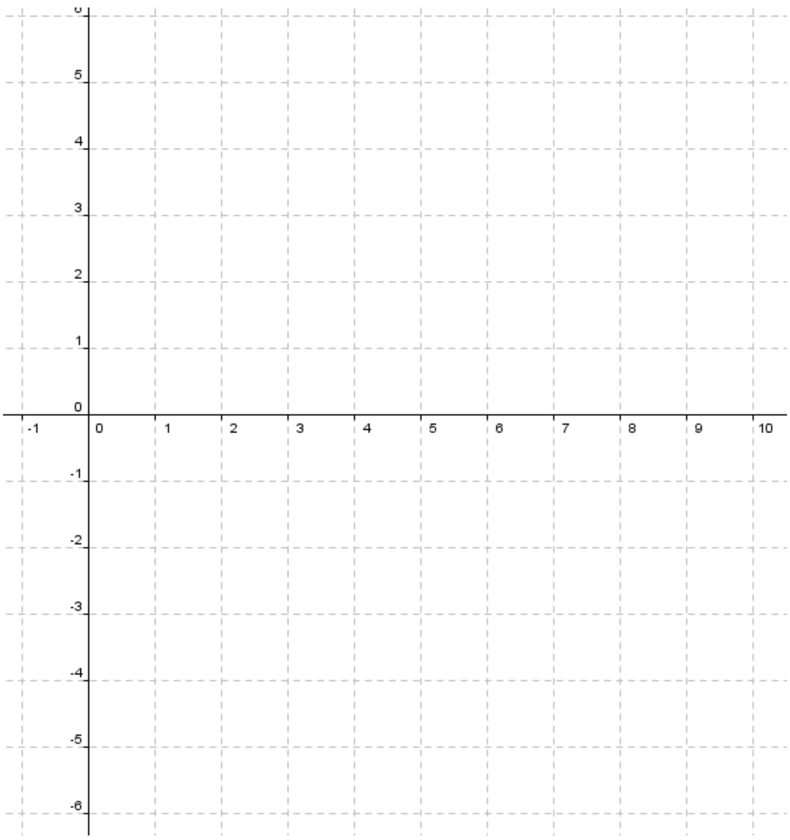
Cependant, il y a une restriction à apporter : seuls les nombres strictement positifs possèdent un logarithme. En effet, dans la relation fondamentale qui définit le logarithme, y ne peut pas être négatif, puisque étant égal à a^x et qu'une exponentielle est toujours positive. En revanche, un logarithme peut prendre une valeur négative.

Définition : L'application logarithme de base a sera donc définie :

$$log_a : x \mapsto \log_a(x) \ \ de\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

A titre d'exemple, nous allons représenter maintenant les applications logarithme en base 2 et logarithme en base ½ .

x	
$\log_2(x)$	
$\log_{0,5}(x)$	



➢ **Série 3 ex 1**

3.4 Propriétés des logarithmes

Historiquement, les logarithmes n'ont pas été définis comme fonction réciproque de l'exponentielle. Ils ont été introduits en 1614 par Hohn Neper pour simplifier des calculs qui se faisaient à la main. John Neper (1550 – 1617) était un baron écossait qui fréquentait le milieu scientifique de son époque. Dans la préface de son premier traité de 1614 « Mirifici logarithmorum canonis descriptio », écrit en latin, il explique comment on peut remplacer une multiplication par une addition en utilisant des tables de logarithmes.


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART

Les propriétés de $\log_a$ proviennent des propriétés de $\exp_a$ et donc des puissances.

Par définition, on a :

$$x = \log_a(y) \Leftrightarrow a^x = y \qquad \log_a(a^x) = x \qquad a^{\log_a(y)} = y$$

Propriété 1 : l'application logarithme est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$
c'est-à-dire : $\log_a(u) = \log_a(v) \Leftrightarrow u = v$
Il en va de même pour l'exponentielle : $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$

Ces relations sont utiles pour résoudre des équations de type exponentielles ou logarithmiques.

Propriété 2 :
Les courbes représentant log_a et $\log_{1/a}$ sont toujours symétriques par rapport à l'axe OX, pour toute base a.

Illustration de la propriété 2 :

Propriété 3 :
Si a est plus grand que 1, la courbe est croissante ; si a est compris entre 0 et 1, la courbe est décroissante.

