

Exponentielle et Logarithme : Série 4

Exercice 1 : Résoudre algébriquement les équations en x suivantes :

- | | |
|---------------------------|------------------------|
| 1) $3^{7x-2} = 5^{8x-3}$ | 4) $4^{2x+3} = 2^{3x}$ |
| 2) $4^{3x-5} = 6^{7x-12}$ | |
| 3) $3^{5x+1} = 7^{12-5x}$ | |

Exercice 2 : Déterminer par calcul le domaine des applications définies par :

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 1) $f(x) = \ln [x \cdot (x - 2)]$ | 4) $f(x) = \log \left(\frac{1-x}{2x+3} \right)$ |
| 2) $f(x) = \ln(x) + \ln(x - 2)$ | |
| 3) $f(x) = \ln(x^2 + 7x - 3)$ | 5) $f(x) = \log \left[\frac{(3-5x)^2}{x^4} \right]$ |

Exercice 3 : Déterminer le domaine et résoudre.

- | | | |
|--|---|--|
| 1) $5x = x \cdot \ln(x)$
2) $3 \cdot [\log(x)]^2 + \log(x) = 0$
3) $e^x \cdot \ln(x) = 3 \ln(x)$
4) $4x = x \cdot \log(x - 1)$
5) $(x^2 - 3x) \log(5) = \log(125)$
6) $\log(x - 2) + 1 = \log(2x - 1)$
7) $\ln(3 - x) + 4 = \ln(x - 5)$
8) $\log(7 - 2x) = 2 + \log(5x - 1)$
9) $\ln(x) + \ln(2 - x) = \ln(4 - x)$ |  | 10) $\log(x) - \log(x + 3) = 2 \cdot \log(2)$
11) $\log\left(\frac{x}{x+3}\right) = 2 \log(2)$
12) $\log(3) + \log\left[(x - 4)\left(x - \frac{5}{3}\right)\right] = 1$
13) $\ln(1 + x) - 2 \ln(2x - 10) = -\ln(1 + x)$
14) $\log(x^2 - 4x + 3) = \log(5 - 3x)$
15) $\ln(3 - x) + \ln(2 - x) = \ln(13 + x)$
16) $3[\ln(x)]^2 - 5 \ln(x) - 2 = 0$
17) $3[\log(x)]^2 - 5 \log(x) - 2 = 0$ |
|--|---|--|

Exercice 4 :

Un nénuphar mesurant $1m^2$ double de surface chaque jour. Après 10 jours, il aura recouvert tout l'étang.

- Quelle est la surface de l'étang ?
- Faire une représentation graphique où x représente les jours et y la surface du nénuphar.
- Donner l'équation de la fonction tracée en a).
- Au bout de combien de jours le nénuphar aura recouvert la moitié de l'étang ?
- Justifier le résultat du point d) en utilisant la fonction obtenue au point c).
- Si le nénuphar avait une surface initiale de $3m^2$, combien de temps aurait-il pris pour recouvrir l'étang ? (réponse en jours, heures et minutes)



Exercice 5 : Problème de la limace

Une limace doit se rendre du point « 1 » au point « 0 ». Le premier jour, elle parcourt la moitié du trajet, le deuxième jour la moitié du reste et ainsi de suite.

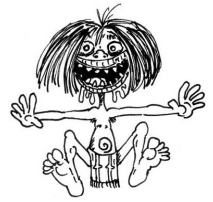
- Définir une fonction qui donne la distance parcourue en fonction des journées et faire son graphe.
- Après combien de jours, la limace atteindra-t-elle le point $\frac{1}{262144}$?



Exercice 6 : Problème de l'Helvétie

En l'an 7, une région de l'Helvétie était peuplée par 64 indigènes. Si la population de cette région avait doublé chaque année, en quelle année le nombre d'habitants aurait-il été de 1'048'576 ?

(Définir une fonction « nombre d'habitant » et résoudre une équation).



Exercice 7 : On considère une colonie de bactéries dont la population $p(t)$ double toutes les 10 secondes.

- Sachant qu'il y a 100 bactéries au temps $t = 0$, exprimer $p(t)$ où t est calculé en secondes.
- Calculer la population après 10 secondes, 60 secondes et 120 secondes.
- Au bout de combien de temps la population sera-t-elle égale à 1 000 000 ?

**Exercice 8 :**

Un échantillon contient au départ 1000 noyaux radioactifs de Carbone 14.

Le Carbone 14 a une demi-vie de 5730 ans :

tous les 5730 ans, la moitié des noyaux se désintègrent.

On note t le temps en années.

