

Analyse : Série 3

Exercice 1 : Dans le tableau ci-dessous esquisser le graphe d'une fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) qui satisfait aux deux conditions indiquées sur les bords :

$\Delta > 0$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	
			$a > 0$
			$a < 0$

Exercice 2 : Déterminer les zéros (s'ils existent) et le sommet pour chacune des fonctions définies ci-dessous. Représenter graphiquement (croquis éventuel, puis représentation soignée).

a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

e) $f(x) = 4 - x^2$

b) $f(x) = x^2 + 5x$

f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

d) $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

Exercice 3 : Soit les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = -x^2 + 3$$

- Représenter les deux fonctions sur le même graphique
- Déterminer visuellement les coordonnées des points d'intersection.
- Comment peut-on déterminer ces coordonnées algébriquement ?

Indication : cela ressemble aux intersections de droites.

Exercice 4 : Déterminer **algébriquement** les coordonnées des points d'intersection (s'ils existent) des fonctions f et g définies ci-dessous. Il n'est pas obligatoire de faire une représentation graphique, mais un croquis peut aider.

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

et $g(x) = 3x^2 - 12x + 18$

b) $f(x) = 2x + 1$

et $g(x) = -x^2 - 3x$

c) $f(x) = 5$

et $g(x) = x^2 - 1$

d) $f(x) = -x^2 + 13x - 48$

et $g(x) = x^2 - 11x + 24$

Exercice 5 : Dessiner les graphes des fonctions définies par

$$f(x) = x^2 - x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = -x^2 + 2x - 2$$

Résoudre ensuite graphiquement les équations et inéquations ci-dessous. (C'est-à-dire trouver toutes les valeurs de x pour lesquelles elles sont vraies.)

- | | | |
|------------------|------------------|-------------------|
| a) $f(x) = 0$ | d) $f(x) > 0$ | g) $g(x) \leq 0$ |
| b) $g(x) = 0$ | e) $f(x) < 0$ | h) $f(x) < g(x)$ |
| c) $f(x) = g(x)$ | f) $g(x) \geq 0$ | i) $g(x) \leq -2$ |

Exercice 6 :

Déterminer l'expression $f(x) = \dots$ d'une fonction du deuxième degré pour laquelle les zéros se situent en $x = 2$ et $x = 8$ et le sommet a les coordonnées $S(5; 9)$.

Exercice 7 : Déterminer l'expression $f(x) = \dots$ d'une fonction du deuxième degré, si l'on sait que la fonction satisfait $f(0) = 3$; $f(1) = 2$ et $f(-1) = 6$.

Exercice 8 : Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

- De sommet $S(2; 5)$ et dont le graphe passe par le point $A(4; -1)$
- Qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite $y = 8$
- Qui coupe l'axe Ox en $x = -3$ et $x = 1$ et qui est tangente à la droite $y = -1$

Exercice 9 : Déterminer les points d'intersection des graphes de f et de g

- $f(x) = x^2 - 5x + 4$ et $g(x) = -4x + 10$
- $f(x) = x^2 + x$ et $g(x) = 2x^2 - 6$

Exercice 10 : Soit la fonction f donnée par $f(x) = x^2 + 5x + 7$

- Calculer l'image de -3
- Existe-t-il une préimage de 1 ?
- Existe-il une valeur qui ne possède pas de préimage ?

Exercices 11 :

- Représenter graphiquement la fonction f donnée par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$ en déterminant les points caractéristiques habituels s'ils existent (zéros, sommet, intersection avec l'axe des ordonnées) ainsi que d'autres points calculés « à la main » si nécessaire.
- Représenter sur le même graphique la fonction g donnée par $g(x) = x^2 + x + 1$.
- Calculer les coordonnées des points d'intersection (arrondi raisonnable). Comparer avec le graphique pour vérification.