Illustration de la propriété 3 :

Propriété 4 :
Dans tous les cas, le logarithme possède une asymptote verticale en $x = 0$

Illustration de la propriété 4 :

Propriété 5 :
L'application $\log_a$ $et\ E_a$ sont toujours symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Illustration de la propriété 5 :

Propriétés des puissances	**Propriétés de $\log_a(x)$**	**Exemple**
• $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x > 0$	• $\log_a(y)$ n'est défini que pour $y > 0$	
• $a^0 = 1$	• $\log_a(1) =$	
• $a^1 = a$	• $\log_a(a) =$	
• $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$	• $\log_a(y_1 \cdot y_2) =$	
• $a^{-y} = \frac{1}{a^y}$	• $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) =$	
• $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	• $\log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) =$	
• $(a^x)^p = a^{xp}$	• $\log_a(y^p) =$	
• $(a^x)^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a^x}$	• $\log_a\left(\sqrt[p]{y}\right) =$	

Quelques démonstrations :

Propriété 1 : $\log_a(a^x) = x \;\; et \; a^{\log_a(y)} = y$

Preuve :

- $\log_a(a^x) = u \Leftrightarrow a^x = a^u$ (Selon la définition du logarithme)
  d'après la propriété 1, on a que $x = u$ donc que $\log_a(x) = x$
- Selon la première partie de cette propriété no 3, on sait que $\log_a(a^x) = x$
  donc, en appliquant l'exponentielle, on a : $a^{\log_a(a^x)} = a^x$
  Si l'on pose $y = a^x$, on obtient bien : $a^{\log_a(y)} = y$

Propriété 2 : $\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$

Preuve : Posons $u = a^x$ et $v = a^y$ (x et y existent puisque log et exp sont des bijections)

- $\log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(a^x) + \log_a(a^y) = x + y$ (Selon prop. 1)
- $\log_a(u \cdot v) = \log_a(a^x \cdot a^y) = \log_a(a^{x+y}) = x + y$ (Selon prop. 1)

Propriété 3 : $\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a\left(\frac{u}{v}\right)$

Preuve : Posons $u = a^x$ et $v = a^y$ (x et y existent puisque log et exp sont des bijections)

- $\log_a(u) - \log_a(v) = \log_a(a^x) - \log_a(a^y) = x - y$ (Selon prop 1)
- $\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a\left(\frac{a^x}{a^y}\right) = \log_a(a^{x-y}) = x - y$ (Selon prop 1)

Propriété 4 : $\log_a(1) = 0$ quelle que soit la base a $[a > 0 \; et \; a \neq 1]$

Preuve : $x = \log_a(1) \Leftrightarrow a^x = 1$ (selon la déf du log)
Or, on sait que $a^0 = 1$. Donc $a^x = a^0$
Comme l'exponentielle est une bijection : $x = 0$.

Propriété 5 : $\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = -\log_a(u)$

Preuve : $\log_a\left(\frac{1}{u}\right) = \log_a(1) - \log_a(u) = 0 - \log_a(u) = -\log_a(u)$

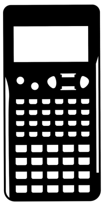
Propriété 6 : $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$

Preuve : $a^{v \cdot \log_a(u)} = \left(a^{\log_a(u)}\right)^v = u^v$ (selon prop des puissances + prop 1 des log)
D'où $\log_a(u^v) = v \cdot \log_a(u)$ (en prenant le log)

Exemple : $\log_3(2^9) = 9\log_3(2)$

Remarque : c'est la propriété 6 que nous utiliserons le plus par la suite.

> ***Voir EL Série 3 exercices 1+2***



3.5 Formule de changement de base

Certaines calculatrices ne possèdent que les touches pour :

- Le logarithme en base 10 : $\boxed{log}$
- Le logarithme en base e : $\boxed{ln}$

Il est donc pratique de pouvoir transformer un logarithme d'une base a en base 10 ou e.