- Exprime le nombre de noyaux en fonction de n , le nombre de demi-vies.
- Exprime n en fonction du temps t .
- Déduis une formule donnant le nombre de noyaux en fonction du temps.
- Combien reste-t-il de noyaux après 11 460 ans ?
- Au bout d'un certain temps, il restera moins de 10 noyaux. Estime au bout de combien d'années cela se produit.
- On retrouve un morceau de bois ancien. On mesure qu'il ne reste plus que 125 noyaux de Carbone 14 sur les 1000 initiaux. Quel est l'âge approximatif de ce morceau de bois ?

**Exercice 9 :**

Le pH d'une solution est défini par la formule :

$$\text{pH} = -\log_{10} ([H^+])$$

où $[H^+]$ est la concentration en ions hydrogène (en mol/L). Cela signifie que le pH est une échelle logarithmique.

- Une solution **A** a une concentration $[H^+] = 10^{-3}$. Calculer son pH sans calculatrice.
- Une solution **B** a une concentration en ions hydrogène 10 fois plus faible que la solution A. Calculer son pH.
- On considère une solution dont la concentration est 10^{-n} . Exprimer son pH en fonction de n .
- Une solution a un pH de 5. Retrouver sa concentration $[H^+]$.
- Une solution a une concentration : $[H^+] = 3,2 \times 10^{-6}$. Calculer son pH (arrondi au dixième).

Solutions Série 4 Exponentielles et logarithmes

Ex1 : 1) $S = \left\{ \frac{\log\left(\frac{9}{125}\right)}{\log\left(\frac{3}{5}\right)} \right\} \cong \{0,51\}$ 2) $S = \left\{ \frac{\log\left(\frac{4^5}{6^{12}}\right)}{\log\left(\frac{4}{6}\right)} \right\} \cong \{1,74\}$ 3) $S = \left\{ \frac{\log\left(\frac{7^{12}}{3}\right)}{\log(3^{5 \cdot 7^5})} \right\} \cong \{1,46\}$

4) $S = \{-6\}$

Ex 2 :

1) $D_f =]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[= \mathbb{R} \setminus [0; 2]$ 2) $D_f =]2; +\infty[$

3) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left[\frac{-7-\sqrt{61}}{2}; \frac{-7+\sqrt{61}}{2} \right]$ 4) $D_f =]-\frac{3}{2}; 1[$ 5) $D_f = \mathbb{R}^* \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$

Ex 3

1) $D = \mathbb{R}_+^* S = \{e^5\}$

2) $D = \mathbb{R}_+^* S = \{10^{-\frac{1}{3}}; 1\}$

3) $D = \mathbb{R}_+^* S = \{1; \ln(3)\}$

4) $D =]1; +\infty[S = \{10001\}$

5) $D = \mathbb{R} S = \left\{ \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}$

6) $D =]2; +\infty[S = \left\{ \frac{19}{8} \right\}$

7) $D = \emptyset$ donc $S = \emptyset$

8) $D =]\frac{1}{5}; \frac{7}{2}[S = \left\{ \frac{107}{502} \right\}$

9) $D =]0; 2[S = \emptyset$



10) $D = \mathbb{R}_+^* S = \emptyset$

11) $D =]-\infty; -3[\cup \mathbb{R}_+^* S = \{-4\}$

12) $D =]-\infty; \frac{5}{3}[\cup]4; +\infty[S = \left\{ \frac{2}{3}; 5 \right\}$

13) $D =]5; +\infty[S = \{11\}$

14) $D =]-\infty; 1[S = \{-1\}$

15) $D =]-13; 2[S = \{-1\}$

16) $D = \mathbb{R}_+^* S = \left\{ e^2; \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \right\}$

17) $D = \mathbb{R}_+^* S = \left\{ 10^2; \frac{1}{\sqrt[3]{10}} \right\}$

Ex 4 : a) 1024 m c) $f(x) = 2^x$ d) 9 jours e) $\frac{1024}{2} = 2^x$

Ex 5 : a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{262144} \Leftrightarrow 2^x = 262144 = 2^{18}$ La limace atteindra le point en 18 jours.

Ex6 : a) $f(x) = 2^{x-1}$ b) $2^{x-1} = 1048576 = 2^{20}$ donc $x = 21$

En l'an 21, le nombre d'habitants aurait été de 1'048'576

Ex7 :

a) $p(t) = 100 \cdot 2^{t/10}$ b) $p(10) = 200; p(60) = 6400; p(120) = 409600$ c) 132,88 sec

Ex8 :

a) $N(n) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ b) $N(n) = \frac{t}{5730}$ c) $N(t) = 1000 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ d) 250 e) 40110 ans f) 17190 ans

Ex9 :

a) 3 b) 4 c) $pH = n$ d) $[H^+] = 10^{-5}$ e) $pH = 5,5$