

Probabilités Série 2

Ne pas écrire sur l'énoncé ! Rédigez vos raisonnements sur des feuilles quadrillées !

Exercice 1 :

On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite. Soit X la variable aléatoire "nombre de faces obtenus". Ecrire, sous forme de tableau, la loi de probabilité de X .



Indication :

faire un tableau assez grand et laisser de l'espace pour 2 lignes supplémentaires. (pour l'exercice 5)

Exercice 2 :

On lance simultanément un dé et une pièce de monnaie. On considère la variable aléatoire X qui à chaque issue associe un nombre de la manière suivante : Si la pièce est tombée sur face on retient le chiffre indiqué par le dé, si la pièce est tombée sur pile alors on multiplie par 2 le chiffre indiqué par le dé. Etablir la loi de probabilité de X .



Indication :

faire un tableau assez grand et laisser de l'espace pour 2 lignes supplémentaires. (pour l'exercice 5)

Exercice 3 :

On joue à pile ou face trois fois de suite. Chaque "pile" obtenu fait gagner 3 points et chaque "face" fait perdre 2 points. Soit X la variable qui prend la valeur du gain ou de la perte après ces trois lancers (on suppose la pièce équilibrée). Etablir la loi de probabilité de X .



Indication :

faire un tableau assez grand et laisser de l'espace pour 2 lignes supplémentaires. (pour l'exercice 5)

Exercice 4 :

Soit la distribution :

x_i	-3	-1	1	5	10
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$



Calculer :

- | | |
|-------------------------|--|
| a) $P(X \leq -1) =$ | d) $P(-1 < X \leq 5) =$ |
| b) $P(X > -1) =$ | e) $P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1) =$ |
| c) $P(-3 < X \leq 1) =$ | f) $P(X \leq 1 \mid X \geq -1) =$ |

Exercice 5 :

Option 1 : vous avez bien laissé de la place comme demandé par l'indication.

Option 2 : vous refaites les exercices 1 à 3 en enchainant avec l'exercice 5.

Option 3 : Aller choisir parmi l'option 1 ou 2.

- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 1.
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 2.
- Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ pour la situation de l'exercice 3.



Exercice 6 :

On jette une pièce de monnaie trois fois. Quel est l'univers ? Décrire la variable aléatoire X associant à chaque issue de U , le nombre de "faces" se présentant à l'épreuve. En faire la distribution de probabilité. Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 7 :

On jette une pièce de monnaie trois fois.

- Quel est l'univers ?
- Décrire la variable aléatoire X associant à chaque événement de U , le nombre de "faces" moins le nombre de piles. En faire la distribution de probabilité.
- Déterminer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 8 :

On jette 6 fois une pièce de monnaie. Si X représente le nombre de piles obtenu, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X .

Exercice 9 :

Un échantillon de 3 objets est choisi au hasard dans une boîte contenant 12 objets parmi lesquels 3 sont défectueux. Si X détermine le nombre d'objets défectueux, calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type.

Exercice 10 :

Une boîte contient 10 transistors dont 2 sont défectueux. On choisit un transistor au hasard et on le teste. On poursuit jusqu'à obtenir un transistor en état de marche. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de transistors que l'on a dû tirer de la boîte. Calculer l'espérance mathématique de X .



Indication : Faire un arbre pondéré.

Exercice 11 :

Au lieu de corriger les travaux de ses élèves, un professeur décide de mettre les notes de la façon suivante. Pour chaque travail, il lance deux dés et retient, comme note pour le travail, le plus petit des deux nombres indiqués par les dés.

- A quelle moyenne de classe ce professeur (imaginaire bien sûr !) peut-il s'attendre ?
- Quel sera probablement le pourcentage de notes insuffisantes ?
- Quelle serait la moyenne de classe s'il retenait le plus grand des deux nombres indiqués par les dés ?



☞ Exercice 12 :

Sur la Plaine de Plainpalais, un forain propose le jeu suivant, pour 10 francs la partie : dix enveloppes sont placées dans une corbeille, dont une contient un carton vert, deux contiennent un carton rouge et sept contiennent un carton blanc.

Le jeu consiste, après versement des 10 francs, à choisir une enveloppe au hasard dans la corbeille, à l'ouvrir et à regarder la couleur du carton. Un carton vert donne droit à un gros lot, un carton rouge donne droit à un lot simple et un carton blanc donne droit à un lot de consolation. Les lots simples reviennent à 8 francs au forain, alors que les lots de consolation ne lui reviennent qu'à 3 francs.

Soit X la variable aléatoire égale au bénéfice du forain sur une partie.

