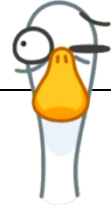


# FONCTIONS POLYNÔMIALES SÉRIE 2



Tous les exercices doivent être faits sur des feuilles à part et **non sur l'énoncé**



**EXERCICE 1 :** Effectuez les divisions polynômiales suivantes :

a)  $(x^2 + 5x + 5) \div (x + 2) =$

d)  $(x^3 - 1) \div (x - 1) =$

b)  $(x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x + 15) \div (x - 5) =$

e)  $(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6) \div (2x - 1) =$

c)  $(x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3) \div (x^2 + 1) =$

**EXERCICE 2 :**  $P(x)$  est-il divisible par  $D(x)$  ? Si oui, donnez la factorisation **complète** de  $P(x)$ .

a)  $P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$   
 $D(x) = x + 1$

b)  $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$   
 $D(x) = x + 4$

c)  $P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2$   
 $D(x) = x + 2$

d)  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$   
 $D(x) = x + 5$

e)  $P(x) = x^4 + 3x^3 - 19x^2 - 27x + 90$   
 $D(x) = x - 2$



**EXERCICE 3 :** Factoriser les polynômes ci-dessous, en observant les indications :

a)  $P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 3, P_1(3) = 0$

b)  $P_2(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4, a = 4$  est racine de  $P_2$

c)  $P_3(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15, \{-5\} \subset \text{Zéros}(P_3)$

d)  $P_4(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2, P_4(x)$  est divisible par  $D(x) = 2x - 1$



**EXERCICE 4 :** Trouver un polynôme  $P(x)$  tel que :

Y A-T-IL PLUSIEURS SOLUTIONS ?

a)  $P_1(x)$  est de degré 4, et  $\text{Zéros}(P_1) = \{-2; 1; 3; 5\}$

b)  $P_2(x)$  est de degré 5, et  $\text{Zéros}(P_2) = \{-2; 1; 5\}$

c)  $P_3(x)$  est de degré 3, et  $\text{Zéros}(P_3) = \{-2; 1; 3; 5; 8\}$

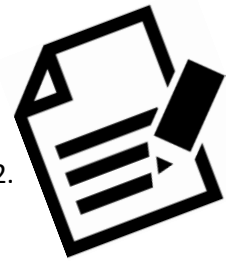
d)  $P_4(x)$  est de degré 3,  $a = 2$  est sa seule racine, et  $P_4(0) = 32$

N'oubliez pas de vérifier vos solutions en fin de série après chaque exercice ! (autrement, on fossilise des fautes et c'est difficile à perdre les mauvais reflexes)



**EXERCICE 5** : Vrai ou faux ? justifiez

- Deux polynômes qui ont les mêmes racines sont égaux.
- Un polynôme qui admet exactement deux racines distinctes est de degré 2.
- Certains polynômes de degré 7 possèdent 3 racines, d'autres en ont 21.

**Plus d'exercices ???**

Voir <http://www.gomaths.ch/> ---> Algèbre ---> Calcul littéral ---> Factorisation

**EXERCICE 6** : Effectuer la division euclidienne de P par T et écrire l'égalité fondamentale de la division correspondante :

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| a) $P(x) = 4x^3 - 10x^2 + 11x - 5$                  | $T(x) = x - 1$                      |
| b) $P(x) = x^5 + x^4 - x^3 - x^2$                   | $T(x) = x + 1$                      |
| c) $P(x) = x^5 - 6x^3 - 8x - 2$                     | $T(x) = x - 3$                      |
| d) $P(x) = 6x^3 - 7x^2 + 8x - 5$                    | $T(x) = x + \frac{2}{3}$            |
| e) $P(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 4$ | $T(x) = \frac{1}{2}x + 1$           |
| f) $P(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 7$                    | $T(x) = x$                          |
| g) $P(x) = ax^3 - 2a^2x^2 + 3a^3x - 4a^4$           | $T(x) = x + a \ (a \in \mathbb{R})$ |
| h) $P(x) = 2x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 7x^2 + 3x + 4$      | $T(x) = 2x + 3$                     |

**EXERCICE 7** : Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  pour que A soit divisible par B.

- |   |                |
|---|----------------|
| a) $A(x) = x^2 + ax + 12$                 | $B(x) = x - 3$ |
| b) $A(x) = x^3 + ax^2 + 19x - 12$         | $B(x) = x - 1$ |
| c) $A(x) = 3x^4 - ax^3 + 8x^2 - 2ax - 20$ | $B(x) = x - 2$ |



