

Probabilités Série 3

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire continue avec la fonction de densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
- b) Calculer $P(1 \leq X \leq 1,5)$ et $P(X \geq 1,5)$.
- c) Calculer $E(X)$.
- d) Calculer $V(X)$.

Exercice 2 :

M. Carrel reçoit chaque semaine son ami M. Schmid pour une partie d'échec, mais ce dernier n'est pas très ponctuel. M. Carrel a pu établir que le retard X (en minutes) de son ami est une variable aléatoire continue qui peut être décrite par la fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{900}, & \text{si } 0 \leq x < 30 \\ \frac{60-x}{900}, & \text{si } 30 \leq x < 60 \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
- b) Quelle est la probabilité que M. Schmid ait moins d'un quart d'heure de retard ?
- c) Combien de fois par année en moyenne M. Schmid a-t-il plus de trois quarts d'heure de retard ?
- d) Calculer le retard moyen de M. Schmid.
- e) Calculer l'écart-type.

Exercice 3 :

La taille X (en cm) atteinte par une espèce végétale k jours après sa sortie de terre ($k < 100$) est une variable aléatoire qui a comme fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{k^3}(kx - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a) Montrer que $f(x)$ est bien une fonction de densité.
- b) Quelle est, k jours après sa sortie de terre, la taille moyenne de l'espèce ?
- c) Quelle probabilité y a-t-il pour une plante sortie de terre depuis 20 jours que sa taille soit inférieure à 6 cm ?

Exercice 4 :

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \begin{cases} kx^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- 1) Pour quelle valeur de k , f est-elle une densité de probabilité ?
- 2) Représenter la fonction f . (1 unité = 10 carrés)
- 3) Trouver sa fonction de répartition et la représenter. (1 unité = 10 carrés)
- 4) Calculer $P(0 \leq X \leq 2)$ et $P(X \geq 1)$.

Exercice 5 :

La durée de vie d'un appareil électronique bon marché est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est la fonction f .

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad x \text{ est exprimé en années.}$$

- 1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- 2) Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0. (Fonction de répartition)
- 3) Représenter graphiquement f . (Choisir judicieusement le repère !)
- 4) Calculer $E(X)$.
- 5) Calculer les probabilités suivantes :

$$P(X \leq 1); P(X > 3); P(1 \leq X < 3); P(1 \leq X \leq 10); P(X \leq 10).$$

Exercice 6 :

Soit X la variable aléatoire représentant le temps d'attente, en heures, au guichet de la poste des Charmilles.

La loi de probabilité associée à cette variable est donnée par la densité suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad x \text{ est exprimé en heures.}$$

- 1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
- 2) Quelle est la probabilité que le client attende moins de 20 minutes ?
- 3) Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 30 minutes et une heure ?

Exercice 7 :

La durée de vie d'un téléphone portable est une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est une fonction de la forme :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda(9 - x^2) & \text{si } x \in [0;3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad x \text{ est exprimée en années.}$$

- 1) Calculer λ de sorte que f soit effectivement une densité de probabilité.
- 2) Calculer la probabilité qu'un téléphone fonctionne :
 - a) plus de deux ans ;
 - b) moins de quatre ans ;
 - c) entre un et deux ans.

Exercice 8 :

La durée de vie, exprimée en jours, d'un savon de Marseille a une densité de probabilité donnée par la fonction :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{t}{10}}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

- a) Quelle est la probabilité qu'un tel savon dure entre 10 et 25 jours ?
- b) Quelle est la probabilité qu'un tel savon dure moins de 8 jours ?



Solutions Probabilités Série 3 :

Exercice 1 : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ a) 1) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ok

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_0^2 = 1$, ok b) $P(1 \leq X \leq 1,5) = \int_1^{1,5} \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^{1,5} = \frac{1,5^2}{4} - \frac{1}{4} = 0,3125$

$P(X \geq 1,5) = \int_{1,5}^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_{1,5}^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1,5^2}{4} = 0,4375$

c) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,33$

d) $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (E(X))^2 = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = \frac{16}{9} - \frac{16}{9} = \frac{16}{72} = 0,22$

Exercice 2 : $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{900} & \text{si } 0 \leq x < 30 \\ \frac{60-x}{900} & \text{si } 30 \leq x < 60 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ a) 1) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ok

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{30} \frac{x}{900} dx + \int_{30}^{60} \frac{60-x}{900} dx = \frac{x^2}{1800} \Big|_0^{30} + \left(\frac{60x}{900} - \frac{x^2}{1800} \right) \Big|_{30}^{60} = 1$, ok

b) $P(0 \leq X \leq 15) = \int_0^{15} \frac{x}{900} dx = \frac{x^2}{1800} \Big|_0^{15} = \frac{15^2}{1800} = 0,125 = 12,5\%$

c) $n=52$, $P(45 \leq X \leq 60) = \int_{45}^{60} \frac{60-x}{900} dx = \left(\frac{60x}{900} - \frac{x^2}{1800} \right) \Big|_{45}^{60} = 0,125 = 12,5\%$

c'est une loi binomiale $\Rightarrow E(X) = n \cdot p = 52 \cdot 0,125 = 6,5$ fois!

d) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^{30} x \cdot \frac{x}{900} dx + \int_{30}^{60} x \cdot \frac{60-x}{900} dx = \frac{x^3}{2700} \Big|_0^{30} + \left(\frac{30x^2}{900} - \frac{x^3}{2700} \right) \Big|_{30}^{60} = 30$

minutes

$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (E(X))^2 = \int_0^{30} x^2 \cdot \frac{x}{900} dx + \int_{30}^{60} x^2 \cdot \frac{60-x}{900} dx - 30^2$

e) $= \frac{x^4}{3600} \Big|_0^{30} + \left(\frac{20x^3}{900} - \frac{x^4}{3600} \right) \Big|_{30}^{60} - 900 = 1050 - 900 = 150$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{150} = 12,2$ minutes

