

Série 6 Exponentielles et logarithmes

Exercice 1 :

La pression atmosphérique.

La pression atmosphérique P à une altitude h se calcule de la manière suivante :

$$P(h) = P_0 \cdot e^{-kh} \quad P_0 \text{ est la pression au niveau de la mer ; } h \text{ est l'altitude, en mètres ;}$$
$$k = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ [1/m]} \text{ est une constante.}$$

- a) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale à la moitié de P_0 ?
- b) A quelle altitude se trouve-t-on si la pression P est égale au cinquième de P_0 ?

Exercice 2 :

La culture de bactéries.

Le nombre de bactéries d'une culture suit la loi suivante :

$$N(t) = N_0 \cdot a^t \quad N_0 \text{ est le nombre initial de bactéries ; } t \text{ est le temps, en jours.}$$

- a) Déterminez N_0 et a sachant que la culture comprend 200'000 bactéries après 3 jours, et 1,6 millions après 4,5 jours.
- b) Quel sera le nombre de bactéries après 5 jours ?
- c) Après combien de temps la colonie comptera-t-elle 5 millions de bactéries ?

Exercice 3 :

La désintégration du Berkélium.

Le nombre d'atomes de Berkélium contenu dans un corps diminue selon une loi exponentielle :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \text{ où } N_0 \text{ égale le nombre d'atomes de Berkélium au temps } t = 0,$$
$$N(t) = \text{le nombre d'atomes de Berkélium au temps } t \text{ et } \lambda = 0,1485 \text{ [1/heures].}$$

- a) Quel est le temps nécessaire pour que la radioactivité diminue de moitié ?
- b) Au bout de combien de temps la radioactivité aura-t-elle diminuée de 99% ?

Exercice 4 :

L'ancêtre généreux.

Si votre ancêtre préféré avait placé à la naissance de Jésus Christ un sesterce (équivalent à un centime actuel) sur un compte épargne à 2%, juste pour vous. (Sans frais bancaires)

A combien s'élèverait votre compte en banque en l'an 2010 ?

Corrigé Série 6 Exponentielles et logarithmes

1 La pression atmosphérique.

- a) On cherche h tel que $P(h) = P_0 \cdot e^{-k \cdot h} = P_0 / 2$; donc $e^{-k \cdot h} = 1/2$; On prend le $\ln$:
 $-k \cdot h = \ln(1/2) = -\ln(2)$, donc $h = \ln(2) / 0,000125 \text{ [m}^{-1}\text{]} \approx 5'545$ mètres.
 A environ 5'545 mètres la pression égale la moitié de la pression au niveau de la mer.
- b) On cherche h tel que $P(h) = P_0 \cdot e^{-k \cdot h} = P_0 / 5$; donc $e^{-k \cdot h} = 1/5$; On prend le $\ln$:
 $-k \cdot h = \ln(1/5) = -\ln(5)$, donc $h = \ln(5) / 0,000125 \text{ [m}^{-1}\text{]} \approx 12'876$ mètres.
 A environ 12'876 mètres la pression égale le cinquième de la pression au niveau de la mer.

2 La culture de bactéries.

- a) On sait que : $N_0 \cdot a^3 = 200'000$ et $N_0 \cdot a^{4,5} = 1'600'000$
 En divisant les deux équations, on élimine l'inconnue N_0 : $a^{4,5} / a^3 = 1'600'000 / 200'000$
 $a^{4,5-3} = 8$; $a^{1,5} = 8$; $a^{3/2} = 8$; $a = 8^{2/3} = 4$
 Maintenant, il est facile de déterminer la valeur de N_0 .
 $N_0 = 200'000 / 4^3 = 200'000 / 64 = 3'125$.
 Vérifions avec la deuxième équation : $N_0 = 1'600'000 / 4^{4,5} = 1'600'000 / 512 = 3'125$.
 Donc $N(t) = 3'125 \cdot 4^t$.
- b) Après 5 jours, le nombre de bactéries sera de : $N(5) = 3'125 \cdot 4^5 = 3'200'000$
- c) On cherche t pour avoir $N(t) = 3'125 \cdot 4^t = 5'000'000$. On divise par 3'125 et on prend le $\log$.
 $t \cdot \ln(4) = \ln(5'000'000 / 3'125)$. La base n'a pas d'importance.
 $t = \ln(5'000'000 / 3'125) / \ln(4) \approx 5,322$ jours ≈ 5 jours 7 heures 43 minutes
 Après environ 5 jours 7 heures et 43 minutes la colonie comptera 5 millions de bactéries.

3 La désintégration du Berkélium.

Le nombre d'atomes de Berkélium contenu dans un corps diminue selon une loi exponentielle :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}, \text{ avec } \lambda = 0,1485 \text{ [1/heures]}$$

- a) On cherche t tel que : $N(t) = N_0 / 2 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. L'équation devient : $1/2 = e^{-\lambda \cdot t}$
 On prend le logarithme naturel : $\ln(1/2) = -\lambda \cdot t = -0,1485 \cdot t$, donc
 $t = \frac{\ln(1/2)}{-0,1485} = \frac{\ln(2)}{0,1485} \approx 4,667$ heures ≈ 4 heures et 40 minutes.
 Après 4 heures et 40 minutes, il ne restera plus que la moitié de la quantité initiale de Berkélium.
- b) On cherche t tel que : $N(t) = 0,01 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$. L'équation devient : $0,01 = e^{-\lambda \cdot t}$
 On prend le logarithme naturel : $\ln(0,01) = -\lambda \cdot t = -0,1485 \cdot t$, donc
 $t = \frac{\ln(0,01)}{-0,1485} = \frac{\ln(100)}{0,1485} \approx 31,011$ heures ≈ 31 heures et 40 secondes.
 Après 31 heures et 40 secondes, il ne restera plus que 1% de la quantité initiale de Berkélium.

4 L'ancêtre généreux.

En l'an 1, le compte d'épargne aurait $1 + 0,02 \cdot 1$ centimes = 1,02 centimes.
 En l'an 2, le compte d'épargne aurait $1,02 + 0,02 \cdot 1,02 = 1,02 \cdot 1,02 = 1,02^2$ centimes.
 En l'an 3, le compte d'épargne aurait $1,02^2 + 0,02 \cdot 1,02^2 = 1,02^2 \cdot 1,02 = 1,02^3$ centimes.
 En l'an 4, le compte d'épargne aurait $1,02^3 + 0,02 \cdot 1,02^3 = 1,02^3 \cdot 1,02 = 1,02^4$ centimes.
 En continuant ainsi, on constate que :
 En l'an 2010, le compte d'épargne aurait $1,02^{2010}$ centimes.
 Avec la calculatrice on vérifie que ce nombre vaut environ $1,9335 \cdot 10^{17}$ centimes.
 Ceci fait plus de 1,9 millions de milliards de francs.
 Dommage pour vous que cet ancêtre n'ait pas existé ...