Pour cela, il existe une formule :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},}$$

$$\text{où } \log(x) = \log_{10}(x)$$

et $\ln(x) = \log_e(x)$ qui se lit « logarithme naturel de x »

Ou de manière générale : $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Théorème :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}, si \log_a(b) \neq 0 (i.e. : b \neq 1)$$

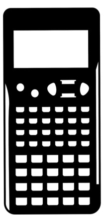
Preuve : Rappel : $\boldsymbol{\log_b(x) = y \Leftrightarrow b^y = x}$

Idée : passons la dernière égalité au logarithme en base a :

$$\log_a(\boldsymbol{b^y}) = \log_a(\boldsymbol{x}) \Leftrightarrow \boldsymbol{y} \cdot \log_a(b) = \log_a(x) \Leftrightarrow \boldsymbol{\log_b(x)} \cdot \log_a(b) = \log_a(x)$$

si $\log_a(b) \neq 0$ $(i.e. : b \neq 1)$ alors on a: $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$

Exercice : A l'aide d'une calculatrice (ou pas…), évaluer les expressions suivantes :



$\log_2(10) \cong$	$\log_5(10) \cong$
$\log_2(1000) \cong$	$\log_5(25)$
$\log_3(100) \cong$	$\log_2(1024)$
$\log_3(10) \cong$	$\log_3(81)$

➢ ***Voir série 3 exercice 4***
➢ ***Notions élémentaires p.113 & p.117 ex 18***

3.6. Equations logarithmiques

3.6.1 Résolution graphique

Même méthode que la résolution graphique avec les exponentielles :

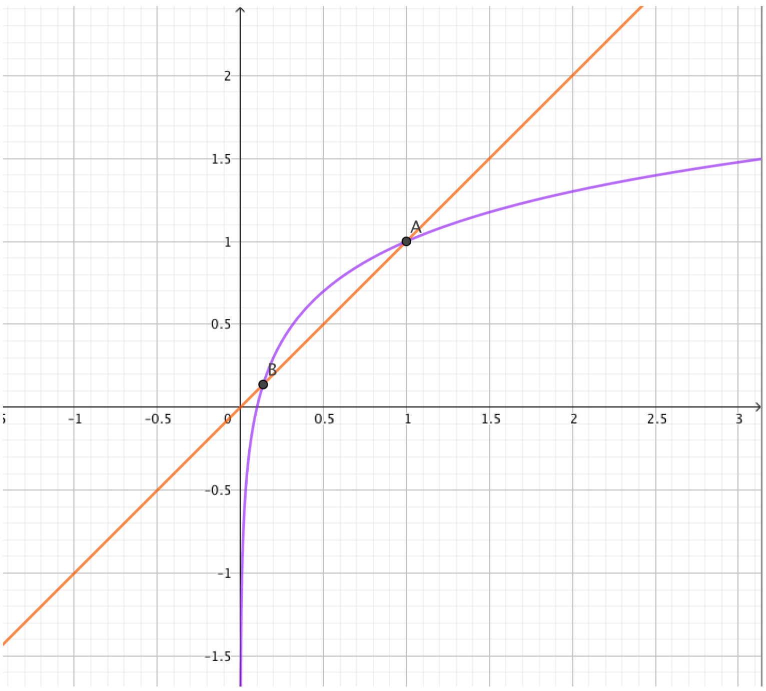
1) Représenter graphiquement les deux fonctions (une de chaque côté de l'égalité)
2) Chercher avec le plus de précision le(s) point(s) d'intersection.
3) Donner l'ensemble solution

Attention : Ne pas modifier l'énoncé ! Laisser chaque membre de son côté de l'égalité !