Solutions Analyse Série 3 :

Exercice 1 :

Voir brochure orange du collège à la page 9-4

Exercice 2 :

a) $f(x) = x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$

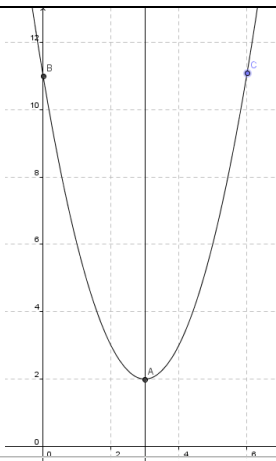
Ordonnée à l'origine: 11

axe de symétrie: $x = 3$

zéros: aucun

forme: convexe

sommet $S = (3; 2)$



b) $f(x) = x^2 + 5x = x(x + 5) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

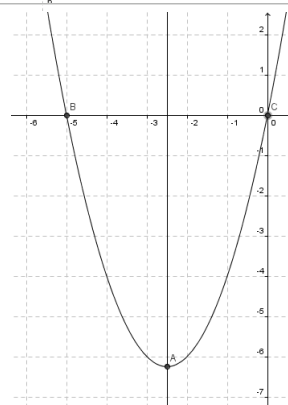
forme: convexe

ordonnée à l'origine: 0

sommet: $S = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4}\right)$

zéros: -5 et 0

axe de symétrie: $x = -\frac{5}{2}$



c) $f(x) = x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1) = (x + 3)^2 - 4$

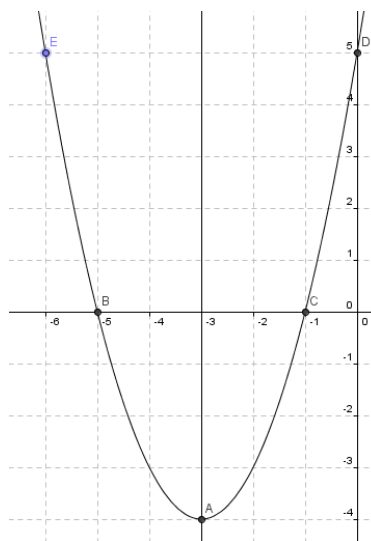
forme: convexe

axe de symétrie: $x = -3$

zéros: -5 et -1

sommet: $S = (-3; -4)$

ordonnée à l'origine: 5



$$d) 2x^2 + 5x - 3 = 2(x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$$

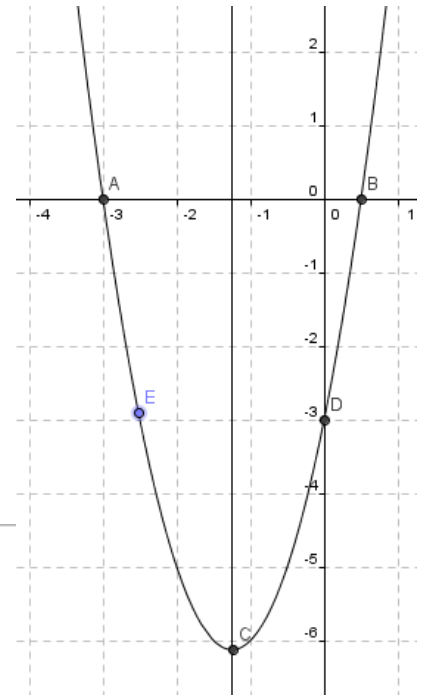
Ordonnée à l'origine : -3

zéros: -3 et 1/2

axe de symétrie: $x = -\frac{5}{4}$

sommet $S\left(-\frac{5}{4}; -\frac{49}{8}\right)$

forme: convexe



$$e) 4 - x^2 = -(x + 2)(x - 2) = -x^2 + 4$$

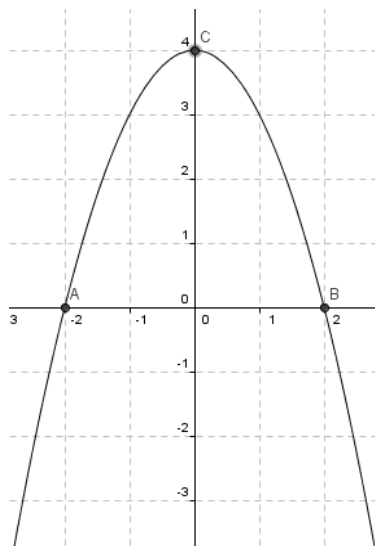
forme: concave

ordonnée à l'origine: 4

zéros: -2 et +2

axe de symétrie: $x = 0$

sommet: $S(0; 4)$



$$f) f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = -\frac{1}{2}(x + 4)(x - 2) = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{9}{2}$$