- Quel est le prix maximal auquel le forain peut acheter ses gros lots, s'il désire gagner en moyenne au moins 4 francs par partie ?
- S'il achète ses gros lots au prix de la question a), calculer l'écart-type de la variable X .

Exercice 13 :

Un habitué des casinos joue régulièrement à la roulette. (Remarque : une roulette contient 36 numéros différents). Chaque samedi, il mise 20 fois de suite sur le 7.

En moyenne, combien de fois par semaine ce joueur va-t-il gagner ?



Exercice 14 :

Un questionnaire de type QCM est composé de 24 questions. Pour chacune de ces questions, trois réponses sont proposées dont une seule est la bonne.

En répondant au hasard à ce questionnaire, combien de bonnes réponses pouvons-nous espérer ? (Au sens mathématique du terme !)



Exercice 15 :

Onze personnes montent au rez-de-chaussée dans l'ascenseur d'un immeuble de quinze étages. (en plus du rez-de-chaussée)

Considérons la variable aléatoire $Y =$
nombre de personnes qui quittent l'ascenseur au 7e étage.

- Quelle est la loi suivie par Y ?
- Calculer $p(Y = 0)$; $p(Y = 1)$ et $P(Y = 2)$.
- Calculer $E(Y)$.



Exercice 16 :

Une urne contient trois boules jaunes et deux boules blanches. On tire successivement et avec remise huit boules de l'urne et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules blanches obtenues.

Les probabilités seront données à 10^{-4} près.

- Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et préciser ses paramètres
- Déterminer la probabilité d'obtenir :
 - Trois boules blanches.
 - Au plus quatre boules blanches.
 - Au moins trois boules blanches.
- Déterminer $P(3 \leq x \leq 6)$.
- Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

Exercice 17 :

Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle. On suppose que le nombre d'acheteurs parmi cet échantillon suit une loi binomiale.

Déterminer le nombre moyen de personnes de cet échantillon qui ont acheté un ordinateur.

Quelle est la probabilité, dans cet échantillon, qu'entre 3 et 6 personnes aient acheté un ordinateur ?
(on donnera le résultat à 10^{-3})

Solutions Série 2 Probabilités :

Exercice 1 :

x_i	0	1	2	3	4	5	total
$P(x_i)$	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	1

Exercice 2 :

x_i	1	2	3	4	5	6	8	10	12	total
$P(x_i)$	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1

Exercice 3 :

x_i	-6	-1	4	9	total
$P(x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

Exercice 4 :

$$\begin{aligned}
 a) \quad P(X \leq -1) &= \frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{6}{12} = 0,5 \\
 b) \quad P(X > -1) &= \frac{3}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \\
 c) \quad P(-3 < X \leq 1) &= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} = \frac{5}{12} = 0,41\bar{6} \\
 d) \quad P(-1 < X \leq 5) &= \frac{3}{12} + \frac{5}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0,6 \\
 e) \quad P(-1 < X \leq 5 \mid X \geq -1) &= \frac{8/12}{11/12} = \frac{8}{11} \approx 0,727 \\
 f) \quad P(X \leq 1 \mid X \geq -1) &= \frac{5/12}{11/12} = \frac{5}{11} \approx 0,4545
 \end{aligned}$$

Exercice 5 :

- a) En moyenne, on obtient 2,5 faces. $E(X) = 2,5, \sigma(X) \cong 1,118$
 b) En moyenne, on obtient le nombre 5,25. $E(X) = 5,25, \sigma(X) \cong 3,21778$
 c) En moyenne, on gagne 1,5 point. $E(X) = 1,5, \sigma(X) \cong 4,33$

Exercice 6 :

$$U = \{(p; p; p); (f; p; p); (p; f; p); (p; p; f); (f; f; p); (f; p; f); (p; f; f); (f; f; f)\}$$

X est la variable aléatoire indiquant le nombre de "faces" se présentant à l'épreuve

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$p_i x_i$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8} = 1,125 = E(X)$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3 = E(X^2)$

$$E(X) = \mu = \frac{9}{6} = 1,5$$

$$V(X) = \sum p_i X_i^2 - \mu^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$$

Exercice 7 :

$$U = \{(p; p; p); (f; p; p); (p; f; p); (p; p; f); (f; f; p); (f; p; f); (p; f; f); (f; f; f)\}$$

X est la variable aléatoire indiquant le nombre de "faces" moins le nombre de "piles" se présentant à l'épreuve.

x_i	-3	-1	1	3	Σ
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1
$p_i x_i$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$0 = E(X)$
$p_i x_i^2$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{24}{8} = 3 = E(X^2)$

$E(X) = 0$ $V(X) = 3 - 0^2 = 3$ $\sigma(X) = \sqrt{3} = 1,73$

Exercice 8 :