**NE PAS ÉCRIRE SUR LES ÉNONCÉS !** IL FAUT ABSOLUMENT SE RETROUVER FACE À UNE PAGE BLANCHE POUR REFAIRE LES RAISONNEMENTS PAR VOUS-MÊME SANS ÊTRE INFLUENCÉS PAR UNE CORRECTION NON COMPRISE OU NON ASSIMILÉE. A L'ÉPREUVE, VOUS DEVREZ REFAIRE ENTIÈREMENT LES CALCULS ET EXPLIQUANT LES ÉTAPES ET NOTATION CHOISIE.



**EXERCICE 8 :**

Effectuer la division euclidienne du polynôme  $D$  (Dividende) par le polynôme  $d$  (diviseur) afin d'obtenir le quotient  $Q$  et le reste  $R$ .

N° exercice	Dividende	diviseur
1	$D = 2x^2 - 5x + 7$	$d = x - 1$
2	$D = -3x^2 + 5x + 4$	$d = 2x - 3$
3	$D = x^3 + 5x^2 + 4$	$d = x + 2$
4	$D = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$	$d = x^2 - 4x - 3$
5	$D = x^3 - 3x - 2$	$d = x - 2$
6	$D = -2x^3 + 8x^2 - 5 - 12$	$d = x - 3$
7	$D = -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15$	$d = x - 3$
8	$D = 3x^3 - 5x^2 + x + 3$	$d = 0,5x + 1,5$
9	$D = x^3 - 3x^2 - 8x + 4$	$d = x + 2$
10	$D = 4x^3 - x^2 + x - 5$	$d = 2x - 3$
11	$D = -x^3 + 2x^2 + 3$	$d = x^2 + x - 1$
12	$D = -3x^2 + 7x - 5$	$d = x + 1$
13	$D = 5x^2 - 8x + 7$	$d = -2x + 5$
14	$D = x^3 + 7x^2 + 6$	$d = x + 4$
15	$D = -x^3 + 3x^2 + x - 4$	$d = x^2 + 2x - 5$
16	$D = -x^3 + x - 24$	$d = x + 3$
17	$D = -3x^3 - 5x^2 - 2x - 37$	$d = x + 3$
18	$D = -x^3 + 2x^2 + 8x + 5$	$d = x + 1$
19	$D = 2x^3 - 7x^2 + 3x + 1$	$d = 0,5x + 2,5$
20	$D = -x^3 + 4x^2 + 3x - 6$	$d = x - 1$
21	$D = 3x^3 - 5x^2 + x - 3$	$d = 2x - 5$
22	$D = x^3 + 7x^2 - 21x + 6$	$d = x - 2$

## CORRIGÉ POLYNÔMES SÉRIE 2

### EXERCICE 1 :

- a)  $x^2 + 5x + 5 = (x + 2)(x + 3) - 1$   
 b)  $x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 8x + 15 = (x - 5)(x^3 + 2x^2 - x + 3) + 30$   
 c)  $x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 3 = (x^2 + 1)(x^2 + 2x - 3)$   
 d)  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$   
 e)  $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (2x - 1)(x^2 + 5x + 6)$

### EXERCICE 2 :

On pourrait faire les divisions polynomiales pour répondre aux questions, mais il est plus simple de tester si les deux polynômes ont les mêmes zéros.

- a)  $D(-1) = 0$ , donc il faut tester si  $-1$  est un zéro du polynôme  $P$ .

$$P(-1) = -1 + 4 - 4 + 1 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de  $P$  par  $D$ , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) \text{ Après ce début de factorisation, on peut aller plus}$$

loin en factorisant :  $x^2 + 3x + 1$  en utilisant Viète.

$$a = 1 ; b = 3 ; c = 1. \quad \Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 9 - 4 = 5.$$

$$x^2 + 3x + 1 = \left( x - \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left( x - \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right) = \left( x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left( x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } P(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x + 1) \cdot \left( x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left( x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

- b)  $D(-4) = 0$ , donc il faut tester si  $-4$  est un zéro du polynôme  $P$ .