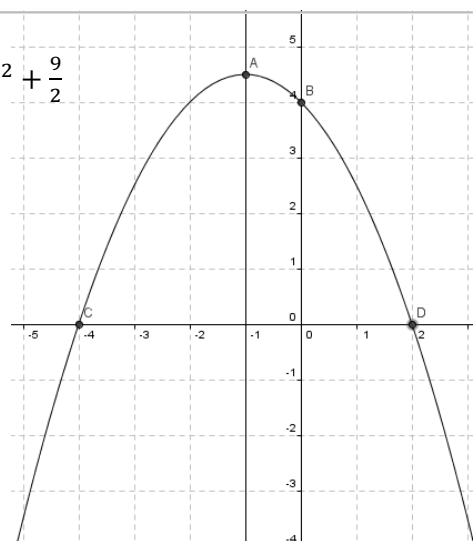
forme: concave

ordonnée à l'origine: 4

zéros: -4 et 2

axe de symétrie: $x = -1$

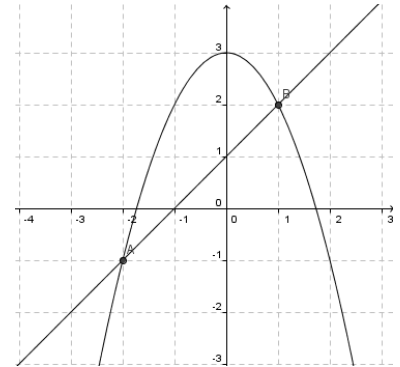
sommet: $S\left(-1; \frac{9}{2}\right)$



Exercice 3:

a) $f(x) = x + 1$ est une droite croissante de pente 1; d'ordonnée à l'origine 1; de zéro en -1

$g(x) = -x^2 + 3$ est une parabole concave, d'ordonnée à l'origine en 3; de zéro en $\pm\sqrt{3}$; d'axe de symétrie en $x = 0$; de sommet en $(0,3)$



b) Il y a deux points d'intersection: $A(-2; -1)$ et $B(1; 2)$

c) Il faut résoudre: $f(x) = g(x)$

$$\text{donc } x + 1 = -x^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$$

soit $x = 1$ soit $x = -2$

Il faut alors trouver les coordonnées verticales de ces points:

$$f(1) = g(1) = 2 \text{ ce qui confirme le point } (1; 2)$$

$$f(-2) = g(-2) = -1 \text{ ce qui confirme le point } (-2; -1)$$

On peut noter: $f \cap g = \{(1; 2); (-2; -1)\}$ l'ensemble des points d'intersection entre les deux fonctions

Exercice 4:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x^2 - 4x + 3 &= 3x^2 - 12x + 18 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = 5 \end{aligned}$$

$$f(3) = g(3) = 9 \text{ et } f(5) = g(5) = 33$$

$$\text{donc: } f \cap g = \{(3; 9); (5; 33)\}$$

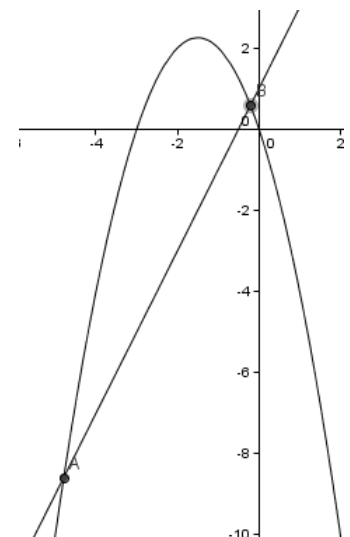
$$\text{b) } 2x + 1 = -x^2 - 3x \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = 21 \text{ donc } x_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \cong -0,21 \text{ et } x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2} \cong -4,79$$