Exemple : Résoudre l'équation

$$\log_{10}(x) + 1 = x$$

1) Représenter $f(x) = \log_{10}(x) + 1$ et $g(x) = x$



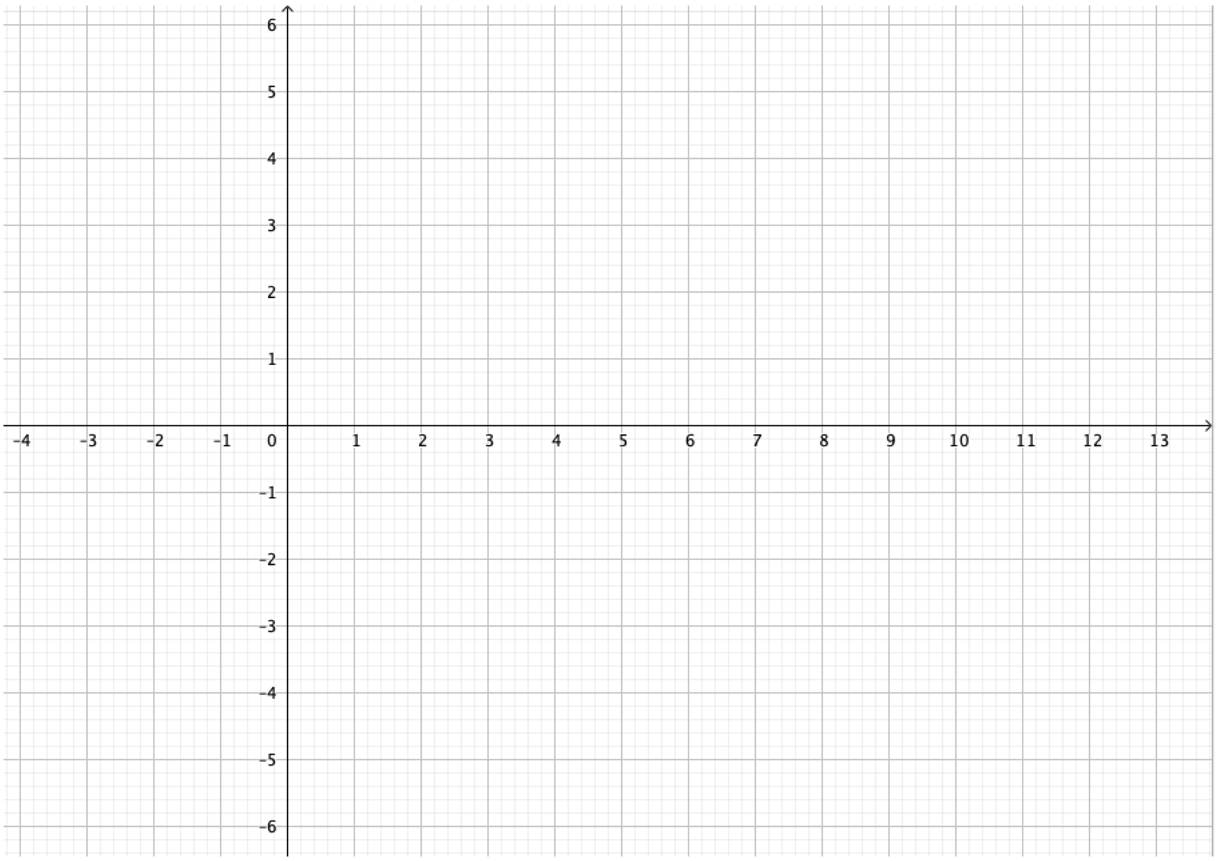
2) Chercher des approximations numériques

x	
$f(x)$	
$g(x)$	

3) Donner l'ensemble solution :

$S \cong \{0{,}14; 1\}$

Exemple : Résoudre $\mathbf{\ln(2x) = 2x - 1}$



Voir série 3 ex 3

3.6.2 Résolution d'équations logarithmes

Il y a des problèmes de domaines, il faut toujours s'assurer que l'énoncé a du sens.

Rappel : $\log_a(y) = x \Leftrightarrow a^x = y$ avec $a > 0$ et $a \neq 1$ mais aussi $y > 0$ et $x \in \mathbb{R}$.

Méthode :

1) Déterminer le domaine de l'équation.
2) Transformer l'équation pour faire apparaître $\log(A) = \log(B)$
3) Comme log est une fonction bijective, on peut écrire : $A = B$.
4) Résoudre l'équation.
5) Vérifier la (les) solution(s) trouvée(s) avec le domaine déterminé.
6) Donner l'ensemble solution.

Prenons un exemple : Résoudre

$$\log(x+2) - \log(3) = \log(2x-1) + \log(7)$$

(1) Domaine : $x + 2 > 0$ et $3 > 0$ et $2x - 1 > 0$ et $7 > 0$

On a donc : $D = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

(2) Résolution : L'idée est d'avoir : $\log(A) = \log(B)$ car on peut alors écrire : $A = B$ (car log bijectif)

(3) Utilisons pour cela les propriétés des logarithmes :

On a donc :

$$\log\left(\frac{x+2}{3}\right) = \log\big(7(2x-1)\big) \Rightarrow \frac{x+2}{3} = 14x - 7 \Rightarrow x + 2 = 42x - 21 \Rightarrow 23 = 41x$$
$$\Rightarrow x = \frac{23}{41}$$

(4) Vérifier que la solution est bien dans le domaine et donner l'ensemble solution.

$$S = \left\{\frac{23}{41}\right\}$$

Autre méthode :

1) Résoudre l'équation sans déterminer un domaine
2) Substituer la solution trouvée dans l'énoncé de départ pour vérifier si elle pose problème.