X est la variable aléatoire qui représente le nombre de "piles" obtenus. $2^6 = 64$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{C_0^6}{2^6} = \frac{1}{64}$	$\frac{C_1^6}{2^6} = \frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$	1
$p_i x_i$	0	$\frac{6}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{30}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{192}{64} = 3$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{6}{64}$	$\frac{60}{64}$	$\frac{180}{64}$	$\frac{240}{64}$	$\frac{150}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{672}{64} = 10,5$

$E(X) = \frac{192}{64} = 3$ $V(X) = 10,5 - 3^2 = 1,5$ $\sigma = \sqrt{1,5} = 1,22$

Exercice 9 :

Choisir 3 objets parmi 12: $C_3^{12} = 220$ possibilités dans l'univers (de tirer 3 objets parmi 12)

X est la variable aléatoire qui représente le nombre d'objets défectueux

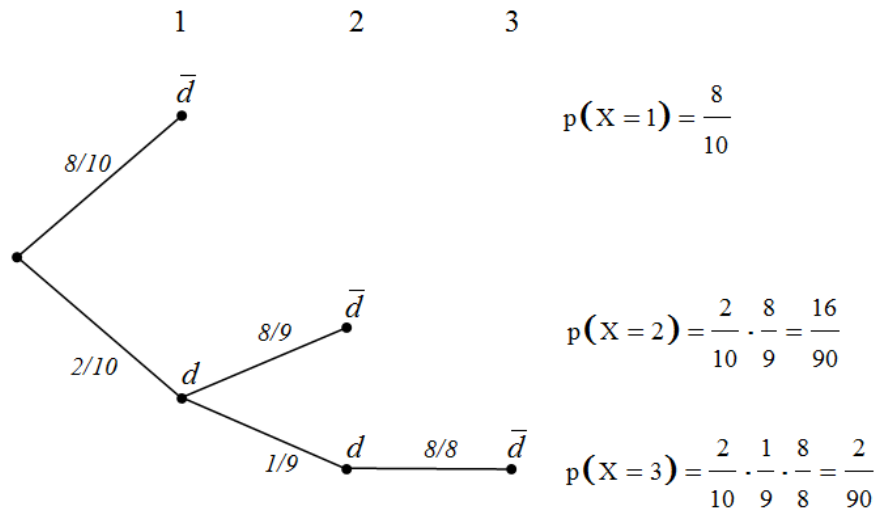
- 0 objets défectueux (donc 3 à choisir dans les 9 non défectueux): $C_0^3 \cdot C_3^9 = 84$
- 1 défectueux et 2 non défectueux : $C_1^3 \cdot C_2^9 = 108$
- 2 défectueux et 1 non défectueux : $C_2^3 \cdot C_1^9 = 27$
- 3 défectueux et 0 non défectueux : $C_3^3 \cdot C_0^9 = 1$

x_i	0	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$	1
$p_i x_i$	0	$\frac{108}{220}$	$\frac{54}{220}$	$\frac{3}{220}$	$\frac{165}{220} = 0,75 = E(X)$
$p_i x_i^2$	0	$\frac{108}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{225}{220} = E(X^2)$

$$E(X) = \frac{165}{220} = 0,75 \quad V(X) = \frac{225}{220} - \left(\frac{165}{220}\right)^2 = 0,46 \quad \sigma = \sqrt{0,46} = 0,678$$

Exercice 10 :

X est la variable aléatoire qui représente le nombre de transistors que l'on a dû tirer de la boîte jusqu'à obtenir un transistor en état de marche.



x_i	1	2	3	Σ
p_i	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{90}$	$\frac{2}{90}$	1
$p_i x_i$	$\frac{8}{10}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{11}{9} = 1,22$
		$E(X) = 1,22$		

Exercice 11 : X est la variable aléatoire qui représente la note obtenue par l'élève en fonction du lancer des deux dés. Il y a $6^2 = 36$ possibilités pour les 2 dés.

a)

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{11}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{91}{36} = 2,53$

$E(X) = 2,53$ représente la moyenne de classe de ce professeur

b) $\frac{27}{36} = 75\%$ des élèves n'ont pas la moyenne.

c)

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1
$p_i x_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{161}{36} = 4,47$

$E(X) = 4,47$ serait dans ce cas, la moyenne de classe de ce professeur

Exercice 12 :

a) X est la variable aléatoire qui représente le bénéfice du forain sur une partie. 3 cas:

- carton blanc: *bénéfice* = $10 - 3 = 7$ francs, d'où $p(X = 7) = \frac{7}{10}$
- carton rouge: *bénéfice* = $10 - 8 = 2$ francs, d'où $p(X = 2) = \frac{2}{10}$
- carton vert: *bénéfice* = $10 - b = a$ francs, d'où $P(X = a) = \frac{1}{10}$

x_i	a	2	7	Σ
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$	1
$p_i x_i$	$a \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{49}{10}$	$\mu = 4$

$$E(X) = 4 = a \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{49}{10} = \frac{a}{10} + \frac{53}{10}$$

$$a = \left(4 - \frac{53}{10}\right) \cdot 10 = -13 \text{ francs}$$

Le forain fait une perte de 13 francs avec le gros lot, celui-ci a donc coûté $13 + 10 = 23$ francs

b)

$p_i x_i^2$	$\frac{169}{10}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{343}{10}$	$\frac{520}{10} = 52$
-------------	------------------	----------------	------------------	-----------------------

$$V(X) = 52 - 4^2 = 36 \quad \sigma = \sqrt{36} = 6 \text{ francs}$$

Exercice 13 :

$$n = 20, p(7) = \frac{1}{36}, p(\bar{7}) = \frac{35}{36} \text{ donc } E(X) = np = 20 \cdot \frac{1}{36} = 0,56$$

Exercice 14 :

$$n = 24, p(\text{bonne réponse}) = \frac{1}{3} \text{ donc } E(X) = np = 24 \cdot \frac{1}{3} = 8, \text{ on peut espérer obtenir 8 bonnes réponses.}$$

Exercice 15 :

a) la loi binomiale, $n = 11, p(\text{pour une personne de sortir au 7e étage}) = \frac{1}{15}$

$$b) P(Y = 0) = B\left(0; 11; \frac{1}{15}\right) = C_0^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^0 \left(\frac{14}{15}\right)^{11} = 0,468 = 46,8\%$$

$$P(Y = 1) = B\left(1; 11; \frac{1}{15}\right) = C_1^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^1 \left(\frac{14}{15}\right)^{10} = 0,368 = 36,8\%$$

$$P(Y = 2) = B\left(2; 11; \frac{1}{15}\right) = C_2^{11} \left(\frac{1}{15}\right)^2 \left(\frac{14}{15}\right)^9 = 0,131; 13,1\%$$

$$c) E(Y) = np = 11 \cdot \frac{1}{15} = \frac{11}{15} = 0,733$$

Exercice 16 :

1. L'expérience consiste en la répétition de $n = 8$ épreuves identiques et indépendantes (tirage avec remise).

Chaque épreuve n'a que deux issues possibles :

Succès : « obtenir une boule blanche », $p = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} = 0,4$

Echec : « obtenir une boule jaune », $1 - p = 0,6$

$$P(X = k) = C_k^8 \cdot 4^k \cdot 0,6^{8-k}$$

2. 1. $P(X = 3) \approx 0,2787$

2. $P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \approx 0,8263$

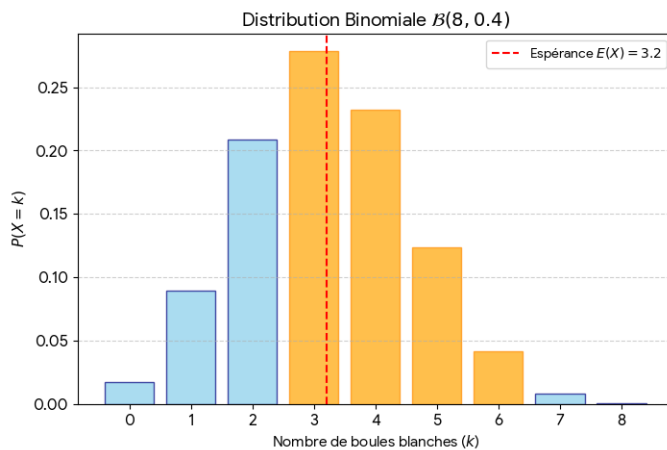
3. $P(X \geq 3) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \approx 1 - 0,3154 \approx 0,6846$

a) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) \approx 0,9915 - 0,3154 \approx 0,6761$

Astuce : Utiliser la fonction table de la calculatrice

3. $E(X) = 8 \cdot 0,4 = 3,2$

Si l'on répète cette expérience de 8 tirages un très grand nombre de fois, on obtiendra en moyenne 3,2 boules blanches par série de 8 tirages.

**Exercice 17 :**

b) $E(X) = np = 10 \cdot 0,3 = 3$

En moyenne, 3 personnes sur 10 achètent l'ordinateur.

c) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = P(X \leq 6) - P(X \leq 2) = 0,9894 - 0,3828 = 0,6066$

arrondi à 10^{-3} : 0,607

Astuce : Utiliser la fonction table de la calculatrice