$$f(-0,21) \cong 0,58 \text{ et } f(-4,79) \cong -8,58$$

$$\text{donc } f \cap g = \{(-0,21; 0,58); (-4,79; -8,58)\}$$

illustration: intersection entre une droite croissante et une parabole concave



$$c) 5 = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6})$$

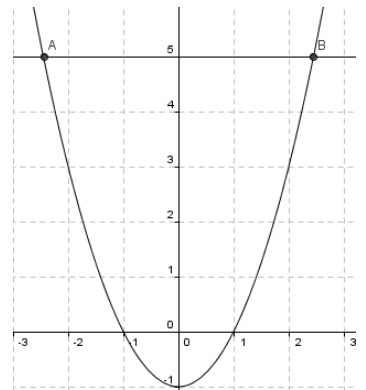
$$\text{donc } x = \pm\sqrt{6}$$

donc deux points d'intersection

$$\text{mais } y = 5$$

$$f \cap g = \{(-\sqrt{6}; 5); (\sqrt{6}; 5)\}$$

intersection entre une droite constante et une parabole: illustration graphique



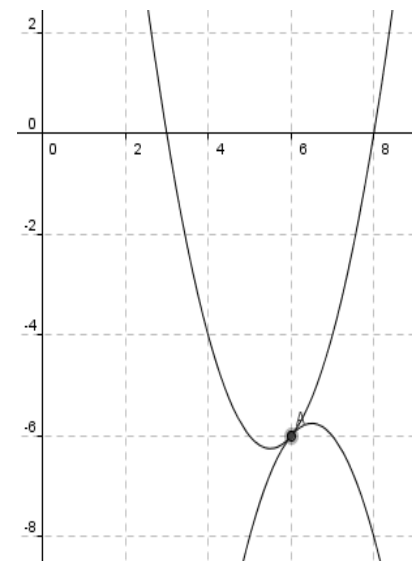
$$d) -x^2 + 13x - 48 = x^2 - 11x + 24 \Leftrightarrow 2x^2 - 24x + 72 = 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

donc un seul point d'intersection.

$$f(6) = -6$$

$$\text{donc: } f \cap g = \{(6; -6)\}$$

Illustration graphique: un point d'intersection:



Exercice 5:

$$a) S = Z_f = \{-2; 3\}$$

$$b) S = Z_g = \emptyset$$

$$c) S = f \cap g = \{(-1; -4,5); (2,3; -2,8)\}$$

$$d) S =] - \infty; -2[\cup]3; \infty[$$

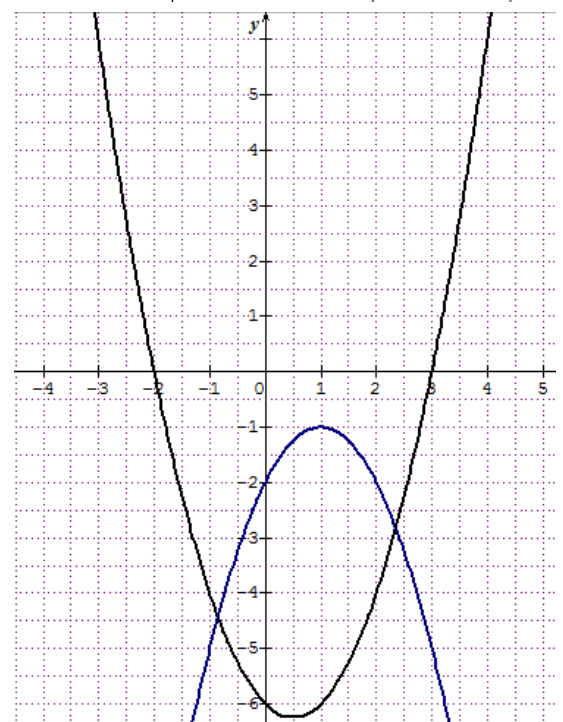
$$e) S =] - 2; 3[$$

$$f) S = \emptyset \text{ (} g \text{ n'est jamais au dessus de l'axe horizontal)}$$

$$g) S = \mathbb{R} \text{ (} g \text{ est toujours au dessous de l'axe horizontal)}$$

$$h) S =] - 1; 2,3[$$

$$i) S = [0; 2]$$



Exercice 6:

Rappel: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x - h)^2 + k$
 avec: $(h; k)$ le sommet; $Zéros(x) = \{x_1; x_2\}$; ordonnée à l'origine: c

Méthode 1: Utiliser les zéros: 2 et 8

On peut écrire: $f(x) = a(x - 2)(x - 8)$ pour déterminer le coefficient a , on utilise le point $S(5; 9)$:

$$f(5) = a(5 - 2)(5 - 8) = 9 \text{ et on trouve: } a \cdot 3 \cdot (-3) = 9 \text{ donc } a = -1$$

$$\text{On a donc trouvé: } f(x) = -1(x - 2)(x - 8) = -(x^2 - 10x + 16) = -x^2 + 10x - 16$$