➢ ***Voir Série 3 exercice 5***

4. Equations exponentielles et logarithmiques

Nous avons étudié un premier cas d'équations exponentielles, maintenant nous allons aborder un 2e cas qui mélange les propriétés des exponentielles et des logarithmes :

Equations de la forme : $a^u = b^v$ (bases différentes)

Méthode : Passer l'égalité au logarithme pour faire descendre l'exposant.

Exemples :

a) $2^x = 5$

b) $4^{x+2} = 7$

c) $4^x = 5^{x+2}$

d) $3^{x-1} = 8^{2x+3}$

➢ ***Série 4 ex 1***

5. Equations particulières :

a) $\log_4(2x+1) = \log_4(x) + 2$ *Idée : transformer 2 en :* $log_4(4^2) = 2$

b) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$ *Idée : poser* $y = 3^x$

➢ ***Notions élémentaires p. 118 ex 20***

6. Résumé des méthodes résolutions :

Graphique

Soit $f(x) = un\ polynôme$

	$a^x = f(x)$	$\log(x) = f(x)$
Marche à suivre	1. Représenter $f(x)$ 2. Représenter a^x 3. Chercher les points d'intersection. 4. Donner l'ensemble solution	1. Représenter $f(x)$ 2. Représenter $\log(x)$ 3. Chercher les points d'intersection. 4. Donner l'ensemble solution

Algébrique

	A quelle forme se ramène l'équation ?	**Méthodes pour s'y ramener**	**Méthode de résolution**
(1)	$\boldsymbol{a^u = a^v}$	Propriétés des puissances	1) Descendre les expressions avec l'inconnue $u = v$ 2) Résoudre 3) Donner l'ensemble solution
(2)	$\boldsymbol{a^u = b^v}$	Propriétés des puissances	1) Passer l'égalité au logarithme $\log(a^u) = \log(b^v)$ 2) Descendre l'inconnue $u\log(a) = v\log(b)$ 3) Isoler l'inconnue pour résoudre
(3)	$\boldsymbol{\log(A) = \log(B)}$	Propriétés des logarithmes	1) Egaliser les intérieurs (le logarithme est bijectif) $A = B$ 2) Résoudre 3) vérifier solution dans l'équation de départ ou calculer domaine de l'équation pour vérifier si la/les solution(s) sont valables 4) Ensemble solution
(4)	$\boldsymbol{\log_a(x) = y}$	Propriété des logarithmes	Utiliser la définition du logarithme : $a^y = x$ pour se ramener à une inconnue à un étage normal **Ou** Transformer $y = \log_a(a^y)$ et résoudre selon la méthode $\log(A) = \log(B)$
(5)	$\boldsymbol{a(e^x)^2 + b \cdot e^x + c = 0}$	Algèbre, Propriétés des puissances	1) Poser $y = e^x$, l'équation devient celle du deuxième degré. 2) Résoudre avec formule de Viète ou les identités remarquables : y_1 et y_2 3) Retour à x avec les solutions trouvées pour y : $y_1 = e^x\ et\ y_2 = e^x$ 4) Résoudre comme le type $a^u = b^v$

Table des matières

Intérêts composés

A la recherche d'une formule !

Supposons que nous arrivions dans une banque avec un capital C_0.

Comment calculer le capital au bout d'une année (C_1) si la banque nous accorde un taux T.
$C_1 =$

Au bout de la deuxième année ? *[Faire développement]*
$C_2 =$

Au bout de la troisième année ?
$C_3 =$

Au bout de n années ? *[déduction à l'aide de C_1, C_2 et C_3]*

$$\boxed{C_n = \quad}$$

Que peut-on trouver dans la table CRM ?