Exercice 3 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{k^3}(kx - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{a) 1) } f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \text{ ok 2) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^k \frac{6(kx - x^2)}{k^3} dx = \left(\frac{3x^2}{k^2} - \frac{2x^3}{k^3} \right) \Big|_0^k = \frac{3k^2}{k^2} - \frac{2k^3}{k^3} = 1, \text{ ok}$$

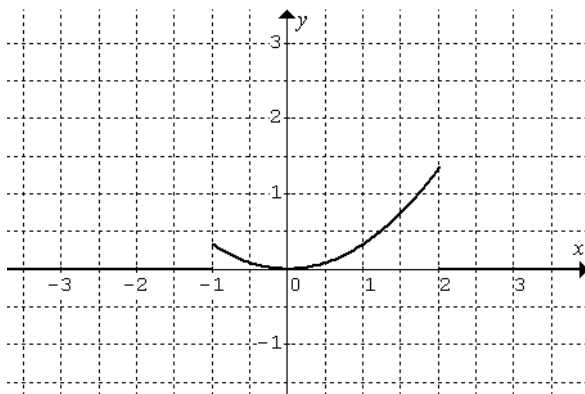
$$\text{b) } E(X) = \int_0^k x \cdot \frac{6}{k^3} \cdot (kx - x^2) dx = \left(\frac{2x^3}{k^2} - \frac{3x^4}{2k^3} \right) \Big|_0^k = \frac{k}{2} \text{ (cm)}$$

$$\text{c) } P(0 \leq X \leq 6) = \int_0^6 \frac{6}{20^3} \cdot (20x - x^2) dx = \left(\frac{60x^2}{20^3} - \frac{2x^3}{20^3} \right) \Big|_0^6 = 0,216 = 21,6\%$$

Exercice 4 :

$$1) \int_{-1}^2 kx^2 dx = 1 \Rightarrow \int_{-1}^2 kx^2 dx = \frac{k}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{8k}{3} + \frac{k}{3} = \frac{9k}{3} = 3k \quad 3k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

2)

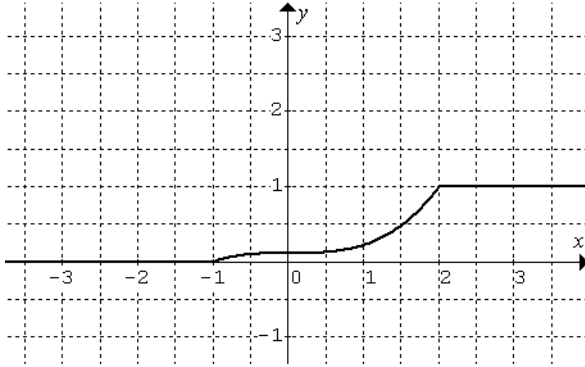


$$3) F: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{9}x^3 + c & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{9}(-1)^3 + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9}(2)^3 + c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

$$F: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



$$4) P(0 \leq X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$P(X \geq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Exercice 5 :

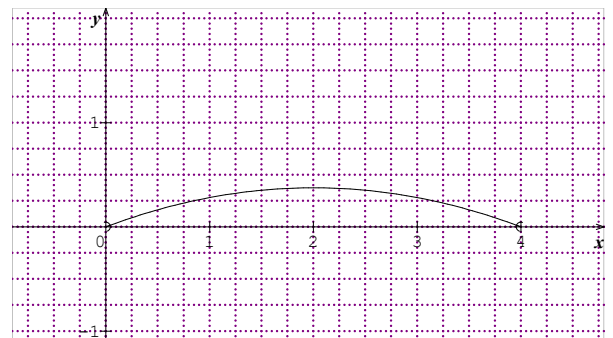
$$f: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

a) f est positive entre 0 et 4 et

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^4 \frac{3}{32}(4x - x^2) dx = \left(\frac{3x^2}{16} - \frac{x^3}{32} \right) \Big|_0^4 = 3 - 2 = 1,$$

ok

$$b) F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$



c) Parabole de sommet $(2; \frac{3}{8})$

$$d) m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_0^4 x \cdot \frac{3}{32}(4x - x^2) dx = \left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x^4}{128} \right) \Big|_0^4 = 8 - 6 = 2$$

$$e) \frac{5}{32}; \frac{5}{32}; \frac{22}{32}; \frac{27}{32}; 1$$

Exercice 6 : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ car la fonction exponentielle est positive sur \mathbb{R}

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} 2e^{-2x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a 2e^{-2x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-e^{-2x} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-2a}) + 1 = 1$$

f est donc bien une densité de probabilité.

b) 48,66 %

c) $P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \left[-e^{-2x} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = -e^{-2} + e^{-1} = 23,25 \%$

Exercice 7 :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \lambda(9 - x^2) & \text{si } x \in [0; 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^3 \lambda(9 - x^2) dx = \left[\lambda \left(9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \right]_0^3 = 18\lambda$ Il faut donc choisir $\lambda = \frac{1}{18}$

2) a) $P(X > 2) = \int_2^3 \frac{1}{18}(9 - x^2) dx = \left[\frac{1}{18} \left(9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \right]_2^3 = 1 - \frac{23}{27} = \frac{4}{27} \cong 14,81\%$

$P(X < 4) = 1$

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{18}(9 - x^2) dx = \left[\frac{1}{18} \left(9x - \frac{1}{3}x^3 \right) \right]_1^2 = \frac{23}{27} - \frac{13}{27} = \frac{10}{27} \cong 37,04\%$$

Exercice 8 : a) 28,58%% b) 55,07%