Méthode 2: utiliser le sommet: $S(5; 9)$

$$\text{On peut écrire } f(x) = a(x - 5)^2 + 9$$

Pour déterminer le coefficient a on a trop d'information: idée: en utiliser une pour calculer et une pour vérifier.

$$f(2) = 0 \text{ donc } f(2) = a(2 - 5)^2 + 9 = 0 \text{ ainsi: } a \cdot (-3)^2 = -9 \text{ et on trouve } a = -1$$

$$\text{vérifions: } f(8) = 0 \text{ donc } f(8) = a(8 - 5)^2 + 9 = 0 \text{ et on trouve aussi } a = -1$$

$$\text{La fonction est donc: } f(x) = -(x - 5)^2 + 9 = -(x^2 - 10x + 25) + 9 = -x^2 + 10x - 16$$

En résumé : On peut alors écrire $f(x) = -x^2 - 10x - 16 = -(x - 2)(x - 8) = -(x - 5)^2 + 9$

Remarque : une seule forme est demandée. A vous de choisir celle qui est la plus rapide à déterminer.

Exercice 7 :

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$$

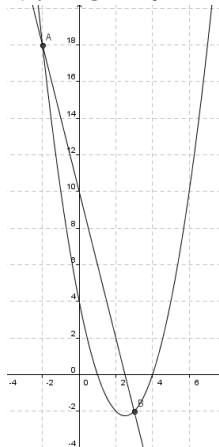


Exercice 8 :

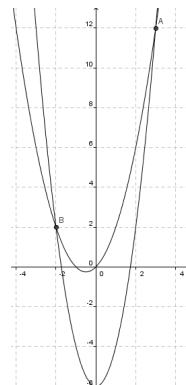
$$\text{a) } f(x) = -\frac{3}{2}(x - 2)^2 + 5 \quad \text{b) } f(x) = -2(x + 3)(x - 1) \quad \text{c) } f(x) = \frac{1}{4}(x + 3)(x - 1)$$

Exercice 9 :

$$\text{a) } f \cap g = \{(-2; 18); (3; -2)\}$$

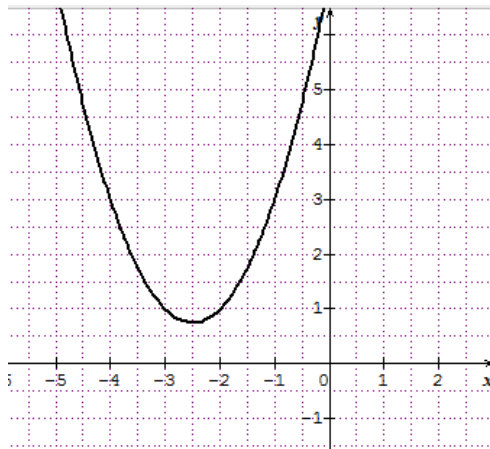


$$\text{b) } f \cap g = \{(-2; 2); (3; 12)\}$$



Exercice 10 :

a) $f(-3) = 1$ b) $f^{-1}(1) = \{-3; -2\}$ c) $x \in]-\infty; \frac{1}{2}]$

**Exercice 11 :**

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2}$
 parabole concave car $-\frac{1}{2} < 0$

zéros: $\Delta = (-1)^2 - 4 \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{15}{2} = 16 > 0$ donc deux zéros: $x_{1,2} = \frac{1 \pm 4}{-1}$

donc $x_1 = -5$ et $x_2 = 3$

sommet: $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (-1; f(-1)) = (-1; 8)$

ordonnée à l'origine: $f(0) = \frac{15}{2} (= 7,5)$

b) $g(x) = x^2 + x + 1$

parabole convexe car $a = 1 > 0$

zéro: aucun car $\Delta < 0$

ordonnée à l'origine: $g(0) = 1$

sommet: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

c) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2} = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{15}{2} + x^2 + x + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 + 2x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 13 = 0$

Utilisons la méthode du discriminant pour résoudre cette équation:

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-13) = 172 > 0$ donc deux solutions

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{172}}{6}$ on a donc: $x_1 \cong 1,519$ et $x_2 \cong -2,852$

On détermine alors les coordonnées:

A = (-2.85, 6.28)

B = (1.52, 4.83)

Réponse: $f \cap g \cong \{(-2,85; 6,28); (1,52; 4,83)\}$