$$P(-4) = (-4)^3 - 2 \cdot (-4)^2 - 2 \cdot (-4) - 3 = -91 \neq 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ n'est pas divisible par } D.$$

- c)  $D(-2) = 0$ , donc il faut tester si  $-2$  est un zéro du polynôme  $P$ .

$$P(-2) = (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 + 7 \cdot (-2) + 2 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de  $P$  par  $D$ , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 5x^2 + 7x + 2 = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 1) \text{ Après ce début de factorisation, on peut aller plus}$$

loin en factorisant :  $x^2 + 3x + 1$ . Ceci a déjà été fait dans la partie a).

$$\text{Donc : } P(x) = (x + 2) \cdot (x^2 + 3x + 1) = (x + 2) \cdot \left( x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \cdot \left( x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

- d)  $P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45$   $D(x) = x + 5$

$D(-5) = 0$ , donc il faut tester si  $-5$  est un zéro du polynôme  $P$ .

$$P(-5) = (-5)^3 + 5 \cdot (-5)^2 - 9 \cdot (-5) - 45 = 0. \text{ Donc on sait que } P \text{ est divisible par } D.$$

Par division de  $P$  par  $D$ , on obtient :

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 9x - 45 = (x + 5) \cdot (x^2 - 9) = (x + 5) \cdot (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Cette fois-ci, la suite de la factorisation était simple.

**EXERCICE 3 :**

- a)  $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x - 3)(x^3 + x^2 - 1)$   
 b)  $q(x) = x^2 + 2x + 1$   
 c)  $p(x) = (x + 5)(x^2 - 9) = (x + 5)(x + 3)(x - 3)$   
 d)  $p(x) = (x - 2)(x^3 + 5x^2 - 9x - 45) = (x - 2)(x + 5)(x + 3)(x - 3)$

**EXERCICE 4 :**

- a)  $p_1(x) = c(x + 2)(x - 1)(x - 3)(x - 5)$ ,  $c$  est une constante  
 b)  $p_2(x) = x(x + 2)^2(x - 1)^2(x - 5)$   
 c) impossible  
 d)  $p_4(x) = -4(x - 2)^3$

**EXERCICE 5 :**

- a) Faux ex :  $p(x) = x - 1$  et  $q(x) = (x - 1)^2$  ou  $r(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$   
 b) Faux ex :  $p(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$  est de degré .....  
 c) Faux : s'il y a 21 racines, alors le polynôme est au moins de degré 21. (donc pas de degré 7)

**EXERCICE 6 :**

- a)  $P(x) = (x - 1)(4x^2 - 6x + 5)$       b)  $P(x) = (x + 1)(x^4 - x^2)$   
 c)  $P(x) = (x - 3)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 9x + 19) + (55)$       d)  $P(x) = (x + \frac{2}{3})(6x^2 - 11x + \frac{46}{3}) + (-\frac{137}{9})$   
 e)  $P(x) = (\frac{1}{2}x + 1)(2x^2 - x + 3) + (1)$       f)  $P(x) = x(4x^2 - 5x + 3) + (-7)$   
 g)  $P(x) = (x + a)(ax^2 - 3a^2x + 6a^3) + (-10a^4)$       h)  $P(x) = (2x + 3)(x^4 - 3x^2 + x) + 4$

**EXERCICE 7:**

- a)  $a = -7$       b)  $a = -8$       c)  $a = 5$

## CORRIGÉ SÉRIE 2

## EXERCICE 8:

$$1) \begin{array}{r} 2x^2 - 5x + 7 \quad | \quad x-1 \\ -(2x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 3 \\ -(-3x + 3) \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2) -3x^2 + 5x + 4 \quad | \quad 2x-3 \\ -(-3x^2 + 4.5x) \\ \hline 0.5x + 4 \\ -(0.5x - 0.75) \\ \hline 4.75 \end{array}$$

$$12) \begin{array}{r} -3x^2 + 7x - 5 \quad | \quad x+1 \\ -(-3x^2 - 3x) \\ \hline 10x - 5 \\ -(10x + 10) \\ \hline -15 \end{array} \quad 13) \begin{array}{r} 5x^2 - 8x + 7 \quad | \quad -2x+5 \\ -(5x^2 - 12.5x) \\ \hline 4.5x + 7 \\ -(4.5x - 11.25) \\ \hline 18.25 \end{array}$$