Calcul financier

Intérêts simples et composés

Capital initial (valeur actuelle)	C_0
Valeur acquise après n années	C_n
Taux d'intérêt annuel	i
Intérêt produit après n années	I_n
Facteur de capitalisation annuel	$r = 1 + i$
Facteur d'actualisation annuel	$v = \frac{1}{r}$

Intérêts simples	Intérêts composés
$I_n = C_0\, i\, n$	$I_n = C_0(r^n - 1)$
$C_n = C_0\,(1 + i\,n)$	$C_n = C_0\, r^n$
$C_0 = \frac{C_n}{1 + i\,n}$	$C_0 = C_n v^n$

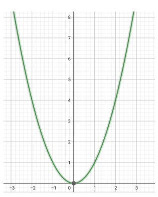
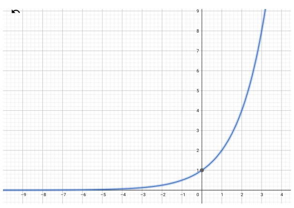
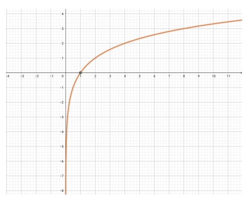
➢ **Série 5**

Problème d'introduction au cours de 2e

Monsieur DUJARDIN dépose la somme de 20'000 Fr. dans une banque qui va lui accorder 1,5% d'intérêt annuel s'il laisse son capital durant au moins 10 ans.

Dans ces conditions, combien de temps devra-t-il attendre pour atteindre un capital cumulé qui dépasserait 30'000 Fr.?

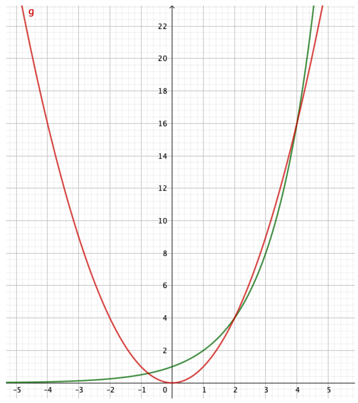
Révisions de fonctions importantes en base 2

	Puissances	**Exponentielle**	**Logarithme**
Équation	$P_2(x) = x^2$	$E_2(x) = 2^x$	$L_2(x) = \log_2(x) = y$ $(2^y = x)$
D_f			
Ordonnée à l'origine			
Calculer des images	x | y	x | y	x | y
Ensemble de départ (A) et d'arrivée (B) pour avoir une bijection	$A =$ $B =$	$A =$ $B =$	$A =$ $B =$
Réciproque			
Asymptote			
Graphique			

Résoudre des équations :

1. Un polynôme et une exponentielle ou un polynôme et un logarithme : résolution graphique.

   exemple : $x^2 = 2^x$



2. Deux exponentielles de même base : Résolution grâce à la bijection

$$a^x = a^y \underset{bijection}{\Longleftrightarrow} x = y$$

   exemple : $2^x = 4^{x+1}$

LE LOGARITHME C'EST L'EXPOSANT QUE L'ON APPLIQUE À LA BASE AFIN D'OBTENIR CE QU'IL Y A DANS LA PARENTHÈSE.

3. Deux logarithmes de même base : Résolution grâce à la bijection

$$\log_a(x) = \log_a(y) \underset{bijection}{\Longleftrightarrow} x = y$$

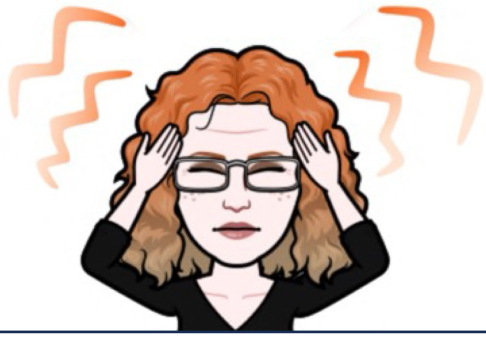
exemple : $\log_2(x+2) = \log_2(4-x)$

$\log_a(x) = y$

$\Leftrightarrow a^y = x$

QUE FAIRE QUAND LES DEVOIRS SONT "TROP DIFFICILES" ?

PINKMATHS.CH



- Regarder la théorie pour chercher des exemples qui pourraient aider
- Chercher s'il y a des élèves qui ont compris et peuvent aider
- Noter les questions et les poser. Ne pas oublier de noter les réponses
- Chercher une vidéo sur youtube pour des explications
- Aller au dépannage
- Prendre un répétiteur
- Être attentif en classe et prendre des notes
- Relire son cours avant le prochain