$$3) \begin{array}{r} \text{espace } (+0x) \\ x^3 + 5x^2 + 4 \quad | \quad x+2 \\ -(x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^2 + 4 \\ -(3x^2 + 6x) \\ \hline -6x + 4 \\ -(-6x - 12) \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = x^2 + 3x - 6 \\ R = 16 \end{array}$$

$$14) \begin{array}{r} \text{espace } (+0x) \\ x^3 + 7x^2 + 6 \quad | \quad x+4 \\ -(x^3 + 4x^2) \\ \hline 3x^2 + 6 \\ -(3x^2 + 12x) \\ \hline -12x + 6 \\ -(-12x - 48) \\ \hline 54 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = x^2 + 3x - 12 \\ R = 54 \end{array}$$

$$4) \begin{array}{r} 2x^3 + 5x^2 - x + 1 \quad | \quad x^2 - 4x - 3 \\ -(2x^3 - 8x^2 - 6x) \\ \hline 13x^2 + 5x + 1 \\ -(13x^2 - 52x - 39) \\ \hline 57x + 40 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = 2x + 13 \\ R = 57x + 40 \end{array}$$

$$15) \begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 + x - 4 \quad | \quad x^2 + 2x - 5 \\ -(-x^3 - 2x^2 + 5x) \\ \hline 5x^2 - 4x - 4 \\ -(5x^2 + 10x - 25) \\ \hline -14x + 21 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -x + 5 \\ R = -14x + 21 \end{array}$$

$$5) \begin{array}{r} \text{espace } (+0x^2) \\ x^3 - 3x - 2 \quad | \quad x-2 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline 2x^2 - 3x - 2 \\ -(2x^2 - 4x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = x^2 + 2x + 1 \\ R = 0 \end{array}$$

$$16) \begin{array}{r} \text{espace } (+0x^2) \\ -x^3 + x - 24 \quad | \quad x+3 \\ -(-x^3 - 3x^2) \\ \hline 3x^2 + x - 24 \\ -(3x^2 + 9x) \\ \hline -8x - 24 \\ -(-8x - 24) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -x^2 + 3x - 8 \\ R = 0 \end{array}$$

$$6) \begin{array}{r} -2x^3 + 8x^2 - 5x - 12 \quad | \quad x-3 \\ -(-2x^3 + 6x^2) \\ \hline 2x^2 - 5x - 12 \\ -(2x^2 - 6x) \\ \hline x - 12 \\ -(x - 3) \\ \hline -9 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -2x^2 + 2x + 1 \\ R = -9 \end{array}$$

$$17) \begin{array}{r} -3x^3 - 5x^2 - 2x - 37 \quad | \quad x+3 \\ -(-3x^3 - 9x^2) \\ \hline 4x^2 - 2x - 37 \\ -(4x^2 + 12x) \\ \hline -14x - 37 \\ -(-14x - 42) \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -3x^2 + 4x - 14 \\ R = 5 \end{array}$$

$$7) \begin{array}{r} -2x^3 + 13x^2 - 16x - 15 \quad | \quad x-3 \\ -(-2x^3 + 6x^2) \\ \hline 7x^2 - 16x - 15 \\ -(7x^2 - 21x) \\ \hline 5x - 15 \\ -(5x - 15) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -2x^2 + 7x + 5 \\ R = 0 \end{array}$$

$$18) \begin{array}{r} -x^3 + 2x^2 + 8x + 5 \quad | \quad x+1 \\ -(-x^3 - x^2) \\ \hline 3x^2 + 8x + 5 \\ -(3x^2 + 3x) \\ \hline 5x + 5 \\ -(5x + 5) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} Q = -x^2 + 3x + 5 \\ R = 0 \end{array}$$

$$8) Q = 6x^2 - 28x + 86 \quad R = -126$$

$$19) Q = 4x^2 - 34x + 176 \quad R = -439$$

$$9) Q = x^2 - 5x + 2 \quad R = 0$$

$$20) Q = -x^2 + 3x + 6 \quad R = 0$$

$$10) Q = 2x^2 + 2.5x + 4.25 \quad R = 7.75$$

$$21) Q = 1.5x^2 + 1.25x + 3.625 \quad R = 15.125$$

$$11) Q = -x + 2 \quad R = -4x + 6$$

$$22) Q = x^2 + 9x - 2 \quad R = 0$$